Teoria

Definicje: ciąg Fibonnaciego; równanie rekurencyjne jednorodne; pierwiastki wielokrotne RCh; równanie rekurencyjne niejednorodne; liczby Catalana
Twierdzenia: tw. o równaniu charakterystycznym; metoda przewidywań (funkcje liniowe i wykładnicze); wieże Hanoi

Zadania

1. Wyznacz równania rekurencyjne spełniane przez ciągi:
   (a) $a_n = An!$, $A \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 0$,
   (b) $b_n = (A + Bn)2^n$, $A, B \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 0$.

2. Rozwiąż rekurencje:
   (a) $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$, $n \geqslant 2$, $x_0 = 0, x_1 = 1$,
   (b) $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$, $n \geqslant 2$, $x_0 = 0, x_1 = 1$,
   (c) $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 4^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 = 0, x_1 = 1$,
   (d) $x_n = 2x_{n-1} + 1$, $n \geqslant 1$, $x_0 = 0$,
   (e) $x_{n+1} = x_n^2$, $n \geqslant 1$, $x_1 = 2$.

3. Niech c_n będzie n-tą liczbą Catalana zdefiniowaną następującą rekurencją:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i} \text{ dla } n > 0. \end{aligned}$$

   Uzasadnij, że liczba Catalana c_n jest równa:
   (a) liczbie różnych ukorzenionych, pełnych drzew binarnych o $n + 1$ liściach,
   (b) liczbie poprawnych nawiasowań wyrażenia $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$,
   (c) możliwych kombinacji uścisków dłoni wymienionych pomiędzy $2n$ osobami siedzącymi wokół okrągłego stołu tak, aby każdy uścisnął dłoń jednej osoby i żadna para rąk nie krzyżowała się z żadną inną,

(d) liczbie różnych "łańcuchów górskich" utworzonych przez n ruchów w górę "/" i n odpowiadających im ruchów w dół "\".

4. Na okręgu narysowano n punktów i wszystkie odcinki pomiędzy nimi. Na ile co najwyżej obszarów mogą one dzielić koło?

5. Pewien profesor wchodząc po schodach ma w zwyczaju wchodzić czasem po jednym stopniu, a czasem po dwa naraz. Niech p_n oznacza liczbę różnych sposobów wejścia na schody o n stopniach. Ułóż odpowiednią rekurencję i rozwiąż ją.

6. Niech c_n oznacza liczbę ładnych kolorowań płotu o n szczeblach przy pomocy farb zielonej, brązowej i żółtej. Kolorowanie uznajemy za ładne, gdy żadne dwa sąsiednie szczeble nie są żółte. Ułóż odpowiednią rekurencję i rozwiąż ją.

7. Niech a_n, dla $n = 1$, oznacza liczebność zbioru wszystkich liczb n-cyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4 i 5 w taki sposób, że bezpośrednio przed każdą z cyfr 3, 4 i 5 zawsze stoi cyfra 1. Ułóż odpowiednią rekurencję i rozwiąż ją.

8. Niech $s_n(k)$ będzie liczbą rozsadzeń $k \geqslant 2$ pacjentów w poczekalni, w której jest $n \geqslant 2k - 1$ różnych krzeseł ustawionych w rzędzie, tak aby żaden pacjent nie siedział bezpośrednio obok drugiego (nie rozróżniamy pacjentów). Ułóż odpowiednią rekurencję w zależności od parametru k.