

## TEORIA

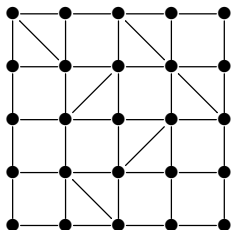
**Definicje:** graf prosty; dopełnienie grafu; wierzchołek izolowany; zbiór sąsiadów; stopień wierzchołka; stopień minimalny i maksymalny grafu; rząd i rozmiar grafu; graf pełny, cykl, ścieżka, graf dwudzielny pełny; izomorfizm grafów; multigraf; graf regularny; graf spójny; graf dwudzielny

**Twierdzenia:** lemat o uściskach dłoni; twierdzenie o sztywności kratownic

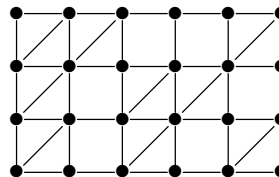
## A. ZADANIA NA ĆWICZENIA

- A1 Podaj parametry takie jak rząd, rozmiar, stopień maksymalny i minimalny dla następujących grafów:  $K_n$ ;  $K_{p,q}$ ;  $C_n$ ;  $P_n$ .
- A2 Znajdź parametry z zadania 1 dotyczące dowolnego grafu  $G$ , podaj ile wynoszą one dla  $\overline{G}$ .
- A3 Znajdź wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu, grafy o stopniu maksymalnym dwa.
- A4 Wskaż przykłady grafów rzędu 4 i 5 izomorficznych ze swoim dopełnieniem. Czy istnieje graf rzędu 6 o takiej własności?
- A5 Wykaż, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.
- A6 Wykaż, że w dowolnym grafie rzędu co najmniej 2 istnieją dwa wierzchołki tego samego stopnia.
- A7 Zbadaj sztywność kratownic. Jeśli kratownica jest sztywna, podaj ile maksymalnie krzyżulców można usunąć, aby kratownica pozostała sztywna.

a)



b)



## B. ZADANIA NA ĆWICZENIA - JEŚLI CZAS POZWOLI

- B1 Czy lemat o uściskach dłoni jest prawdziwy również dla multigrafów bez pętli?
- B2 Czy twierdzenia z zadań A5 i A6 są prawdziwe również dla multigrafów?
- B3 Udowodnij, że każdy graf o stopniu minimalnym  $\delta$  zawiera ścieżkę długości  $\delta$ .
- B4 Graf  $G$  zdefiniowany jest poprzez macierz sąsiedztwa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podaj rząd, stopnie wierzchołków oraz rozmiar grafu  $G$ . Narysuj ten graf.

## C. ZADANIA DO SAMODZIELNEJ PRACY

- C1 Podaj warunek konieczny na to, aby graf rzędu  $n$  był izomorficzny ze swoim dopełnieniem.
- C2 Znajdź wszystkie nieizomorficzne grafy rzędu 4. Pośród nich wskaż pary: graf i jego dopełnienie.
- C3 Czy istnieje graf 3-regularny rzędu 7?
- C4 Podaj przykład dwóch nieizomorficznych grafów  $G$  i  $H$  o takich samych stopniach wierzchołków, tj. spełniających:  $V(G) = V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$  oraz  $d_G(v_i) = d_H(v_i)$  dla każdego  $i = 1, \dots, n$ .