Teoria

Definicje: skojarzenie; skojarzenie z X do Y; skojarzenie pełne; pokrycie wierzchołkowe; zbiór niezależny, hiperkostka
Twierdzenia: tw. Halla

Uwaga: W poniższych zadaniach zakładamy, że $G = (X, Y; E)$ jest grafem dwudzielnym, dla którego $1 \leq |X| \leq |Y|$.

A. Zadania na ćwiczenia

A1 Sprawdź, czy poniższe grafy są dwudzielne:

(a) cykl C_n,

(b) koło W_n, czyli graf powstały z cyklu C_n poprzez dodanie nowego wierzchołka i połączenie go z wszystkimi wierzchołkami cyklu C_n,

(c) graf C_n^2 powstały z cyklu C_n, $n \geq 4$, przez połączenie każdej pary wierzchołków w odległości 2 na cyklu C_n.

A2 Wykaż, że G jest grafem dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli nieparzystych.

A3 Podaj parametry hiperkostki Q_n: rząd, rozmiar, stopień maksymalny i minimalny. Wykaż, że hiperkostka jest grafem dwudzielnym.

A4 Wykaż, że jeżeli $\delta(G) \geq \frac{|X|}{2}$, to G ma skojarzenie z X do Y.

A5 Wykaż, że jeśli G jest grafem r-regularnym, to G ma skojarzenie pełne.

A6 Wykaż, że w dowolnym grafie G zbiór $C \subset V(G)$ jest zbiorem pokrywającym wtedy i tylko wtedy, gdy $V(G) \setminus C$ jest zbiorem niezależnym.

B. Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

B1 Wykaż, że jeżeli dla każdego $x \in X$, $y \in Y$ mamy $d(x) + d(y) > |Y|$, to G jest spójny.

B2 Wykaż, że jeżeli G jest spójny, to $\mathrm{diam}(G) \leq 2|X|$ (podaj przykład, gdzie jest „=”).

B3 Wykaż, że jeżeli G jest spójny, to $\mathrm{rad}(G) \leq |X|$ (podaj przykład, gdzie jest „=”).

C. Zadania do samodzielnej pracy

C1 Podaj parametry grafów z zadania A1. Wskaż skojarzenia maksymalne w tych grafach.

C2 Wykaż, że jeżeli $\delta(G) \geq \frac{|X|+1}{2}$, to G jest spójny. Czy twierdzenie jest prawdziwe gdy $\delta(G) \geq \frac{|X|}{2}$?

C3 Ile może wynosić średnica, a ile promień grafu G, gdy wiemy o nim jedynie tyle, że $\delta(G) \geq \frac{|X|+1}{2}$? Przedyskutuj wszystkie możliwości, dołączając stosowne przykłady.

C4 Scharakteryzuj, dla jakich wartości p, q, r graf trójdzielny pełny $K_{p,q,r}$ ma skojarzenie pełne.

C5 Niech $f(T_n)$, dla danego drzewa T_n rzędu $n \geq 2$, oznacza stosunek liczebności najliczniejszego skojarzenia w drzewie T_n do jego rzędu. Dla ustalonego n podaj największą oraz najmniejszą wartość funkcji $f(T_n)$ oraz przykłady drzew które realizują te ekstrema.