Teoria

Definicje: macierz bistochastyczna i permutacyjna; kombinacja wypukła; system różnych reprezentantów
Twierdzenia: tw. Birkhoffa - von Neumanna (macierz bistochastyczna jest kombinacją wypukłą macierzy permutacyjnych - algorytm); tw. o monogamii; algorytm stabilnych małżeństw

Zadania

1. Scharakteryzuj dla jakich wartości p, q, r graf trójdzielny pełny $K_{p,q,r}$ ma skojarzenie pełne.

2. Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie rodziną zbiorów skończonych. Udowodnij, że dla rodziny $\mathcal{A}$ istnieje system różnych reprezentantów wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\forall_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geqslant |I|.$$

3. Czy dla poniższych rodzin zbiorów istnieją systemy różnych reprezentantów?
   - $\{1, 2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{6\}$
   - $\{1, 2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{6\}, \{2, 4, 6\}$
   - $\{1, 2, 5\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}$.

4. Wyznacz stabilny układ małżeństw dla poniższych zestawów preferencji.
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Zapisz poniższą macierz A jako kombinację wypukłą macierzy permutacyjnych.

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$