Kolokwium 2

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

21 stycznia 2021

Własność rozszerzania:

$$\forall_{\substack{U,W\subset V(G)\\ U\cap W=\emptyset\\ |U|,|W|<\infty}} \exists_{v\in V(G)\setminus(U\cup W)} : (U \subset N(v) \wedge W \cap N(v) = \emptyset)$$

Zadanie 1 (13p)**.** Niech $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ będą grafami rzędu n o odpowiednio m_1, m_2 krawędziach oraz stopniach maksymalnych odpowiednio Δ_1, Δ_2. Udowodnij, że jeżeli $\Delta_1 m_2 + \Delta_2 m_1 \leqslant \frac{1}{2e}\binom{n}{2}$, to grafy G_1 i G_2 pakują się, tj. istnieje bijekcja $f : V_1 \to V_2$ taka, że $e \in E_1 \Rightarrow f(e) \notin E_2$.

Zadanie 2 (14p)**.** Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskończonym, którego stopień maksymalny jest równy $\Delta < \infty$. Udowodnij, że $\chi'(G) \leqslant \Delta + 1$.

Wskazówka: użyj twierdzenia Wizinga dla grafów skończonych.

Zadanie 3 (13p)**.** Niech $\mathcal{R}$ będzie grafem Rada, a G dowolnym grafem nieskończonym przeliczalnym. Udowodnij, że jeżeli dla każdego skończonego zbioru wierzchołków $\{v_1, \ldots, v_n\}$ grafu G istnieje wierzchołek $x \in V(G)$ który nie jest połączony krawędzią z żadnym z $v_1, \ldots, v_n$, to G jest izomorficzny z pewnym podgrafem spinającym grafu $\mathcal{R}$.
Czy można usunąć założenie o istnieniu wierzchołka niepołączonego krawędzią?

Zadanie 4 (10p)**.** Udowodnij, że jeżeli $p << n^{-\frac{k+1}{k}}$, to prawdopodobieństwo, że graf losowy zawiera wierzchołek stopnia k, zmierza do zera (przy $n \to \infty$).