Teoria

Definicje: skojarzenie z X do Y; ścieżka powiększająca; pokrycie wierzchołkowe; zbiór niezależny; graf hamiltonowski
Twierdzenia: tw. Halla; tw. Berge'a (skojarzenie maks. gdy nie istnieje śc. powiększająca); algorytm znajdowania skojarzenia liczebniejszego; tw. Kőniga (maks. skojarzenie = min. pokrycie); tw. Kőniga - Egervary'ego (węgierskie); algorytm podziału pracy

Zadania

Uwaga: W poniższych zadaniach zakładamy, że $G = (X, Y; E)$ jest grafem dwudzielnym, dla którego $1 \leqslant |X| \leqslant |Y|$.

1. Wykaż, że G jest grafem dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli nieparzystych.
2. Wykaż, że hiperkostka jest grafem dwudzielnym.
3. Wykaż, że jeżeli $\delta(G) \geqslant \frac{|X|+1}{2}$, to G jest spójny. Czy powyższa implikacja jest również prawdziwa, jeżeli założymy jedynie, że $\delta(G) \geqslant \frac{|X|}{2}$?
4. Wykaż, że jeżeli dla każdego $x \in X$, $y \in Y$ mamy $d(x) + d(y) > |Y|$, to G jest spójny.
5. Wykaż, że jeżeli $\delta(G) \geqslant \frac{|X|}{2}$, to G ma skojarzenie z X do Y.
6. Wykaż, że w dowolnym grafie G zbiór $C \subset V(G)$ jest zbiorem pokrywającym wtedy i tylko wtedy, gdy $V(G) \setminus C$ jest zbiorem niezależnym.
7. Wykaż, że jeżeli $\delta(G) \geqslant \frac{|X|}{2}$, to
   (a) minimalny zbiór pokrywający w G ma $|X|$ wierzchołków,
   (b) maksymalny zbiór niezależny w G ma $|Y|$ wierzchołków.
8. Wykaż, że jeżeli G jest hamiltonowski, to $|X| = |Y|$.
9. Wykaż, że jeżeli G jest hamiltonowski, to ma pełne skojarzenie.

10. Wykaż, że jeżeli G jest spójny, to $\mathrm{Diam}(G) \leqslant 2|X|$ (podaj przykład, gdzie jest „=”).

11. Wykaż, że jeżeli G jest spójny, to $\mathrm{Rad}(G) \leqslant |X|$ (podaj przykład, gdzie jest „=”).

12. Ile może wynosić średnica a ile promień grafu G, gdy wiemy o nim jedynie tyle, że $\delta(G) \geqslant \frac{|X|+1}{2}$? Przedyskutuj wszystkie możliwości, dołączając stosowne przykłady.