

## TEORIA

**Definicje:** graf prosty; dopełnienie grafu; wierzchołek izolowany; zbiór sąsiadów; stopień wierzchołka; stopień minimalny i maksymalny; rząd i rozmiar grafu; graf pełny, cykl, ścieżka, graf dwudzielny pełny; izomorfizm grafów; digraf; multigraf; pseudograf; graf regularny; graf spójny; drzewo; graf dwudzielny; kratownica; odległość w grafie; średnica; promień; centrum

**Twierdzenia:** lemat o uściskach dłoni; tw. o sztywności kratownic;

## ZADANIA

1. Podaj parametry takie jak rząd, rozmiar, stopień maksymalny i minimalny dla następujących grafów:  $K_n$ ;  $K_{p,q}$ ;  $C_n$ ;  $P_n$ .
2. Znajdź parametry z zadania 1 dotyczące dowolnego grafu  $G$ , podaj ile wynoszą one dla  $\overline{G}$ .
3. Znajdź wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu, grafy o stopniu maksymalnym dwa.
4. Udowodnij lemat o uściskach dłoni. Czy jest on również prawdziwy dla multigrafów bez pętli?
5. Wykaż, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta. Czy analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe również dla multigrafów?
6. Wykaż, że w dowolnym grafie rzędu co najmniej 2 istnieją dwa wierzchołki tego samego stopnia. Czy analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe również dla multigrafów?
7. Mostem w grafie spójnym nazywamy taką krawędź, że jej usunięcie powoduje, że graf przestaje być spójny. Wykaż, że jeśli w grafie spójnym wszystkie wierzchołki są stopnia parzystego, to nie ma w nim mostu.
8. Udowodnij, że dowolny graf o sześciu wierzchołkach zawiera  $K_3$  lub  $\overline{K}_3$  jako podgraf indukowany.
9. Udowodnij, że jeśli  $\delta(G) \geq \frac{|G|-1}{2}$ , to  $G$  jest spójny.

10. Wskaż przykłady grafów rzędu 4 i 5 izomorficznych ze swoim dopełnieniem. Czy istnieje graf rzędu 6 o takiej własności?
11. Podaj ile wynosi promień, a ile średnica następujących grafów:  $K_n$ ;  $K_{p,q}$ ;  $C_n$ ;  $P_n$ .
12. Wykaż, że dla dowolnego grafu  $G$  prawdziwe są nierówności

$$\text{Rad}(G) \leq \text{Diam}(G) \leq 2\text{Rad}(G)$$

13. Wykaż, że dla dowolnego grafu spójnego  $G$  prawdziwa jest nierówność

$$\text{Rad}(G) \leq \frac{|G|}{2}$$