Teoria

Definicje: konfiguracja kombinatoryczna (v, b, r, k, λ); konfiguracja symetryczna $(b = v)$; macierz konfiguracji; zbiór różnicowy
Twierdzenia: relacje pomiędzy parametrami konfiguracji; tw. Fishera $(b \geqslant v)$; konfiguracje z WOŁKów; konfiguracje ze zbiorów różnicowych

Zadania

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych v, b, r, k, λ, jeżeli $rv = bk$ i $r(k-1) = \lambda(v-1)$, to $\lambda\binom{v}{2} = b\binom{k}{2}$.

2. Niech X będzie zbiorem pól szachownicy 4×4. Dla każdego pola x definiujemy blok, jako zbiór pól atakowanych przez wieżę stojącą na polu x. Sprawdź, czy tak zdefiniowane podzbiory zbioru X tworzą konfigurację. Jeśli tak, to podaj jej parametry.

3. Znajdź warunki konieczne rozkładu K_n na trójkąty. Znajdź ten rozkład dla małych n i opisz otrzymane konfiguracje.

4. Rozłóż K_{13} na 13 grafów K_4.

5. Skonstruuj 3 WOŁKi rzędu 4, a następnie wykorzystaj je, do uzyskania odpowiedniej konfiguracji. Podaj jej parametry.

6. Udowodnij, że jeżeli k-elementowe podzbiory B_i, $i = 1, \ldots, b$ zbioru n-elementowego X tworzą konfigurację (n, b, r, k, λ), to ich dopełnienia $X \setminus B_i$, $i = 1, \ldots, b$ też tworzą konfigurację. Podaj jej parametry.

7. Sprawdź, czy następujące zbiory są zbiorami różnicowymi:

   - $B = \{0, 1, 4\}$ w $\mathbb{Z}_7$,
   - $B = \{0, 1, 3\}$ w $\mathbb{Z}_7$,
   - $B = \{0, 2, 3, 4, 8\}$ w $\mathbb{Z}_{11}$.

   Podaj macierze odpowiednich konfiguracji.

8. (*) Problem trójek Kirkmana. Codziennie 15 uczennic pewnej pensji odbywa spacer trójkami. Czy możliwe jest, aby przez tydzień każda z nich miala inne koleżanki w trójce?

9. Niech $\mathcal{B}$ będzie t-konfiguracją kombinatoryczną na zbiorze X o parametrach (v, k, r), tzn. każdy t-elementowy podzbiór zbioru v-elementowego X zawiera się w dokładnie r spośród k-elementowych zbiorów z $\mathcal{B}$. Dla $x \in X$ określamy: $\mathcal{B}_x = \{A \setminus \{x\} : A \in \mathcal{B} \wedge x \in A\}$. Pokazać, że $\mathcal{B}_x$ jest $(t-1)$-konfiguracją na zbiorze $X \setminus \{x\}$ o parametrach $(v-1, k-1, r)$.