## Teoria

**Definicje:** graf prosty; dopełnienie grafu; wierzchołek izolowany; zbiór sąsiadów; stopień wierzchołka; stopień minimalny i maksymalny grafu; rząd i rozmiar grafu; graf pełny, cykl, ścieżka, graf dwudzielny pełny; izomorfizm grafów; multigraf; graf regularny; graf spójny; graf dwudzielny
**Twierdzenia:** lemat o uściskach dłoni; twierdzenie o sztywności kratownic

## A. Zadania na ćwiczenia

A1 Podaj parametry takie jak rząd, rozmiar, stopień maksymalny i minimalny dla następujących grafów: $K_n$; $K_{p,q}$; $C_n$; $P_n$.

A2 Znając parametry z zadania 1 dotyczące dowolnego grafu $G$, podaj ile wynoszą one dla $\overline{G}$.

A3 Znajdź wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu, grafy o stopniu maksymalnym dwa.

A4 Wskaż przykłady grafów rzędu 4 i 5 izomorficznych ze swoim dopełnieniem. Czy istnieje graf rzędu 6 o takiej własności?

A5 Wykaż, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

A6 Wykaż, że w dowolnym grafie rzędu co najmniej 2 istnieją dwa wierzchołki tego samego stopnia.

## B. Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

B1 Czy lemat o uściskach dłoni jest prawdziwy również dla multigrafów bez pętli?

B2 Czy twierdzenia z zadań A5 i A6 są prawdziwe również dla multigrafów?

B3 Udowodnij, że każdy graf o stopniu minimalnym $\delta$ zawiera ścieżkę długości $\delta$.

B4 Graf $G$ zdefiniowany jest poprzez macierz sąsiedztwa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podaj rząd, stopnie wierzchołków oraz rozmiar grafu $G$. Narysuj ten graf.

## C. Zadania do samodzielnej pracy

C1 Podaj warunek konieczny na to, aby graf rzędu $n$ był izomorficzny ze swoim dopełnieniem.

C2 Znajdź wszystkie nieizomorficzne grafy rzędu 4. Pośród nich wskaż pary: graf i jego dopełnienie.

C3 Czy istnieje graf 3-regularny rzędu 7?

C4 Podaj przykład dwóch nieizomorficznych grafów $G$ i $H$ o takich samych stopniach wierzchołków, tj. spełniających: $V(G) = V(H) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ oraz $d_G(v_i) = d_H(v_i)$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$.