Teoria

Definicje: równanie rekurencyjne jednorodne; równanie rekurencyjne niejednorodne;
Twierdzenia: tw. o równaniu charakterystycznym; metoda przewidywań (funkcje wielomianowe i wykładnicze);

A. Zadania na ćwiczenia

A1 Ułóż równania rekurencyjne spełniane przez ciągi:

(a) $a_n = An!$, $A \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$,

(b) $b_n = (A + Bn)2^n$, $A, B \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$.

A2 Rozwiąż równania rekurencyjne:

(a) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 0, a_1 = 1$,

(b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 0, a_1 = 1$,

(c) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4^n$, $n \geq 2$, $a_0 = 0, a_1 = 1$,

(d) $a_n = 3a_{n-1} + 2n$, $n \geq 1$, $a_0 = 0$.

A3 Na ile co najwyżej obszarów może dzielić płaszczyznę n prostych?

A4 Niech c_n oznacza liczbę ładnych kolorowań płotu o n szczeblach przy pomocy farb zielonej, brązowej i żółtej. Kolorowanie uznajemy za ładne, gdy żadne dwa sąsiednie szczeble nie są żółte. Ułóż odpowiednią rekurencję i rozwiąż ją.

A5 Niech a_n, dla $n = 1$, oznacza liczbę sposobów, na które można zapełnić planszę o wymiarach 3×n za pomocą klocków o wymiarach 1×3 i 2×3 (klocki można obracać). Ułóż odpowiednią rekurencję i rozwiąż ją.

B. Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

B1 Rozwiąż równania rekurencyjne:

(a) $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} + 7 \cdot 6^n$, $n \geq 2$, $a_0 = 7, a_1 = 15$.

(b) $a_{n+1} = a_n^2$, $n \geq 1$, $a_1 = 2$.

(c) $a_{n+1} = a_n^2 \cdot a_{n-1}^3$, $n \geq 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

B2 Niech c_n będzie n-tą liczbą Catalana zdefiniowaną następującą rekurencją:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i} \text{ dla } n > 0. \end{aligned}$$

Uzasadnij, że liczba Catalana c_n jest równa:

(a) liczbie różnych ukorzenionych, pełnych drzew binarnych o $n+1$ liściach,

(b) liczbie poprawnych nawiasowań wyrażenia $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$,

(c) możliwych kombinacji uścisków dłoni wymienionych pomiędzy $2n$ osobami siedzącymi wokół okrągłego stołu tak, aby każdy uścisnął dłoń jednej osoby i żadna para rąk nie krzyżowała się z żadną inną,

(d) liczbie różnych "łańcuchów górskich" utworzonych przez n ruchów w górę "/" i n odpowiadających im ruchów w dół "\".

B3 Na okręgu narysowano n punktów i wszystkie odcinki pomiędzy nimi. Na ile co najwyżej obszarów mogą one dzielić koło?

B4 Niech $s_n(k)$ będzie liczbą rozsadzeń $k \geq 2$ pacjentów w poczekalni, w której jest $n \geq 2k-1$ różnych krzeseł ustawionych w rzędzie, tak aby żaden pacjent nie siedział bezpośrednio obok drugiego (nie rozróżniamy pacjentów). Ułóż odpowiednią rekurencję w zależności od parametru k.

C. Zadania do samodzielnej pracy

C1 Rozwiąż równania rekurencyjne:

(a) $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 0, a_1 = 4$,

(b) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2n - 6$, $n \geq 2$, $a_0 = 3, a_1 = 4$,

(c) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 16n + 8$, $n \geq 2$, $a_0 = 4, a_1 = 1$,

C2 Pewien profesor wchodząc po schodach ma w zwyczaju wchodzić czasem po jednym stopniu, a czasem po dwa naraz. Niech p_n oznacza liczbę różnych sposobów wejścia na schody o n stopniach. Ułóż odpowiednią rekurencję i rozwiąż ją.

C3 Niech a_n, dla $n = 1$, oznacza liczebność zbioru wszystkich liczb n-cyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4 i 5 w taki sposób, że bezpośrednio przed każdą z cyfr 3, 4 i 5 zawsze stoi cyfra 1. Ułóż odpowiednią rekurencję i rozwiąż ją.

C4 Ułóż zależności rekurencyjne dla ciągów opisanych w następujący sposób:

(a) Niech b_n oznacza liczbę kodów kreskowych grubości n, które składają się z naprzemiennych czarnych i białych pasków grubości 1 lub 2, ponadto zaczynają się i kończą czarnym paskiem.

(b) Niech c_n oznacza liczbę sposobów uzupełnienia szachownicy o wymiarach $2 \times n$ za pomocą klocków o wymiarach 1×2 oraz w kształcie "L" (klocek o wymiarach 1×3 z doklejonym klockiem o wymiarach 1×1). Klocki można dowolnie obracać.