Kolokwium 2

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

25 stycznia 2022

Własność rozszerzania:

$$\forall_{\substack{U,W\subset V(G)\\ U\cap W=\emptyset\\ |U|,|W|<\infty}} \exists_{v\in V(G)\setminus(U\cup W)}\colon (U\subset N(v)\wedge W\cap N(v)=\emptyset)$$

Zadanie 1 (13p)**.** Niech $H=(V,E)$ będzie k-jednolitym hipergrafem, $k\geqslant 5$, o stopniu maksymalnym Δ, takim, że dowolne dwie krawędzie przecinają się w co najwyżej jednym wierzchołku. Udowodnij, że istnieje takie kolorowanie wierzchołkowe za pomocą $2\Delta^{1/(k-1)}$ kolorów, że żadna krawędź nie jest monochromatyczna.

Zadanie 2 (14p)**.** Niech $G=(A\cup B,E)$ będzie nieskończonym, lokalnie skończonym grafem dwudzielnym ($A,B\subseteq\mathbb{N}$). Udowodnij, że jeżeli dla każdego skończonego podzbioru $S\subseteq A$ zachodzi $|N(S)|\geqslant|S|$, to G ma skojarzenie z A do B.

Wskazówka: wykorzystaj twierdzenie Halla.

Zadanie 3 (13p)**.** Niech $\mathcal{R}$ będzie grafem Rada, a $U,W\subset V(\mathcal{R})$ będą skończonymi i rozłącznymi zbiorami oraz:

$$Z=\{v\in V(\mathcal{R})\colon U\subset N(v)\wedge W\cap N(v)=\emptyset\}$$

Udowodnij, że zbiór Z jest nieskończony, a graf indukowany przez Z jest izomorficzny z grafem Rada.

Zadanie 4 (10p)**.** Udowodnij, że jeżeli $p>>\frac{\ln^2 n}{n}$, to prawdopodobieństwo, że graf losowy zawiera wierzchołek stopnia k, zmierza do zera (przy $n\to\infty$).