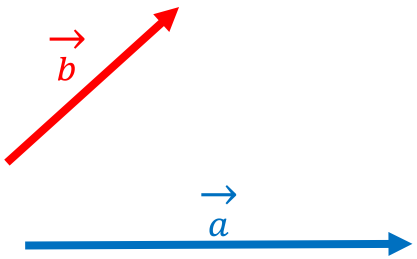
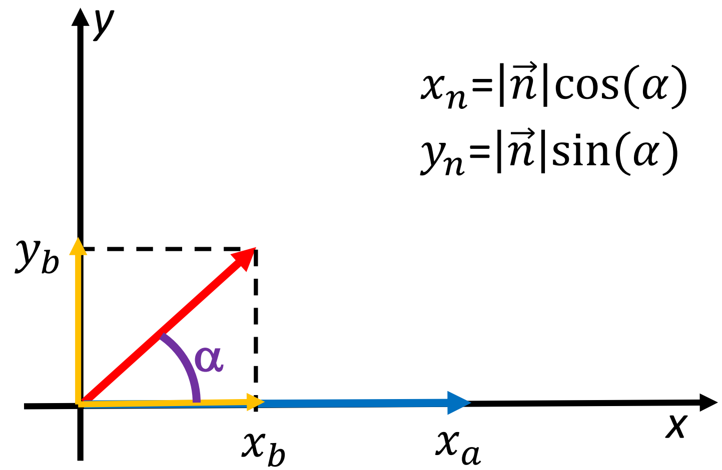
# FIZYKA I
# Wykład II

# Rachunek wektorowy (I)



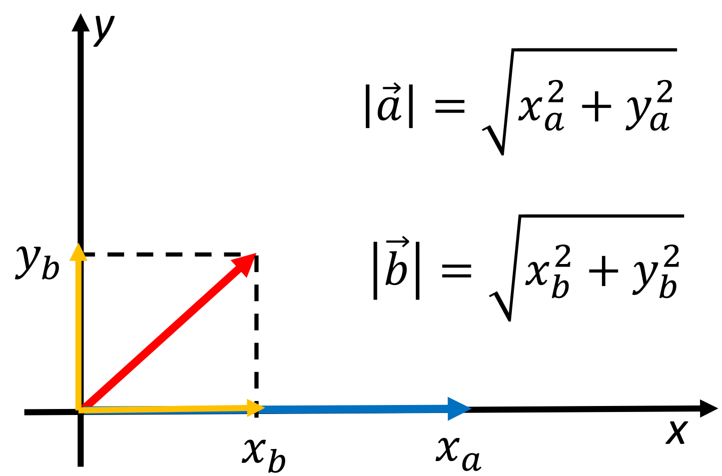

$$\vec{a} = [x_a, y_a]$$
$$\vec{b} = [x_b, y_b]$$

***Składowe wektora***




$$x_n = |\vec{n}|\cos(\alpha)$$
$$y_n = |\vec{n}|\sin(\alpha)$$

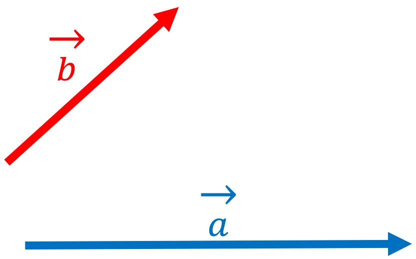
***Długość wektora***




$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2}$$

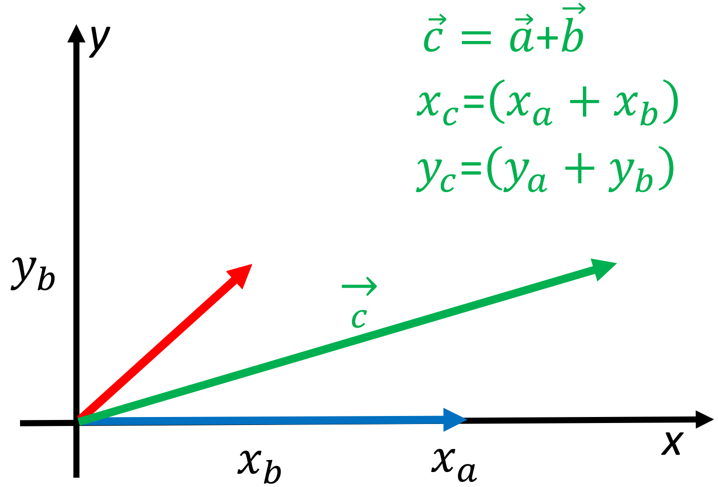
# Rachunek wektorowy (II)




$\vec{a} = [x_a, y_a]$

$\vec{b} = [x_b, y_b]$

## *Suma wektorów*

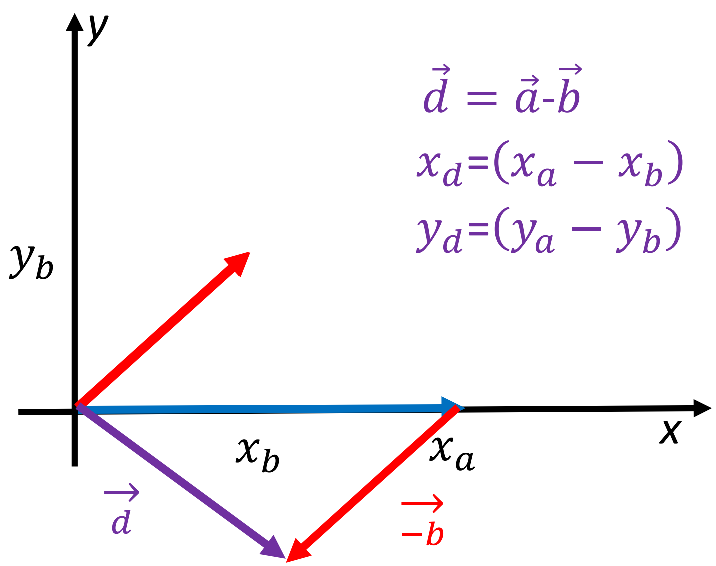



$\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$

$x_c=(x_a + x_b)$

$y_c=(y_a + y_b)$

## *Różnica wektorów*



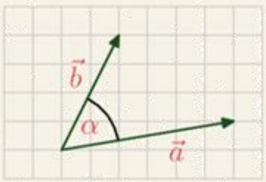

$\vec{d} = \vec{a}-\vec{b}$

$x_d=(x_a - x_b)$

$y_d=(y_a - y_b)$

# Rachunek wektorowy (III)

## *Iloczyn skalarny wektorów*




Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ można wyliczyć znając długości wektorów $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$ oraz kąt $\alpha$ zawarty między wektorami.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ można wyliczyć też znając współrzędne $[a_1, a_2]$ i $[b_1, b_2]$ wektorów.

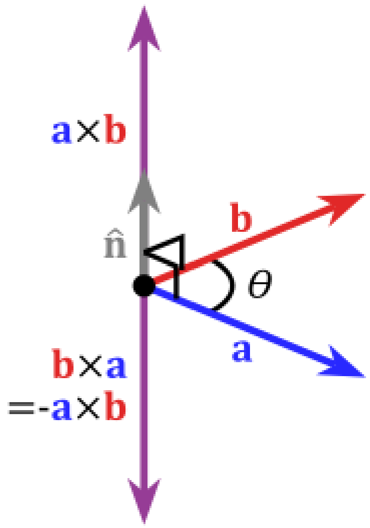
$$\vec{a} \circ \vec{b} = [a_1, a_2] \circ [b_1, b_2] = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Jeżeli iloczyn skalarny wektorów jest równy $0$, to te wektory są prostopadłe. $(\cos 90^\circ = 0)$

- $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$ (przemienność)
- $(\alpha \bullet \mathbf{a}) \circ \mathbf{b} = \alpha \bullet (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})$ (łączność)
- $(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} = (\mathbf{a} \circ \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \circ \mathbf{c})$ (rozdzielność)
- $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} \geq 0$; $\mathbf{a} \circ \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$

## *Iloczyn wektorowy wektorów*




$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b_1, b_2, b_3).$$

$$\boxed{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\theta}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \\ &= a_1\mathbf{i} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_3\mathbf{k} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \\ &= (a_1\mathbf{i} \times b_1\mathbf{i}) + (a_1\mathbf{i} \times b_2\mathbf{j}) + (a_1\mathbf{i} \times b_3\mathbf{k}) + (a_2\mathbf{j} \times b_1\mathbf{i}) + (a_2\mathbf{j} \times b_2\mathbf{j}) + \\ &\quad + (a_2\mathbf{j} \times b_3\mathbf{k}) + (a_3\mathbf{k} \times b_1\mathbf{i}) + (a_3\mathbf{k} \times b_2\mathbf{j}) + (a_3\mathbf{k} \times b_3\mathbf{k}),\end{aligned}$$

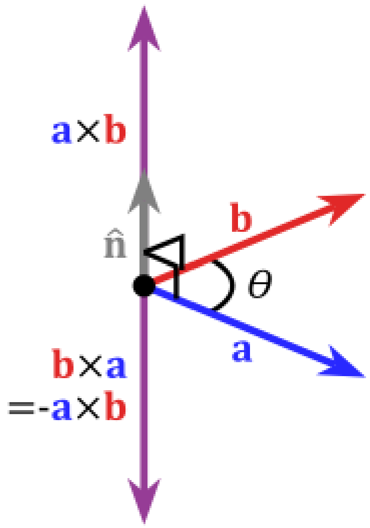
$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} = {} & a_1b_1(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_1b_3(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + a_2b_1(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_2b_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + \\ & + a_2b_3(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + a_3b_1(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_3b_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_3b_3(\mathbf{k} \times \mathbf{k}),\end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1b_1\mathbf{0} + a_1b_2\mathbf{k} + a_1b_3(-\mathbf{j}) + a_2b_1(-\mathbf{k}) + a_2b_2\mathbf{0} + a_2b_3\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} + a_3b_2(-\mathbf{i}) + a_3b_3\mathbf{0},$$

$$\boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).}$$

# Rachunek wektorowy (V)

## *Iloczyn wektorowy wektorów*



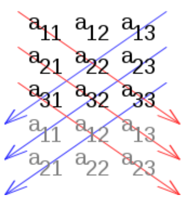

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1\,, a_2\,, a_3)$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b_1\,, b_2\,, b_3).$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Reguła Sarrusa

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1 b_2 \mathbf{k} + a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} - a_3 b_2 \mathbf{i} - a_1 b_3 \mathbf{j} - a_2 b_1 \mathbf{k}$$




Rozwinięcie Laplace’a

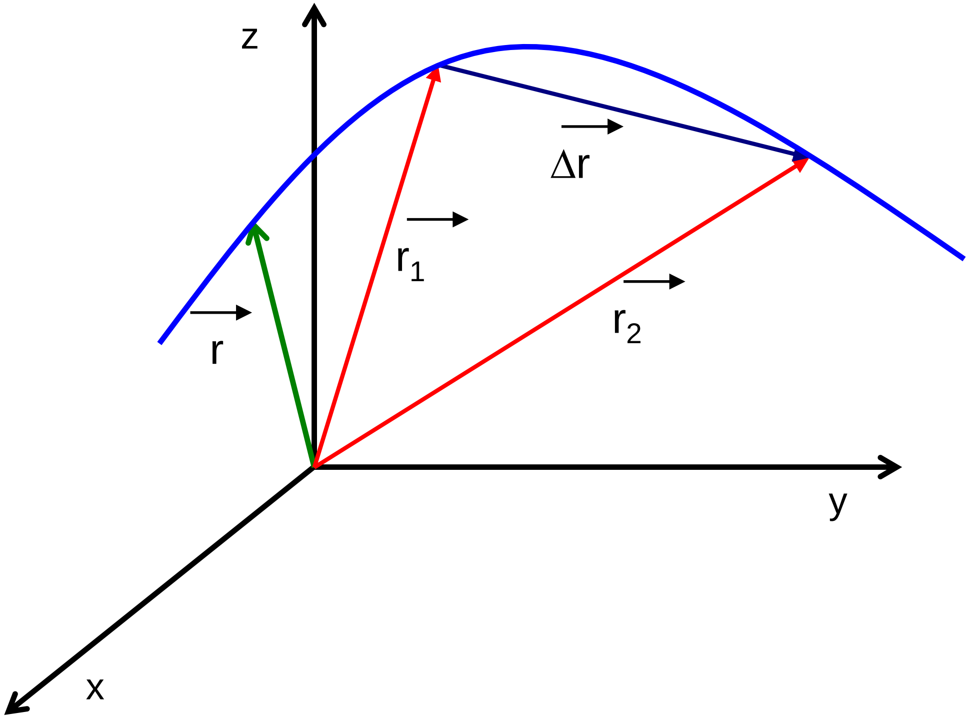
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

**Punkt materialny** (masa punktowa) to ciało fizyczne obdarzone masą, ale mające tak małe rozmiary, że w opisie matematycznym można je potraktować jak punkt geometryczny.

Punktem materialnym może być:
- kamień rzucony pod pewnym kątem do powierzchni Ziemi, jego rozmiary są nieistotne w porównaniu z odległością jaką przebędzie i dokładnością pomiarów
- statek na morzu, jego rozmiary są nieistotne w porównaniu z rozmiarami morza
- Ziemia poruszająca się po orbicie wokół Słońca, jej wymiary są nieistotne w porównaniu z promieniem orbity.

Redukcja ciała do punktu materialnego ma istotne znaczenie dla prostoty opisu ruchu danego ciała. Masa punktowa w fizyce to idealizacja ciała lub układu ciał, w której wymiary układu można pominąć w porównaniu z odległościami, które pokonuje. Wtedy można przyjąć, że cała masa układa jest skupiona w środku masy układu. W przypadku jednorodnego ciała kulistego, masa punktowa jest nie tylko idealizacją, ponieważ takie ciała zachowuje się tak jak masa punktowa

## Kinematyka punktu materialnego:




1. Położenie:

$$\boxed{\vec{r} = (x\ y, z\ )}$$

2. Opis ruchu:

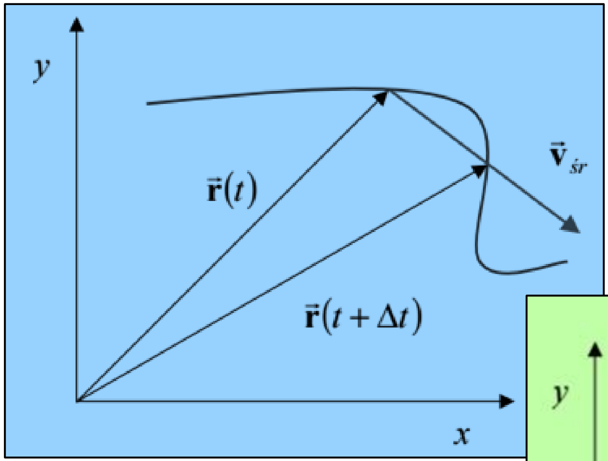
$$\boxed{\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z\ (t)\big)}$$

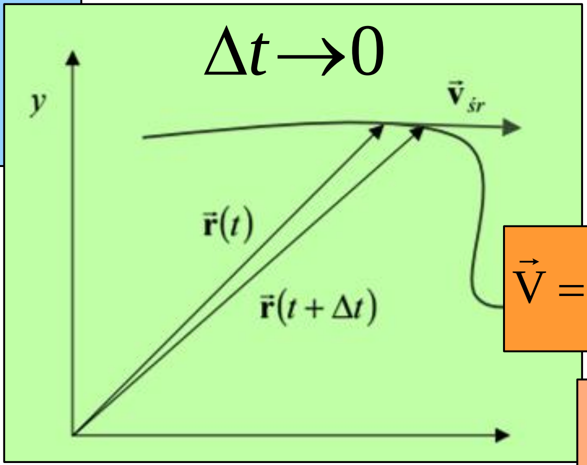
3. Tor ruchu:

$$\boxed{\{\vec{r}(t), t \in \langle t_2, t_1 \rangle\}}$$

**Prędkość średnia:**

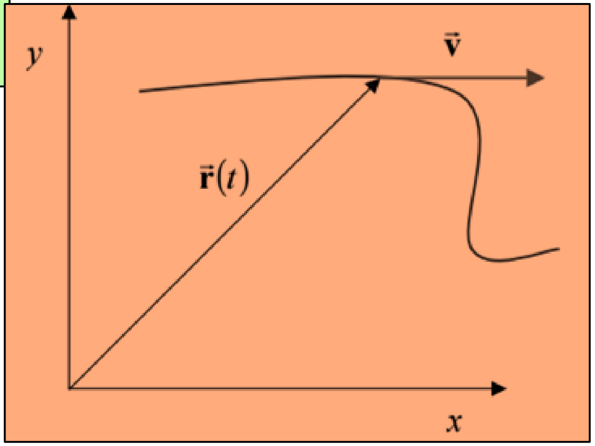
$$\vec{V}_{sr} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$




**Prędkość chwilowa:**

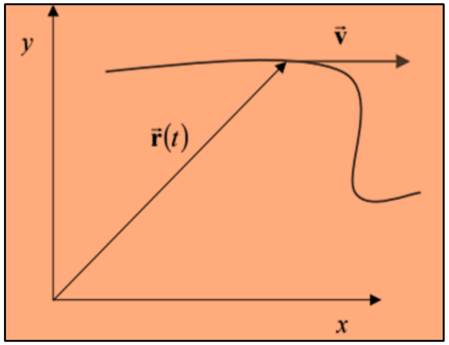
$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$




Prędkość to pochodna wektora wodzącego **r**(t) po czasie;
Pochodna wektora, to suma iloczynów pochodnych jego współrzędnych przez odpowiednie wersory;

## Prędkość chwilowa:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$




**Ruch jest jednostajny jeśli wektor prędkości nie zmienia się w czasie:**

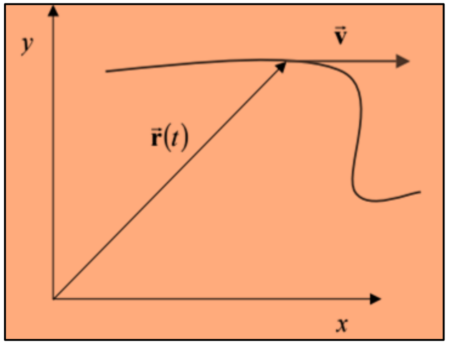
$$\vec{V}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \mathrm{const}(t) = \vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(\Delta t) - \vec{r}(0)}{\Delta t} \Rightarrow \vec{r}(\Delta t) = \vec{r}(0) + \vec{V} \cdot \Delta t$$

$$x(t) = x(0) + V_x t, \quad y(t) = y(0) + V_y t, \quad z(t) = z(0) + V_z t$$

**Prędkość chwilowa:**

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$




**Przyspieszenie** to pochodna wektora prędkości **V**(t) po czasie (szybkość zmiany wektora prędkości)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \hat{x}\frac{dV_x}{dt} + \hat{y}\frac{dV_y}{dt} + \hat{z}\frac{dV_z}{dt} =$$

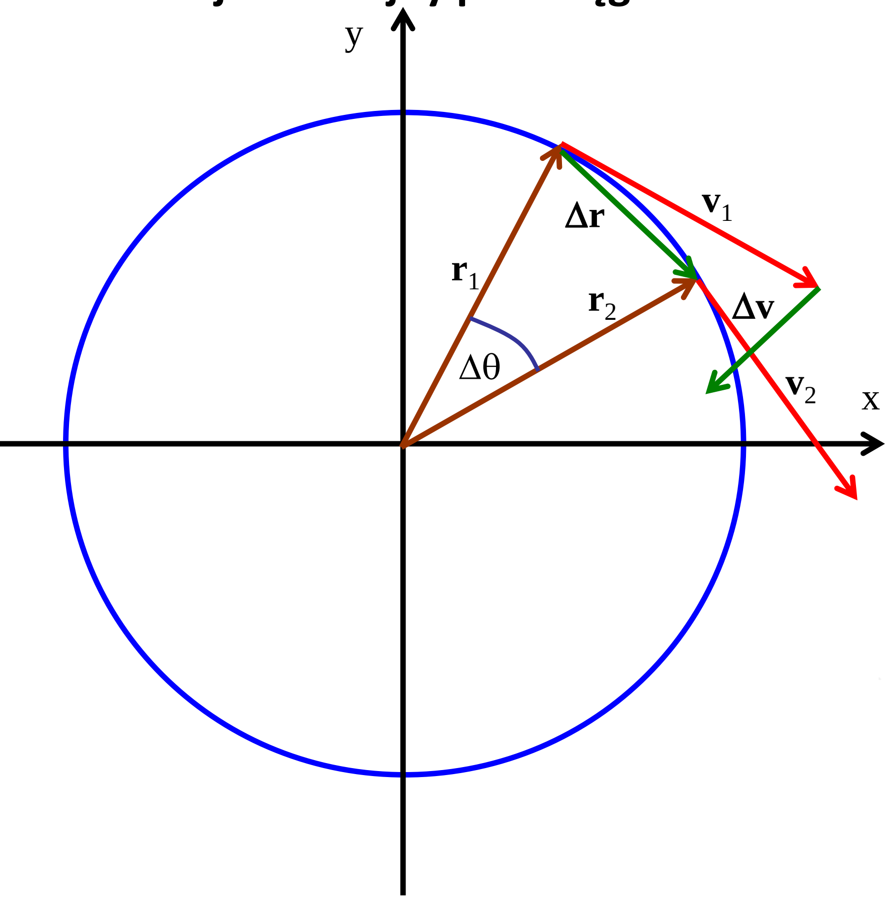
$$= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \hat{x}\frac{d^2x}{dt^2} + \hat{y}\frac{d^2y}{dt^2} + \hat{z}\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}(0) + \vec{V}(0)t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\right) = \vec{V}(0) + \vec{a}t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{V}(0)t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

# Mechanika: kinematyka (VI)

## Ruch jednostajny po okręgu




$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r$$

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta r}{r} \Rightarrow \Delta r = r \cdot \Delta\theta$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$\vec{r}(t) = r \cdot \cos\omega t\, \hat{x} + r \cdot \sin\omega t \cdot \hat{y} \quad , \quad \omega t = \theta$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}(t)\right) = -r\omega \sin\omega t \cdot \hat{x} + r\omega \cos\omega t \cdot \hat{y}$$

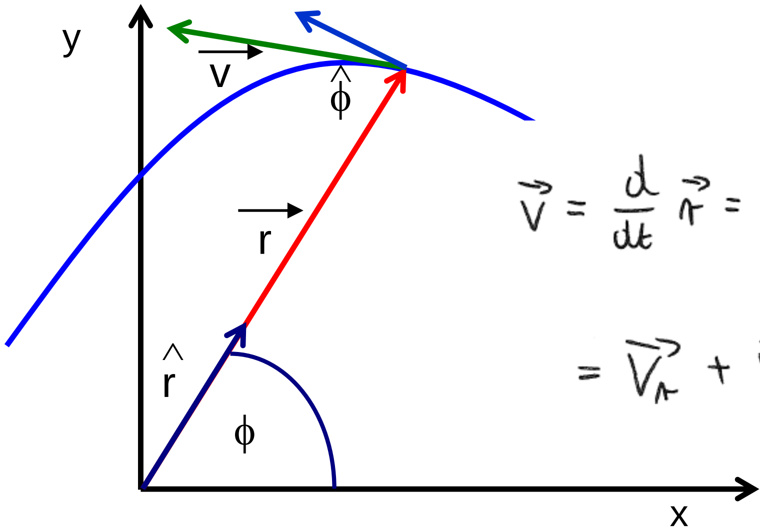
$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}(t)\right) = -r\omega^2 \cos\omega t\, \hat{x} - r\omega^2 \sin\omega t\, \hat{y} =$$

$$= -\omega^2 \left(r \cos\omega t\, \hat{x} + r \sin\omega t \cdot \hat{y}\right) = -\omega^2 \vec{r}$$

$$a = \omega^2 \cdot r$$

# Mechanika: kinematyka (VI)

## Ruch krzywoliniowy w biegunowym układzie odniesienia:




$$\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}(r\cdot\hat{r}) = r\frac{d}{dt}\hat{r} + \hat{r}\frac{d}{dt}r = \hat{\varphi}\, r\frac{d}{dt}\varphi + \hat{r}\frac{d}{dt}r =$$

$$= \vec{V_r} + \vec{V_\varphi}$$

$$\boxed{v_r = \frac{dr}{dt}}$$

**Prędkość radialna**

$$\boxed{v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega}$$

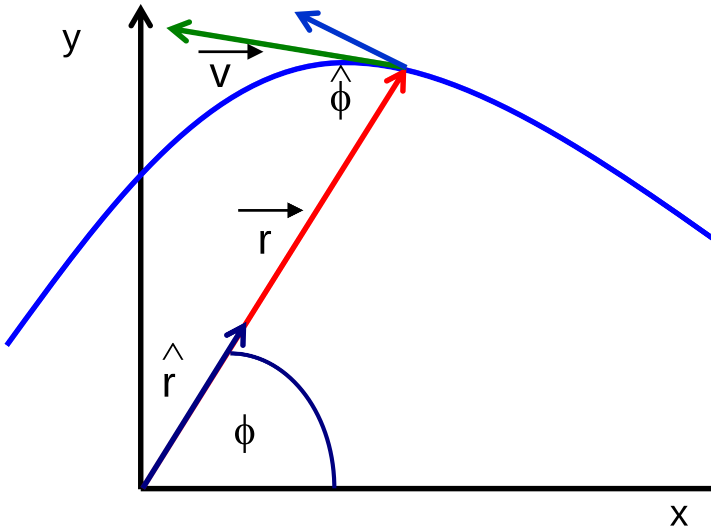
**Prędkość transwersalna**

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$$

**Prędkość kątowa**

# Mechanika: kinematyka (VII)

## Ruch krzywoliniowy w biegunowym układzie odniesienia:




$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\hat{r}\frac{dr}{dt} + \hat{\varphi}\, r\frac{d\varphi}{dt}\right) =$$

$$= \hat{r}\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{d\hat{r}}{dt}\frac{dr}{dt} + \hat{\varphi}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \hat{\varphi}\, r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\hat{\varphi}}{dt}\, r\frac{d\varphi}{dt} =$$

$$= \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left[r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right]\hat{\varphi} =$$

$$= \vec{a_r} + \vec{a_\varphi}$$

**Przyspieszenie radialne**

$$a_r = \frac{d^2}{dt^2}r - r\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \boxed{\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{r}} - \boxed{\mathrm{r}\omega^2}$$

**Przyspieszenie liniowe**

**Przyspieszenie dośrodkowe**

**Przyspieszenie transwersalne**

$$a_\varphi = r\frac{d^2}{dt^2}\varphi + \boxed{2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}} = r\frac{d\omega}{dt} + 2\frac{dr}{dt}\omega = r\varepsilon + 2\frac{dr}{dt}\omega$$

**Przyspieszenie Coriolisa**

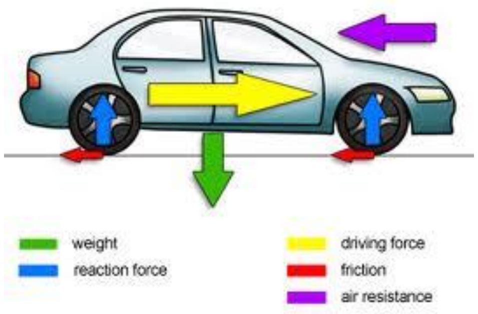
**Przyspieszenie kątowe**

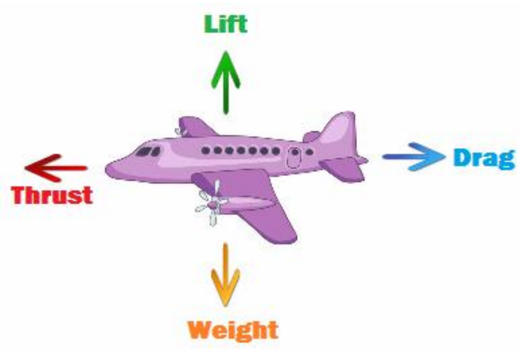
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

**Siła**: miara wielkości oddziaływania (wartość, kierunek i zwrot, punkt przyłożenia)

**Wypadkowa sił**: $F_w = \sum_{i=1}^{n} F_i$

**Siły równoważące**: ten sam kierunek i zwrot, ta sama wartość, ten sam punkt przyłożenia



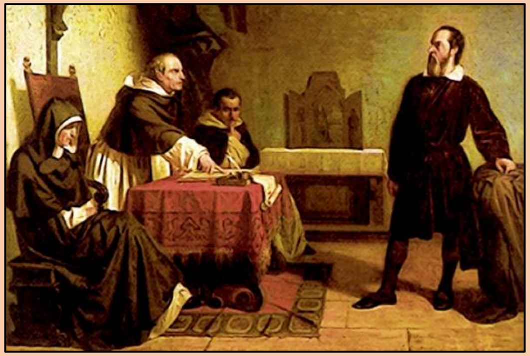
# Zasady dynamiki Newtona

**W inercjalnym układzie odniesienia, jeśli na ciało nie działa żadna siła lub siły działające równoważą się, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.**

**W inercjalnym układzie odniesienia jeśli siły działające na ciało nie równoważą się (czyli wypadkowa sił jest różna od zera), to ciało porusza się z przyspieszeniem wprost proporcjonalnym do siły wypadkowej, a odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.**

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\overrightarrow{F_w}$$

**Oddziaływania ciał są zawsze wzajemne. W inercjalnym układzie odniesienia siły wzajemnego oddziaływania dwóch ciał mają takie same wartości, taki sam kierunek, przeciwne zwroty i różne punkty przyłożenia (każda działa na inne ciało).**



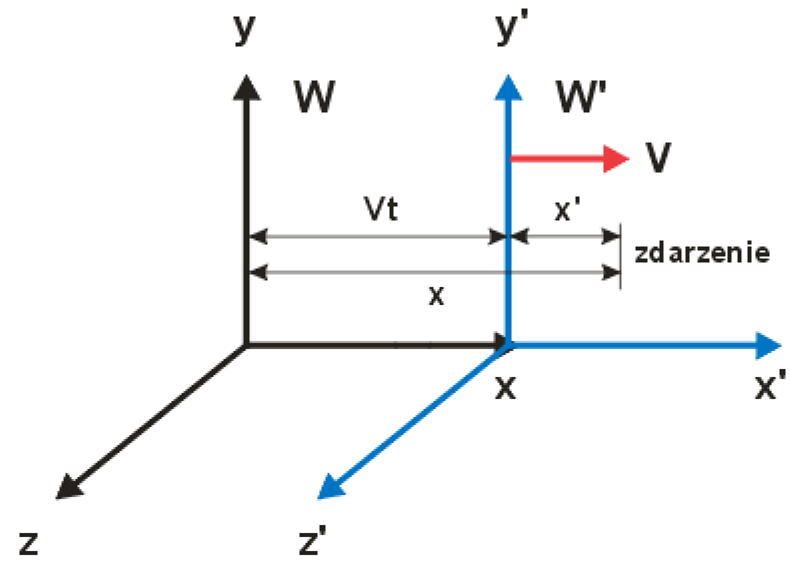
**Galileusz** (1564-1642) – włoski astronom, astrolog, matematyk, fizyk i filozof, prekursor nowożytnej fizyki, udoskonalił tzw. „kompas geometryczny i wojskowy”, wykonał eksperyment dowodzący, że czas trwania spadku swobodnego nie zależy od masy ciała, badał staczanie się kul po równi pochyłej, skonstruował termometr.

**Zasada względności Galileusza**: prawa mechaniki są jednakowe we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

## Transformacje Galileusza

$$\vec{v}_{trans} = (0{,}0, v_z), v_z = const, \vec{\omega} = 0$$

$$x = x' + v_z t, y = y', z = z'$$

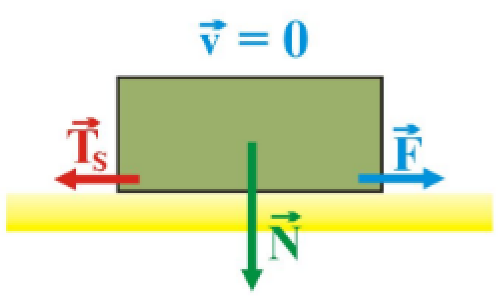



$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v_z = v' + v_z}$$

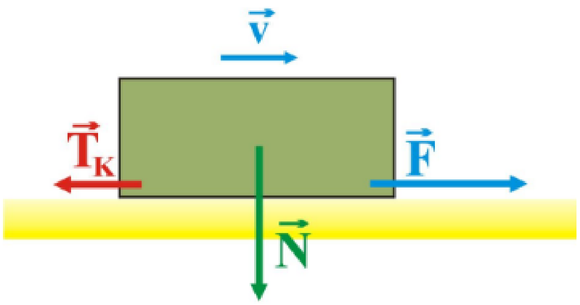
$$\boxed{ma' = m\frac{d^2}{dt^2}x' = m\frac{d^2}{dt^2}(x + v_z t) = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - v_z\right) = m\frac{d^2}{dt^2}x}$$

## Prawa tarcia Coulomba i Morena

1. Siła tarcia jest niezależna od wielkości powierzchni stykających się ze sobą ciał i zależy jedynie od ich rodzaju.
2. Wartość siły tarcia dla ciała znajdującego się w spoczynku może zmienić się od zera do granicznej wartości, proporcjonalnej do całkowitego nacisku normalnego.
3. W przypadku, gdy ciało ślizga się po pewnej powierzchni, siła tarcia jest zawsze skierowana przeciwnie do kierunku ruchu i jest mniejsza od granicznej wartości.




$$T = T_s = \mu_s N$$




$$T = T_k = \mu_k N$$

# Siły oporu

## Opory toczenia

$$F_t = Q \cdot f_t = q \cdot \frac{e}{R}$$

- stan i rodzaj nawierzchni (opór jest mniejszy na asfalcie niż na drodze gruntowej)
- konstrukcja ogumienia (większe opory toczenia występują dla opon o konstrukcji diagonalnej niż dla opon radialnych)
- ciśnienie (wraz ze wzrostem ciśnienia w ogumieniu opór toczenia maleje)

$$F_m = b \cdot v^n$$

- opór w łożyskach,
- opór zbieżności kół (związany z nierównoległym ustawieniem kół w stosunku do osi podłużnej pojazdu),
- opór skrętu kół (zależny od prędkości pojazdu i promienia skrętu),
- opór związany z odkształceniem się opony na nierównościach, opór na mokrej nawierzchni.

## Opór aerodynamiczny

$$F_a = \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 \cdot A \cdot C_x$$

A - powierzchnia czołowa pojazdu czyli 0,8 - 0,9 iloczynu szerokości i wysokości pojazdu
$C_x$ - współczynnik oporu aerodynamicznego
q - gęstość powietrza (1,293 kg/m3 w T= 273 K i P=0,1 MPa)

$$F_a = 0{,}047 \cdot v^2 \cdot A \cdot C_x$$

- opory profilowe (związane z kształtem w przekroju wzdłużnym) ok. 60% całkowitego oporu
- opory indukcyjne (związane z kształtem powierzchni bocznej) ok. 8% całkowitego oporu
- opory tarcia ok. 10% całkowitego oporu
- opory zakłóceń (czyli wszelkie nierówności karoserii) ok. 12 % całkowitego oporu
- opory układu chłodzenia i wentylacji ok. 10 % całkowitego oporu

$$F_o = \sum_{i=1}^{n} D_i \cdot v^i$$

## Siły oporu – prędkość graniczna w spadku swobodnym

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

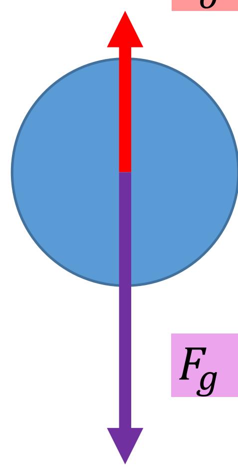
$$v_0 = 0;\ a = g; s = h$$

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$g = \frac{v_k}{t}$$

$$\boxed{v_k = \sqrt{2gh}}$$



$$F_o = k \cdot v^2$$

$$F_g = m \cdot g$$

$$F_g = F_o$$

$$k v_g^2 = mg$$

$$\boxed{v_g = \sqrt{\frac{mg}{k}}}$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{\rho \cdot A \cdot C_x}}$$

## Siły oporu – prędkość graniczna w spadku swobodnym

## Pęd (ruch ciał ze zmienną masą)

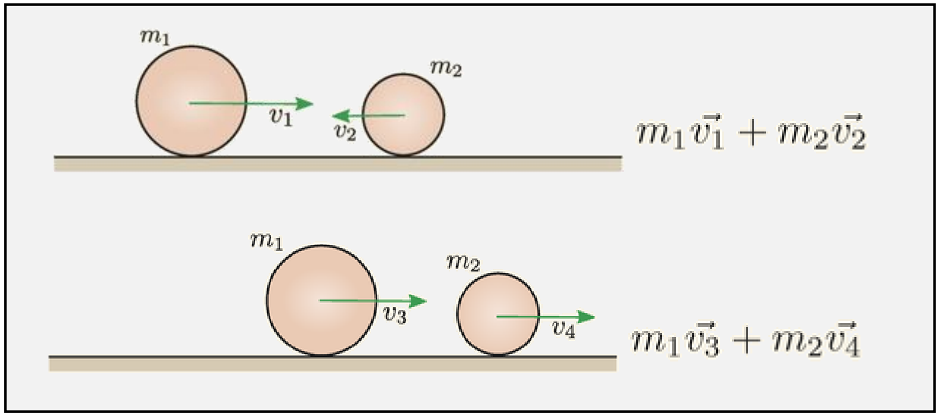
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \ \vec{p} = m\vec{v}, m = const \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$$m = m(t) \Rightarrow \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

## Zasada zachowania pędu

Całkowity pęd układu ciał jest stały, jeżeli w układzie nie działają siły zewnętrzne:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const$$



# Mechanika: dynamika punktu materialnego (VIII)

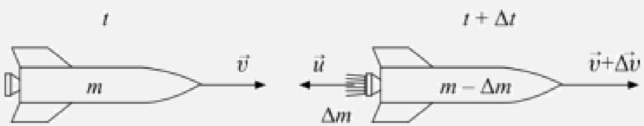
## Pęd (ruch ciał ze zmienną masą)

$$m = m(t) \Rightarrow \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Jako przykład ruchu ciała o zmiennej masie rozpatrzymy ruch rakiety z silnikiem odrzutowym.

Niech $m$ oznacza masę rakiety w pewnej chwili $t$, $\vec{v}$ – jej prędkość. Niech szybkość spalania paliwa $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ będzie stała i równa $q$, a szybkość wyrzucanych spalin względem rakiety wynosi $u$ (spaliny są wyrzucane do tyłu).

Chcemy obliczyć tzw. siłę ciągu rakiety i jej prędkość po wypaleniu się paliwa. Przyjmujemy oś X układu współrzędnych zgodnie ze zwrotem prędkości rakiety.




Rozważania prowadzimy w układzie inercjalnym (np. Ziemi). W chwili $t$ pęd rakiety z paliwem $\vec{p}_1 = m\vec{v}$ a jego wartość $p_1 = mv$, w chwili $t + \Delta t$ po wyrzucie $\Delta m$ gazów pęd jest sumą pędu rakiety

$$(m - \Delta m)(v + \Delta v)$$

oraz pędu wyrzuconych gazów

$$\Delta m \cdot (v + \Delta v - u),$$

czyli $$p_2 = m\, v + m \cdot \Delta v - (\Delta m) \cdot u$$

Zgodnie z zasadą zachowania pędu:

$$p_1 = p_2$$

$$mv = m\, v + m \cdot \Delta v - (\Delta m) \cdot u,$$

czyli $$m\Delta v = (\Delta m) \cdot u \qquad (1)$$

Po podzieleniu obu stron równania przez $\Delta t$ otrzymujemy

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{u \cdot \Delta m}{\Delta t} = u \cdot q\ ,$$

Zatem zgodnie z II zasadą dynamiki mamy

$$F = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = u \cdot q \qquad (2)$$

Jest to wzór na wartość siły ciągu rakiety gdy szybkość spalania paliwa jest stała I równa $q$.

—— • ——

Obliczmy teraz końcowa szybkość rakiety. Niech $m_0$ oznacza masę początkową rakiety, zaś $m_k$ – masę rakiety po spaleniu paliwa ($m_0 - m_k$). Ze wzoru (1) $m\Delta v = (\Delta m) \cdot u$, otrzymujemy $\Delta v = \frac{\Delta m}{m} \cdot u$, skąd możemy przez scałkowanie obliczyć prędkość końcową $v_k$ rakiety. Zamieniamy otrzymane równanie różnicowe na równanie różniczkowe:

$$dv = -\frac{dm}{m} \cdot u\ .$$

Dodanie znaku „minus” wynika z tego, że masa $m$ rakiety maleje podczas spalania paliwa. Otrzymane równaniem jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, rozwiązujemy je całkując obie strony. Otrzymujemy

$$v(t) = -u \ln m + c,$$

gdzie stała całkowania $c$ zostanie obliczona z warunku początkowego. Mianowicie w chwili $t = 0$ masa rakiety $m = m_0$ i $v = 0$, a więc stała $c = -u \ln m_0$. Zatem

$$v(t) = -u \ln m + u \ln m_0 = u \ln \frac{m_0}{m}\ .$$

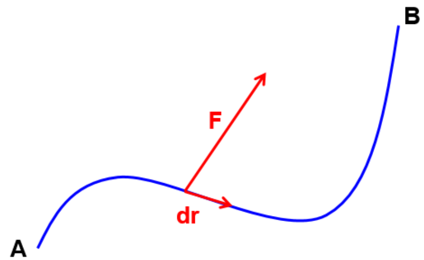
Dla $m = m_k$

$$v_k = u \ln \frac{m_0}{m_k}\ .$$

# Praca i energia (I)

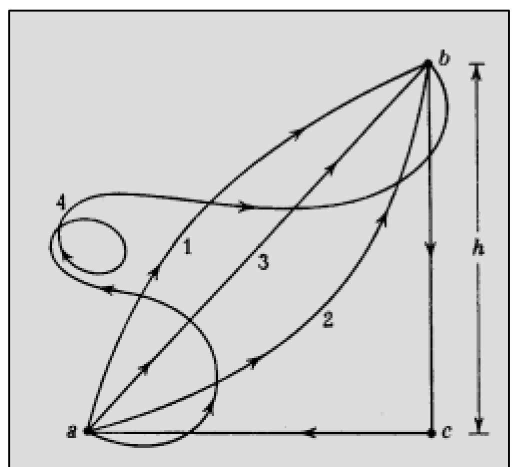
## Praca

$$W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r}$$




$$W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \left| \vec{F} = \overrightarrow{const} \right| = \vec{F} \int_A^B d\vec{r} = \vec{F}\ \vec{r}_{A-B} = F\ r_{A-B} \cos\angle(\vec{F},\vec{r}) = \left| \cos\angle(\vec{F},\vec{r}) = 1 \right| = F\ r_{A-B}$$

**Siła zachowawcza** – siła mająca tę własność, że praca wykonana przez nią przy przemieszczaniu ciała na drodze o początku A i końcu B zależy tylko od położenia punktów A i B, nie zależy zaś od przebiegu drogi, czyli od toru ruchu.



# Energia potencjalna:

Praca siły **F**(x,y) na drodze elementarnego przemieszczenia dr:

$$dW = \mathbf{F} \circ d\mathbf{r}$$

Praca siły **F**(x,y) nie zależy od drogi, a tylko od punktu startu i końca przemieszczenia to można określić funkcję skalarną, zależną tylko od współrzędnych (x,y). Nazywamy ją energią potencjalną i określamy jej nieskończenie mały przyrost:

$$dU = -\mathbf{F} \circ d\mathbf{r}$$

Minus został wybrany ze względu na to, że ubytek energii potencjalnej jest równy wykonanej elementarnej pracy. Jest on przyjęty ze względów fizycznych. Przyrost funkcji U(x,y) można wyrazić jako sumę przyrostów funkcji względem obydwu zmiennych niezależnych x i y jako:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Z drugiej strony

$$dU = -\mathbf{F} \circ d\mathbf{r} = -\left(F_x dx + F_y dy\right) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

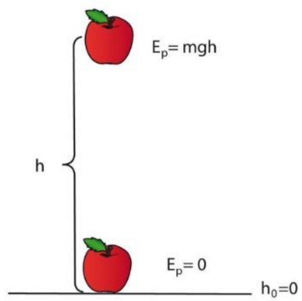
Grupując wyrazy z odpowiednimi przyrostami dx i dy otrzymamy:

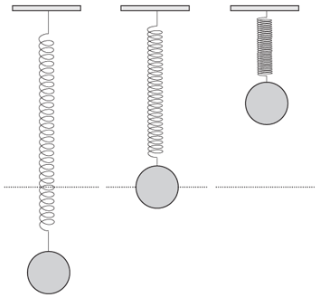
$$\left(F_x + \frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(F_y + \frac{\partial U}{\partial y}\right) dy = 0 \qquad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

Mówimy, że siła równa jest ujemnemu gradientowi energii potencjalnej co zapisujemy:

$$\mathbf{F} = -\nabla U \qquad \mathbf{F} = -\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{i} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{j}$$

## Energia potencjalna (przykłady):



## Energia kinetyczna:

Jeśli siła F jest stała i rozpędza masę m od prędkości $v_1$ do prędkości $v_2$ to możemy napisać:

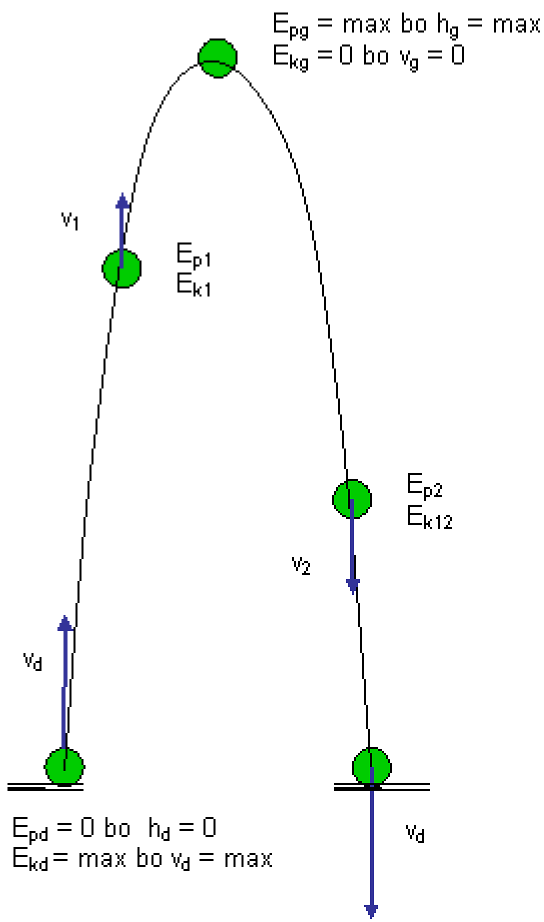
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} ma dx = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{v_1}^{v_2} m \frac{dx}{dt} dv = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Podobne rozumowanie dla siły zmiennej co do kierunku względem przesunięcia daje:

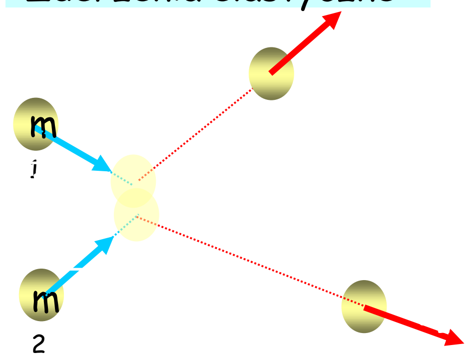
$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \circ \mathbf{dr} = \int_{r_1}^{r_2} m \frac{\mathbf{dv}}{dt} \circ \mathbf{dr} = \int_{v_1}^{v_2} m \, \mathbf{dv} \circ \frac{\mathbf{dr}}{dt} = \int_{v_1}^{v_2} m \, \mathbf{dv} \circ \mathbf{v} = \int_{\frac{mv_1^2}{2}}^{\frac{mv_2^2}{2}} \mathbf{d}\left[\frac{m\mathbf{v}^2}{\mathbf{2}}\right] = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Siła zwiększa przez wykonanie nad ciałem pracy jego energię ruchu – energię kinetyczną.

# Zasada zachowania energii mechanicznej

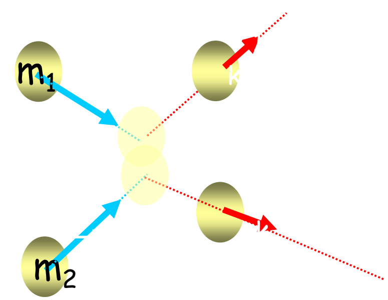



Zderzenia elastyczne

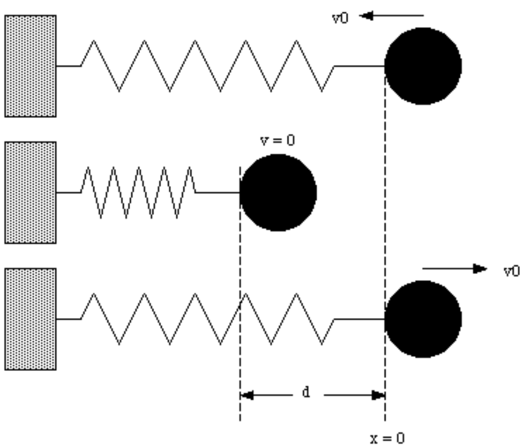



$\vec{p}_{przed} = \vec{p}_{po}$
$E_{Kprzed} = E_{Kpo}$

Zderzenia nieelastyczne



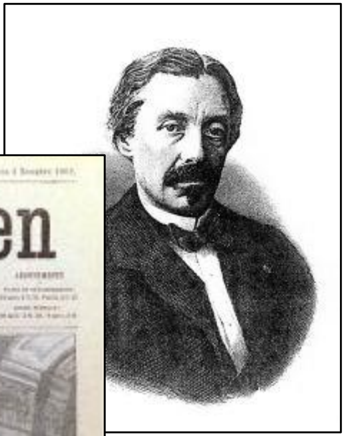

$\vec{p}_{przed} = \vec{p}_{po}$

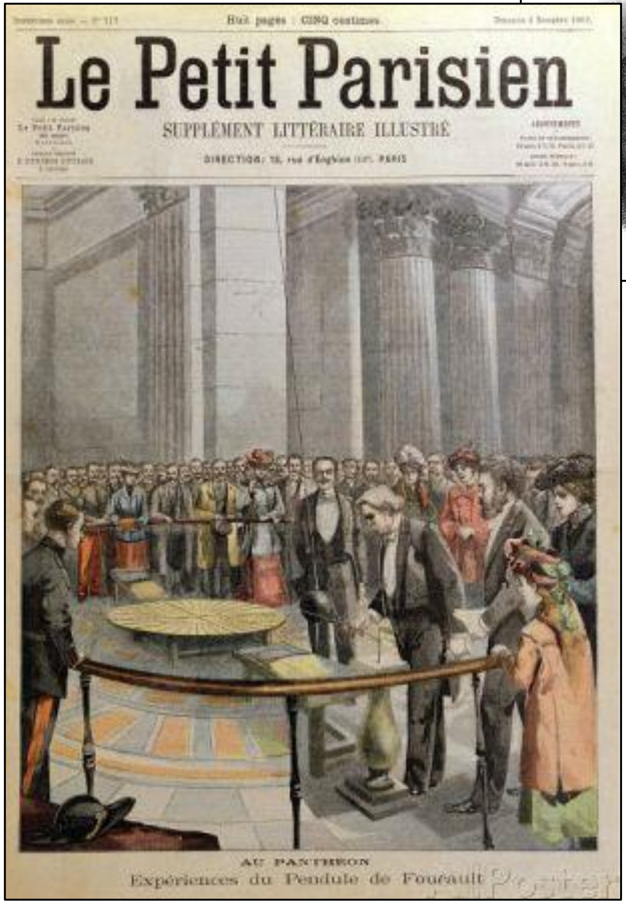


## Siły w układach nieinercjalnych (pozorne, bezwładności)

Zjawiska fizyczne:

- odchylenie swobodnie spadających ciał od pionu (niewielkie)
- wahadło Foucault. Jeżeli uruchomimy wahadło na biegunie północnym, to przy każdym wahnięciu kulka odchyli się w prawo dla obserwatora związanego z Ziemią (dochodząc do bieguna – na wschód, po minięciu bieguna – na zachód). Dla niego płaszczyzna wahań będzie obracać się względem podłoża z prędkością kątową Ziemi, tylko, że w przeciwnym kierunku.




Huit pages : CINQ centimes

Le Petit Parisien

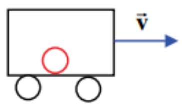
SUPPLÉMENT LITTÉRAIRE ILLUSTRÉ

AU PANTHÉON

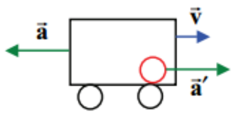
Expériences du Pendule de Foucault

## Siły w układach nieinercjalnych (pozorne, bezwładności)

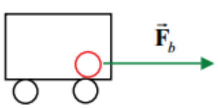
*Siła bezwładności w ruchu niejednostajnym prostoliniowym – siła d'Alemberta:*




Ruch jednostajny:
$\vec{v} = const$ w układzie inercjalnym




Hamowanie:
$\vec{a}$ w układzie inercjalnym
$\vec{a'}$ w układzie nieinercjalnym




$\vec{F_b}$ Siła bezwładności w układzie nieinercjalnym

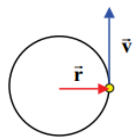
$$\vec{F_b} = m\vec{a'}$$

$$\vec{F_b} = -m\vec{a}$$

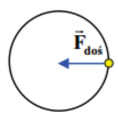
# Układy nieinercjalne (III)

## Siły w układach nieinercjalnych (pozorne, bezwładności)

*Siła bezwładności w ruchu po okręgu – siła odśrodkowa:*

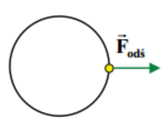



$$v = \omega r$$




Obserwator w układzie inercjalnym

$$\vec{F}_{dos} = -m\omega^2\vec{r} = -\frac{mv^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$$




Obserwator w układzie nieinercjalnym

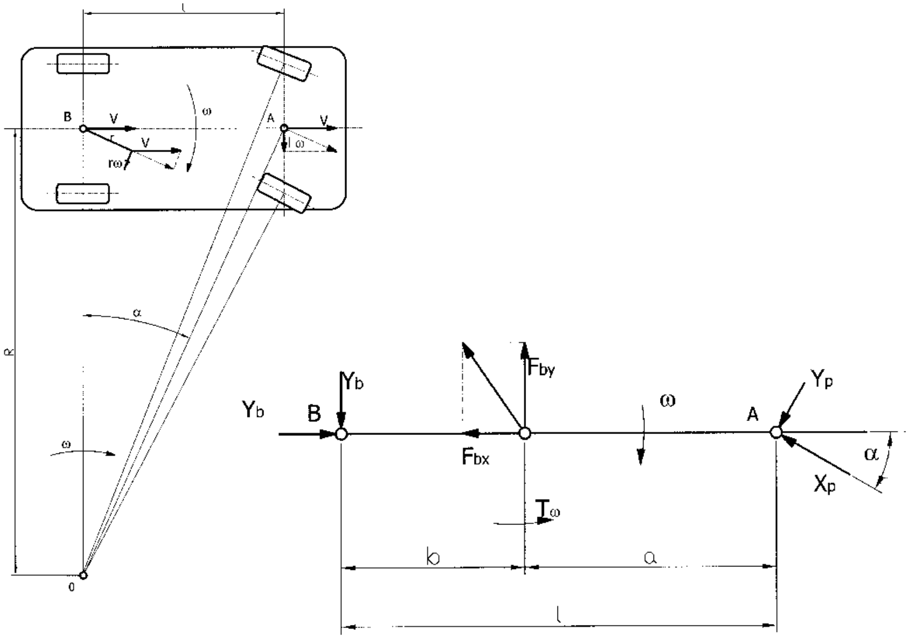
$$\vec{F}_{ods} = m\omega^2\vec{r} = \frac{mv^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$$

## Siły w układach nieinercjalnych (pozorne, bezwładności)

*Siła bezwładności w ruchu po okręgu – siła odśrodkowa:*

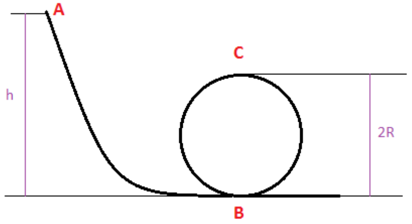
$$Y_t = \frac{G_t}{g} R\omega^2 + \frac{G}{g}\frac{ab - \rho_z^{\,2}}{L}\frac{d\omega}{dt}$$

$$Y_P \cos\alpha = \frac{G_P}{g} R\omega^2 + \frac{Q}{g}\left(\frac{\rho_z^{\,2} + b}{l}\right)\frac{d\omega}{dt} + X_P \sin\alpha$$



# Siły w układach nieinercjalnych (pozorne, bezwładności)

*Siła bezwładności w ruchu po okręgu – siła odśrodkowa:*




$$v_b = 85\frac{km}{h} = 23{,}7\frac{m}{s}$$

$$v_c = 6{,}7\frac{m}{s}$$

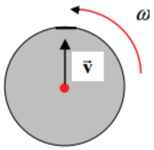
$$F_b = 4493\ N = 5.6Q$$

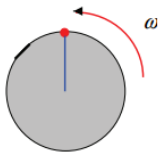
$$F_c = 359\ N = 0{,}45Q$$

# Układy nieinercjalne (VI)

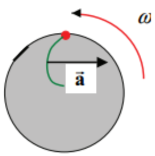
## Siły w układach nieinercjalnych (pozorne, bezwładności)

*Siła bezwładności podczas ruchu ciała w układzie obracającym się – siła Coriolisa:*





Obserwator w układzie inercjalnym



Obserwator w układzie nieinercjalnym

$$\overrightarrow{a_c} = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = 2\vec{v} \times \vec{\omega}$$

$$\overrightarrow{F_c} = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$$

Efekty militarne:

- I wojna światowa: ostrzał artyleryjski Paryża z odległości 110 km – znoszenie pocisków na wschód o 1,6 km
- II wojna światowa: bombardowanie Londynu rakietami V2 z odległości ok. 300 km – odchylenie torów rakiet na wschód o 3,7 km
- podmywanie prawych brzegów rzek syberyjskich
- skręcanie pasatów (w prawo na półkuli północnej, w lewo – na południowej)
- cyklony (sytuacja na półkuli północnej)