

TEORIA

Definicje: funkcja tworząca; wykładnicza funkcja tworząca; uogólniony symbol Newtona; nieporządek;

Twierdzenia: wzór rekurencyjny liczby nieporządków; wzór jawny na liczby Catalana

ZADANIA

1. Znajdź funkcje tworzące następujących ciągów:

(a) $\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, 0, 0, \dots,$

(b) $1, 2, 3, 4, \dots,$

(c) $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots,$

(d) $\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \dots, \binom{k}{k}, 0, 0, \dots,$

(e) $0, 1, 4, 9, 16, \dots,$

2. Wiedząc, że $A(x)$ jest funkcją tworzącą ciągu a_n wyznacz funkcję tworzącą ciągów:

(a) $b_n = a_{n+k}$, dla pewnego $k \in \mathbb{N}$,

(b) $c_n = a_n + C$, dla pewnego $C \in \mathbb{R}$,

(c) $s_n = \sum_{i=0}^n a_i$.

3. Znajdź funkcję tworzącą ciągu $a_n = n^2 + n$, $n \geq 0$.

4. Rozwiąż równania rekurencyjne metodą funkcji tworzących:

(a) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$, $n \geq 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

(b) $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = n$, $n \geq 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

(c) $x_{n+2} + 8x_{n+1} - 9x_n = 8 \cdot 3^{n+1}$, $n \geq 0$, $x_0 = 2$, $x_1 = -6$,

5. Wiedząc, że liczba nieporządków zbioru n -elementowego wynosi

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n,$$

wyznacz funkcję tworzącą ciągu d_n .