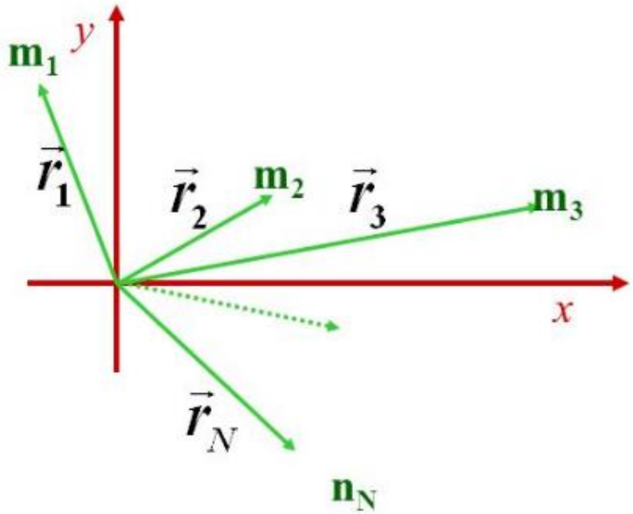
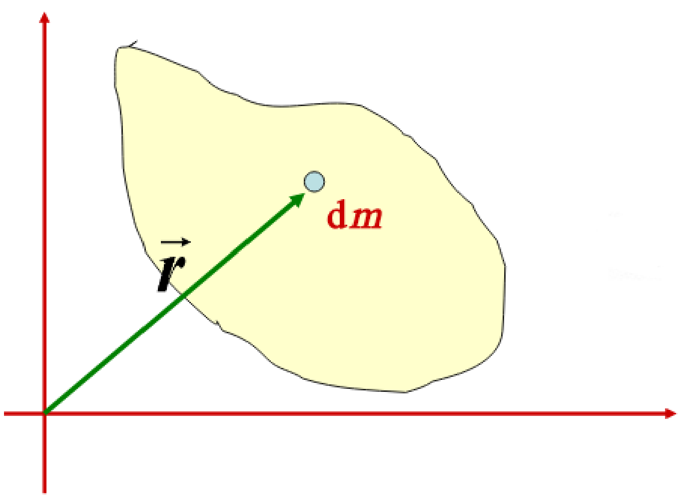
FIZYKA I
Wykład IV

Środek masy



$$R_{śm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$

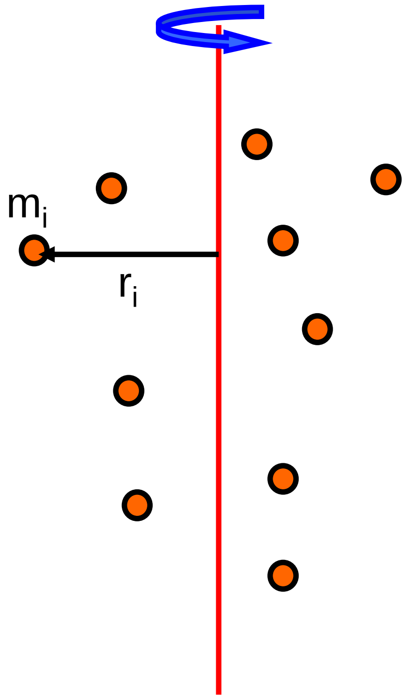


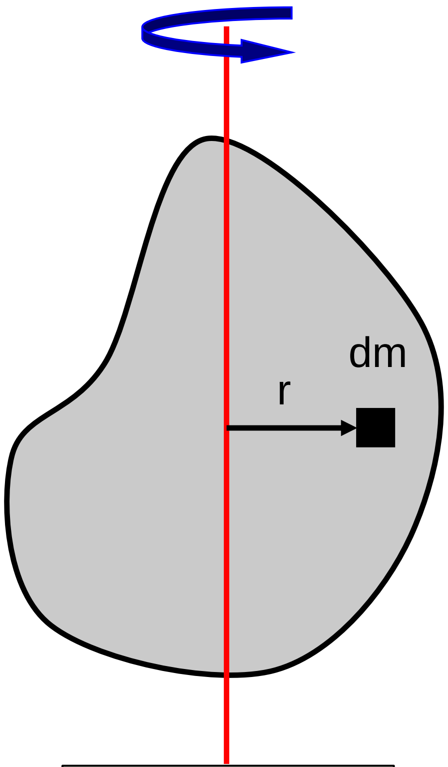
$$R_{śm} = \frac{\int_0^M \vec{r}dm}{\int_0^M dm} = \frac{1}{M}\int_0^M \vec{r}dm = \frac{1}{M}\int_0^V \vec{r}dV$$

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Ruch obrotowy bryły sztywnej (II)

Oś obrotu i moment bezwładności





$$I = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 m_i$$

$$I = \int_M r^2 \, dm$$

Moment bezwładności punktu materialnego lub bryły sztywnej pełni w ruchu obrotowym dokładnie tę samą rolę, jak masa tych ciał w ruchu postępowym. Moment bezwładności, który oznaczamy dużą literą I (od *inertia*), opisuje **sposób rozkładu masy wokół osi obrotu**.

Ruch obrotowy – zasady dynamiki Newtona

Moment pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \vec{L} = I\,\vec{\omega} \quad \vec{L} = \hat{I}\,\vec{\omega}$$

Siła - moment siły

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$$

Jeśli do bryły przyłożony jest zewnętrzny moment siły, to jej moment pędu zmienia się.

Ruch obrotowy – zasady dynamiki Newtona

Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu krzywoliniowego (obrotowego)

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{M} = \vec{M}_{zew} \qquad \vec{M}_{wew} = \vec{0}$$

$$\vec{M} = I\,\vec{\varepsilon} \qquad \vec{M} = \hat{I}\,\vec{\varepsilon}$$

Składowa zewnętrznego momentu siły, równoległa do osi obrotu ustalonej w układzie inercjalnym (lub przechodzącej przez środek masy), działającego na obracające się ciało równa jest iloczynowi momentu bezwładności i przyspieszenia kątowego względem tej osi.

Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu obrotowym

Energię kinetyczną bryły sztywnej obracającej się dookoła nieruchomego środka masy nazywamy energią rotacyjną i wyrażamy wzorem:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}\sum_n m_n v_n^2 = \frac{1}{2}\sum_n m_n \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_n\right)^2}$$

Dla bryły o dowolnym kształcie:

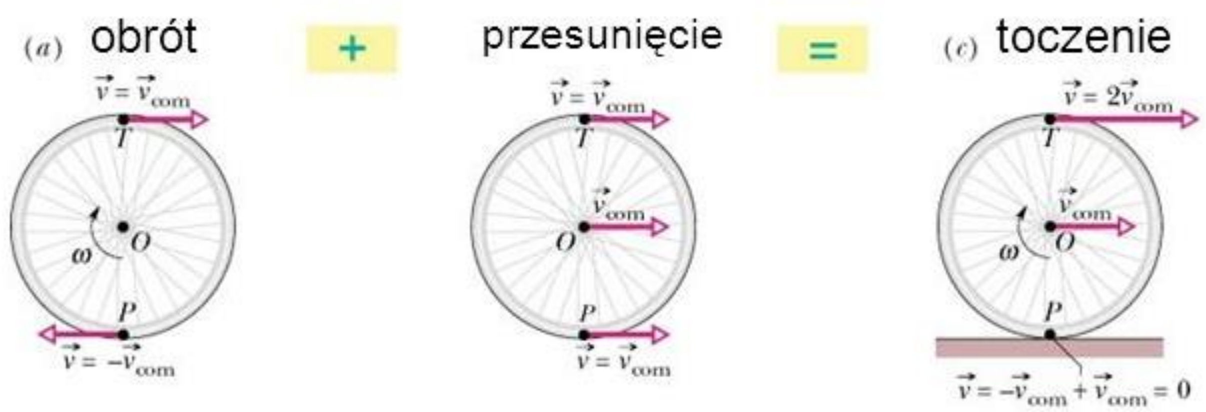
$$E_k = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_{xx}^2 + I_{yy}\omega_{yy}^2 + I_{zz}\omega_{zz}^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{yz}\omega_y\omega_z + 2I_{zx}\omega_z\omega_x)$$

Dla bryły o symetrii sferycznej:

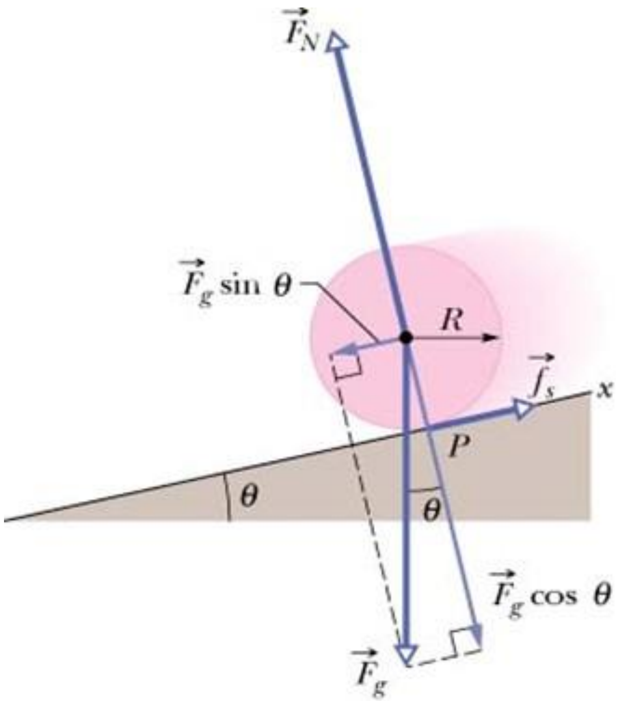
$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} I\,\omega^2}$$

Toczenie bez poślizgu

Toczenie bez poślizgu jest specyficznym rodzajem ruchu bryły sztywnej, będącym złożeniem ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół środka masy.



Toczenie bez poślizgu



Ruch postępowy:

$$ma = F_g \sin\theta - P$$

Ruch obrotowy:

$$I\varepsilon = PR$$

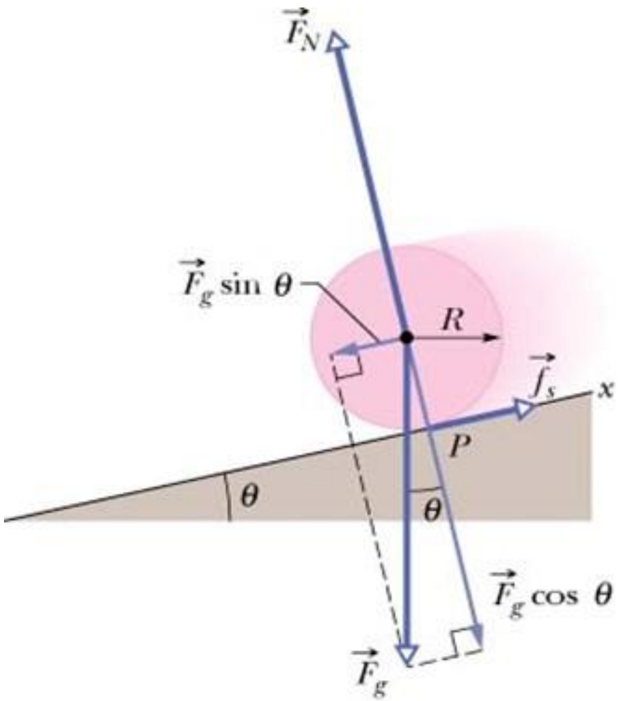
Oraz:

$$a = R\varepsilon$$

Ostatecznie:

$$ma + \frac{I\varepsilon}{R} = mg\sin\theta \Rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{1 + \dfrac{I}{mR^2}}$$

Toczenie bez poślizgu



Równanie ruchu obrotowego względem chwilowej osi obrotu (linia przechodząca przez punkt styku bryły z równią):

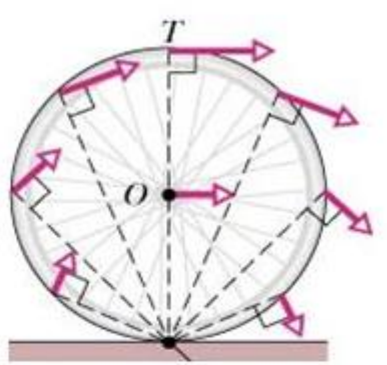
$$I\varepsilon = F_g R \sin\theta$$

Z twierdzenia Steinera:

$$I_S = I + mR^2$$

Więc:

$$a = R\varepsilon = \frac{mgR^2 \sin\theta}{I + mR^2}$$



Chwilowa Oś obrotu P

Bryła sztywna wprawiona w obrót dookoła osi środkowej o największym lub najmniejszym momencie bezwładności (są to osie główne) zachowuje kierunek tej osi w trakcie ruchu w przestrzeni. Te dwie osie główne są to tak zwane swobodne osie obrotu.

Bryła wprawiona w obrót dookoła osi o pośrednim momencie bezwładności w ruchu postępowym koziołkuje. Kierunek osi obrotu zmienia swój kierunek w przestrzeni.

Ciała swobodnie ustawiające się w przestrzeni w trakcie obrotów dążą do takiego ustawienia się, żeby obrót następował dookoła osi o możliwie największym momencie bezwładności.

Taka konfiguracja jest stabilna ze względu na małe zaburzenia, np. pojawiające się zaburzające momenty sił próbujące zmienić chwilową oś obrotu.

Obroty bryły sztywnej wokół osi zmiennej w czasie

1. **przechodzącej przez jeden ustalony punkt bryły (obrót nieswobodny)**
2. **przechodzącej przez ŚM ciała (obrót swobodnej bryły sztywnej).**

W przypadku (1) będziemy zakładać, że ustalony punkt bryły spoczywa w układzie inercjalnym U. W przypadku (2) ŚM spoczywa w układzie inercjalnym.

W obu przypadkach wprowadzimy układ współrzędnych kartezjańskich U' związanych ze ŚM bryły sztywnej. Kierunek osi U' będzie pokrywał się z osiami głównymi bryły. W U' tensor bezwładności będzie diagonalny. Układ U' będzie obracał się względem inercjalnego układu U z prędkością kątową ω.

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}\vec{L}' + \vec{\omega}\times\vec{L}'$$

$$\vec{M}(t) = \left[M_{x'}, M_{y'}, M_{z'}\right]$$

$$\vec{\omega}(t) = \left[\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}\right]$$

$$\vec{L}' = \widehat{I}'\vec{\omega}' = \left[I_{x'}\omega_{x'}, I_{y'}\omega_{y'}, I_{z'}\omega_{z'}\right]$$

Obroty bryły sztywnej wokół osi zmiennej w czasie

ROWNANIA EULERA

$$M_{x'} = I_{x'} \frac{d}{dt} \omega_{x'} + \left(I_{z'} - I_{y'} \right) \omega_{y'} \omega_{z'}$$

$$M_{y'} = I_{y'} \frac{d}{dt} \omega_{y'} + \left(I_{x'} - I_{z'} \right) \omega_{x'} \omega_{z'}$$

$$M_{z'} = I_{z'} \frac{d}{dt} \omega_{z'} + \left(I_{y'} - I_{x'} \right) \omega_{x'} \omega_{y'}$$

Obroty bryły sztywnej wokół osi zmiennej w czasie
Dla M=0 oraz Ixx=Iyy=Izz=I

$$0 = I_{x'} \frac{d}{dt}\omega_{x'} + \left(I_{z'} - I_{y'}\right)\omega_{y'}\omega_{z'} = I_{x'} \frac{d}{dt}\omega_{x'} \Rightarrow \omega_{x'} = const$$

$$0 = I_{y'} \frac{d}{dt}\omega_{y'} + \left(I_{x'} - I_{z'}\right)\omega_{x'}\omega_{z'} = I_{y'} \frac{d}{dt}\omega_{y'} \Rightarrow \omega_{y'} = const \Rightarrow \vec{\omega} = const$$

$$0 = I_{z'} \frac{d}{dt}\omega_{z'} + \left(I_{y'} - I_{x'}\right)\omega_{x'}\omega_{y'} = I_{z'} \frac{d}{dt}\omega_{z'} \Rightarrow \omega_{z'} = const$$

Zasada zachowania momentu pędu

$$\boxed{\vec{M}_{wyp} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{0} \rightarrow \vec{L} = const}$$

Jeśli działa siła centralna: $\vec{F} = \hat{r} \cdot f(r)$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \cdot \hat{r} f(r) = \vec{0} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = const}$$

W inercyjnym układzie odniesienia:

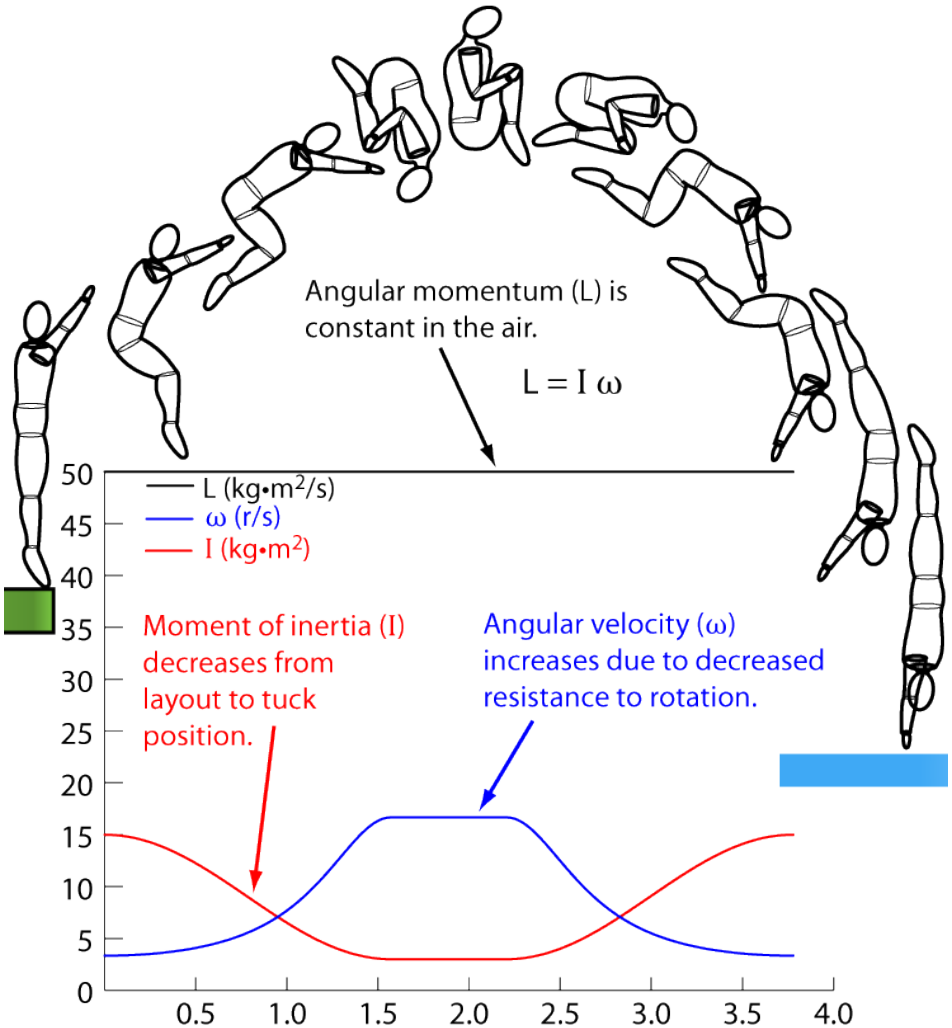
$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n \times \vec{v}_n \qquad \vec{L} = \vec{L}(oś\ obrotu)$$

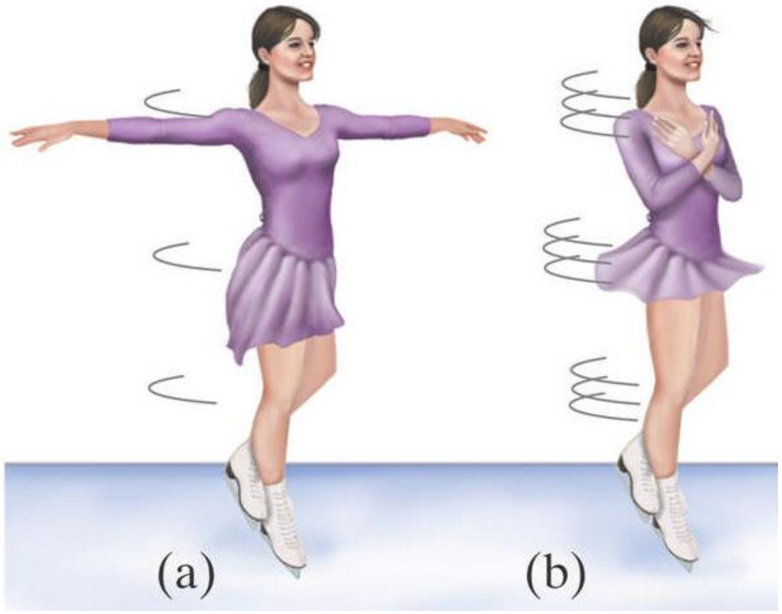
$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\vec{r}_n - \vec{R}_{CM}\right) \times \vec{v}_n + \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{R}_{CM} \times \vec{v}_n = \boxed{\vec{J}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times \vec{P},}$$

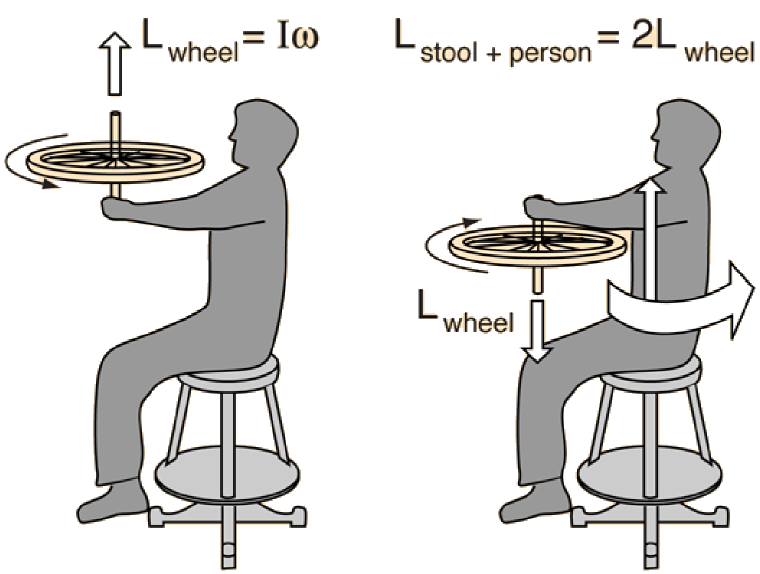
$$\vec{P} = \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{v}_n$$

J_{CM} moment pędu względem środka masy, R_{CM} x P moment pędu środka masy względem początku układu

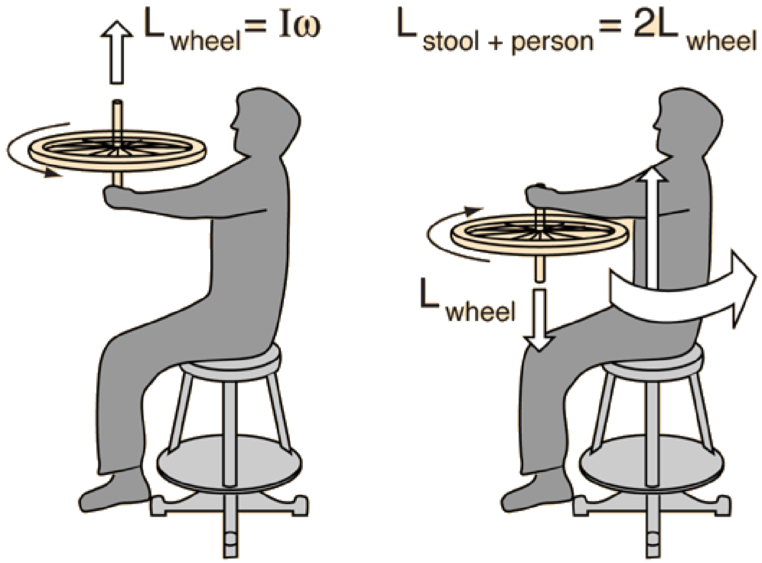
Ruch obrotowy bryły sztywnej (XIV)

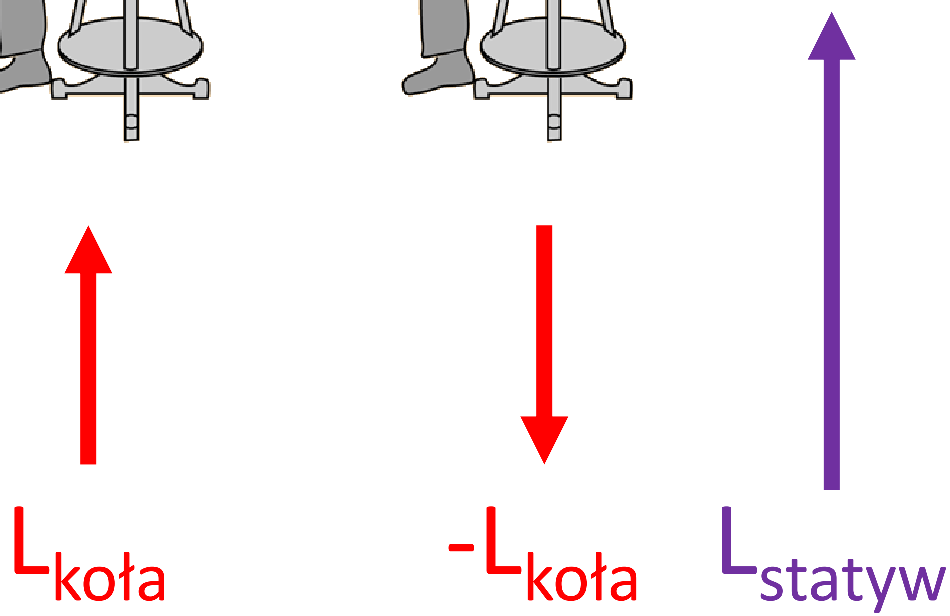






Ruch obrotowy bryły sztywnej (XV)





$$\vec{L}_{przed} = \vec{L}_{po}$$

$$\vec{L}_{koło} = \vec{L}_{koło} + \vec{L}_{statyw}$$

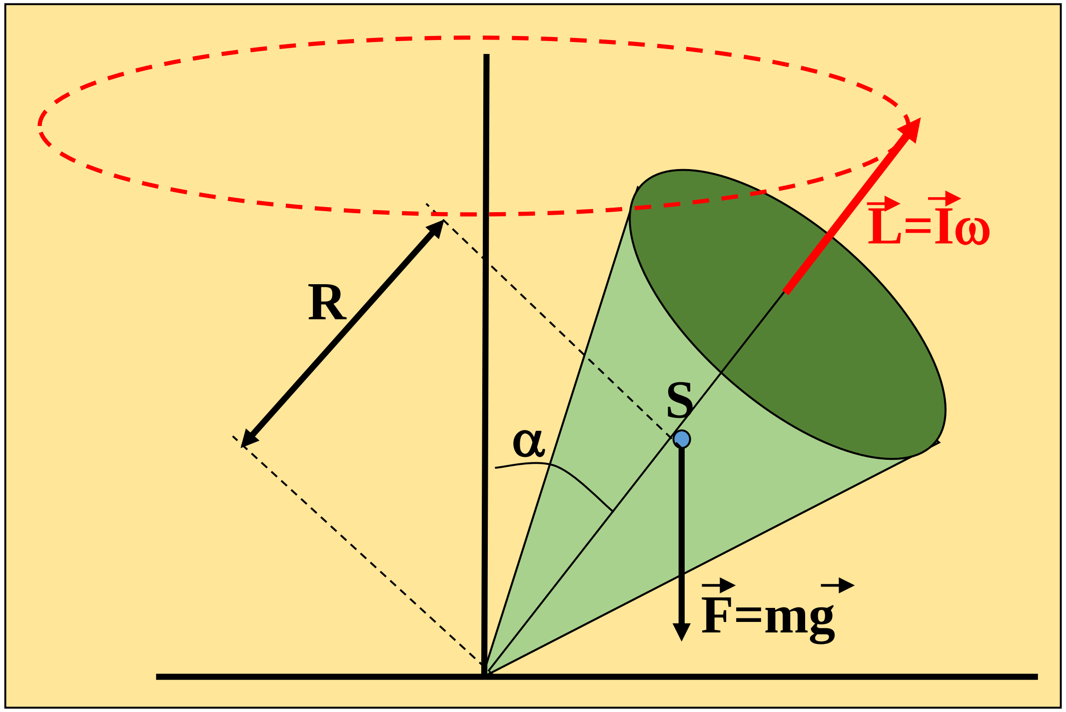
$$L_{koło} = -L_{koło} + L_{statyw}$$

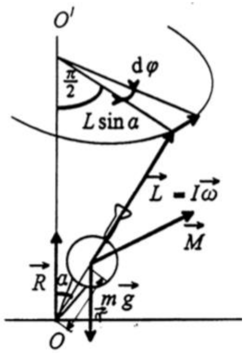
$$2L_{koło} = L_{statyw}$$

$$2\omega_{koło} I_{koło} = \omega_{statyw} I_{statyw}$$

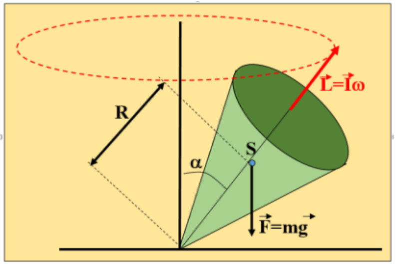
$$\omega_{statyw} = 2\omega_{koło} \frac{I_{koło}}{I_{statyw}}$$

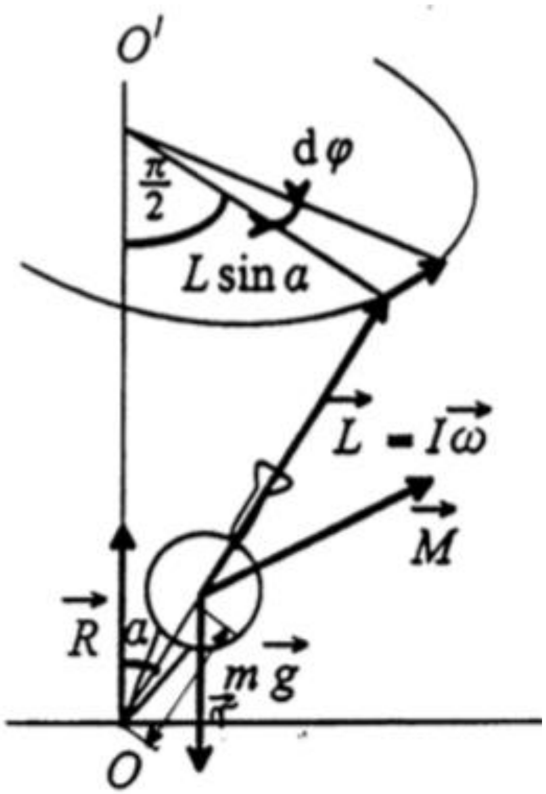
Precesja to obrót wektora momentu pędu pod wpływem momentu sił zewnętrznych.





Ruch obrotowy bryły sztywnej (XVII)





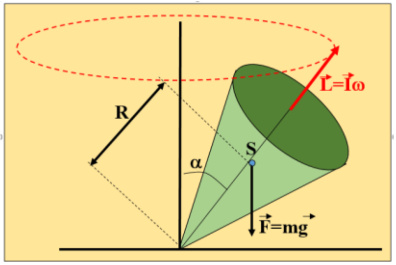
$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L} = mgr\sin\alpha$$

$$dL = L\sin\alpha d\varphi \Rightarrow \frac{d}{dt}L = L\sin\alpha\frac{d}{dt}\varphi$$

$$L\sin\alpha\frac{d}{dt}\varphi = mgr\sin\alpha$$

$$\omega_P = \frac{d}{dt}\varphi = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{I\omega}$$

Ruch obrotowy bryły sztywnej (XVII)



Gdy oś momentu pędu nie pokrywa się z osią symetrii bąka, na ruch precesyjny osi symetrii nakłada się **nutacja** o okresie T_n. Oś symetrii bąka zakreśla wtedy linię wężykowatą