

## TEORIA

**Definicje:** funkcja tworząca

**Twierdzenia:** uogólniony symbol Newtona; szeregi potęgowe znanych funkcji

## A. ZADANIA NA ĆWICZENIA

A1 Znajdź funkcje tworzące następujących ciągów:

(a)  $\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, 0, 0, \dots,$

(b)  $1, 2, 3, 4, \dots,$

(c)  $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots,$

A2 Wiedząc, że  $A(x)$  jest funkcją tworzącą ciągu  $a_n$  wyznacz funkcję tworzącą ciągów:

(a)  $b_n = a_{n+k}$ , dla pewnego  $k \in \mathbb{N}$ ,

(b)  $c_n = a_n + C$ , dla pewnego  $C \in \mathbb{R}$ ,

A3 Rozwiąż równania rekurencyjne metodą funkcji tworzących:

(a)  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ ,  $n \geq 0$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,

(b)  $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = n$ ,  $n \geq 0$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,

## B. ZADANIA NA ĆWICZENIA - JEŚLI CZAS POZWOLI

B1 Znajdź funkcję tworzącą ciągu  $a_n = n^2 + n$ ,  $n \geq 0$ .

## C. ZADANIA DO SAMODZIELNEJ PRACY

C1 Znajdź funkcje tworzące następujących ciągów:

(a)  $\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \dots, \binom{k}{k}, 0, 0, \dots,$

(b)  $0, 1, 4, 9, 16, \dots,$

C2 Wiedząc, że  $A(x)$  jest funkcją tworzącą ciągu  $a_n$  wyznacz funkcję tworzącą ciągów:

(a)  $b_n = 3a_{n+2} + 1$ , jeżeli  $a_0 = 0, a_1 = 1$ ,

(b)  $c_n = \begin{cases} a_n + 1, & n = 2 \\ a_n, & n \neq 2 \end{cases}$ ,

(c)  $s_n = \sum_{i=0}^n a_i$ .

C3 Rozwiąż równania rekurencyjne metodą funkcji tworzących:

(a)  $a_{n+2} + 8a_{n+1} - 9a_n = 8 \cdot 3^{n+1}, n \geq 0, a_0 = 2, a_1 = -6.$