

Fizyka (gr. φύσις physis – "natura") – nauka przyrodnicza zajmująca się badaniem właściwości, przemian materii i energii oraz oddziaływań między nimi. Do opisu zjawisk fizycznych używa się wielkości fizycznych, wyrażonych za pomocą pojęć matematycznych takich jak liczba, wektor, tensor...

PODSTAWOWE JEDNOSTKI MIARY W UKŁADZIE SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
Długość	Metr	m
Masa	Kilogram	kg
Czas	Sekunda	s
Natężenie prądu	Amper	A
Temperatura	Kelwin	K
Światłość	Kandela	cd

WYBRANE JEDNOSTKI POCHODNE W UKŁADZIE SI

Wielkość	Wzór	Nazwa jednostki	Symbol	Wymiar
Pole powierzchni	$s = ab$	Metr kwadratowy	m^2	$m \cdot m$
Objętość	$v = abh$	Metr sześcienny	m^3	$m \cdot m \cdot m$
Gęstość	$\rho = \frac{m}{V}$	Kilogram na metr sześcienny	$\frac{kg}{m^3}$	
Siła	$F = ma$	Niuton	N	$kgms^{-2}$
Prędkość	$v = s:t$	Metr na sekundę	$\frac{m}{s}$	ms^{-1}
Przyspieszenie	$a = v:t$	Metr na sekundę do kwadratu	$\frac{m}{s^2}$	ms^{-2}
Pęd	$p = mv$	Kilogram razy metr przez sekundę	$kgms^{-1}$	$\frac{kg \cdot m}{s}$
Energia	$E_p = mgh$ $E_k = mc^2, \frac{1}{2}mv^2$	Dżul	J	Nm
Praca	$W = Fs$	Dżul	J	Nm
Moc	$P = W:t$	Watt	W	J:s
Ciepło	$Q = cmT$	Dżul	J	
Ciśnienie	$p = F_s:s$	Paskal	Pa	$N:m^{-2}$
Ładunek elektryczny	$Q = It$	Kulomb	C	As
Napięcie elektryczne	$U = W:Q$	Wolt	V	J:C
Pojemność elektryczna	$C = Q:U$	Farad	F	C:V
Opór elektryczny	$R = U:I$	Om	Ω	V:A
Natężenie prądu elektrycznego	$J = \frac{Q}{t}$	Amper	A	$\frac{C}{s}$
Częstotliwość	$f = \frac{1}{T}$	Herc	Hz	$\frac{1}{s}$
Zdolność skupiająca soczewki	$Z = \frac{1}{f}$	Dioptria	D	$\frac{1}{m}$

PODSTAWOWE JEDNOSTKI MIARY W UKŁADZIE SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
Długość	Metr	m
Masa	Kilogram	kg
Czas	Sekunda	s
Natężenie prądu	Amper	A
Temperatura	Kelwin	K
Światłość	Kandela	cd

WYBRANE JEDNOSTKI POCHODNE W UKŁADZIE SI

Wielkość	Wzór	Nazwa jednostki	Symbol	Wymiar
Pole powierzchni	$s = ab$	Metr kwadratowy	m^2	$m \cdot m$
Objętość	$v = abh$	Metr sześcienny	m^3	$m \cdot m \cdot m$
Gęstość	$\rho = \frac{m}{V}$	Kilogram na metr sześcienny	$\frac{kg}{m^3}$	
Siła	$F = ma$	Niuton	N	$kgms^{-2}$
Prędkość	$v = s:t$	Metr na sekundę	$\frac{m}{s}$	ms^{-1}
Przyspieszenie	$a = v:t$	Metr na sekundę do kwadratu	$\frac{m}{s^2}$	ms^{-2}
Pęd	$p = mv$	Kilogram razy metr przez sekundę	$kgms^{-1}$	$\frac{kg \cdot m}{s}$
Energia	$E_k = mgh$ $E_p = mc^2, hv$	Dżul	J	Nm
Praca	$W = Fs$	Dżul	J	Nm
Moc	$P = W:t$	Watt	W	J:s
Ciepło	$Q = cmT$	Dżul	J	
Ciśnienie	$p = F_s$	Paskal	Pa	$N:m^{-2}$
Ładunek elektryczny	$Q = It$	Kulomb	C	As
Napięcie elektryczne	$U = W:Q$	Wolt	V	J:C
Pojemność elektryczna	$C = Q:U$	Farad	F	C:V
Opór elektryczny	$R = U:I$	Om	Ω	V:A
Natężenie prądu elektrycznego	$J = \frac{Q}{t}$	Amper	A	$\frac{C}{s}$
Częstotliwość	$f = \frac{1}{T}$	Herc	Hz	$\frac{1}{s}$
Zdolność skupiająca soczewki	$Z = \frac{1}{f}$	Dioptria	D	$\frac{1}{m}$

- 1795 - 1889 długość równa 10^{-7} długości mierzonej wzdłuż południka paryskiego od równika do bieguna. Na podstawie tej definicji wykonano wzorzec metra. W trakcie powtórnych pomiarów stwierdzono różnicę między wzorcem a definicją. **0.02 mm**

- 1889 - 1960 I Generalna Konferencja Miar (1889) określiła metr jako odległość między odpowiednimi kreskami na wzorcu platynowo - irydowym, równą $0,999914 \cdot 10^{-7}$ połowy południka ziemskiego. Wzorzec przechowywany jest w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres koło Paryża. **200 nm**

- 1960 - 1983 XI Generalna Konferencja Miar (1960) zdefiniowała metr jako długość równą 1 650 763,73 długości fali promieniowania w próżni odpowiadającego przejściu między poziomami $2p^{10}$ a $5d^5$ atomu ^{86}Kr (kryptonu 86) **4 nm**

- 1983 XVII Generalna Konferencja Miar i Wag - metr jest to odległość, jaką pokonuje światło w próżni w czasie 1/299 792 458 s. **0.13 nm**

PODSTAWOWE JEDNOSTKI MIARY W UKŁADZIE SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
Długość	Metr	m
Masa	Kilogram	kg
Czas	Sekunda	s
Natężenie prądu	Amper	A
Temperatura	Kelwin	K
Światłość	Kandela	cd

WYBRANE JEDNOSTKI POCHODNE W UKŁADZIE SI

Wielkość	Wzór	Nazwa jednostki	Symbol	Wymiar
Pole powierzchni	$s = ab$	Metr kwadratowy	m ²	m · m
Objętość	$v = abh$	Metr sześcienny	m ³	m · m · m
Gęstość	$\rho = \frac{v}{m}$	Kilogram na metr sześcienny	$\frac{kg}{m^3}$	
Siła	$F = ma$	Niuton	N	kgms ⁻²
Prędkość	$v = s:t$	Metr na sekundę	$\frac{m}{s}$	ms ⁻¹
Przyspieszenie	$a = v:t$	Metr na sekundę do kwadratu	$\frac{m}{s^2}$	ms ⁻²
Pęd	$p = mv$	Kilogram razy metr przez sekundę	kgms ⁻¹	$\frac{kg \cdot m}{s}$
Energia	$E_p = mgh$ $E_k = mc^2, hv$	Dżul	J	Nm
Praca	$W = Fs$	Dżul	J	Nm
Moc	$P = W:t$	Wat	W	J·s
Ciepło	$Q = cmT$	Dżul	J	
Ciśnienie	$p = F_s:s$	Paskal	Pa	N:m ²
Ładunek elektryczny	$Q = It$	Kulomb	C	As
Napięcie elektryczne	$U = W:Q$	Wolt	V	J:C
Pojemność elektryczna	$C = Q:U$	Farad	F	C:V
Opór elektryczny	$R = U:I$	Om	Ω	V:A
Natężenie prądu elektrycznego	$I = \frac{Q}{t}$	Amper	A	$\frac{C}{s}$
Częstotliwość	$f = \frac{1}{T}$	Herc	Hz	$\frac{1}{s}$
Zdolność skupiająca soczewki	$Z = \frac{1}{f}$	Dioptria	D	$\frac{1}{m}$

- Kilogram jest równy masie międzynarodowego prototypu kilograma - walec platynoirydu (Pt-Ir) przechowywany w siedzibie BIPM w Paryżu, Francja. Jednak pomimo przechowywania go w starannie kontrolowanych warunkach, waga oficjalnego kilograma nie jest stała - w ciągu ostatnich stu lat zmieniła się o około 50 mikrogramów.

- Określona liczba atomów w pojedynczym, jednokilogramowym kryształe krzemu, który stosunkowo łatwo otrzymać w postaci niezwykle czystych, dużych i niemal doskonałych kryształów. Atomy policzono z dokładnością 2×10^{-8} (liczba **AVOGADRO** $6,022 \times 10^{23}$).

Jednostki

PODSTAWOWE JEDNOSTKI MIARY W UKŁADZIE SI

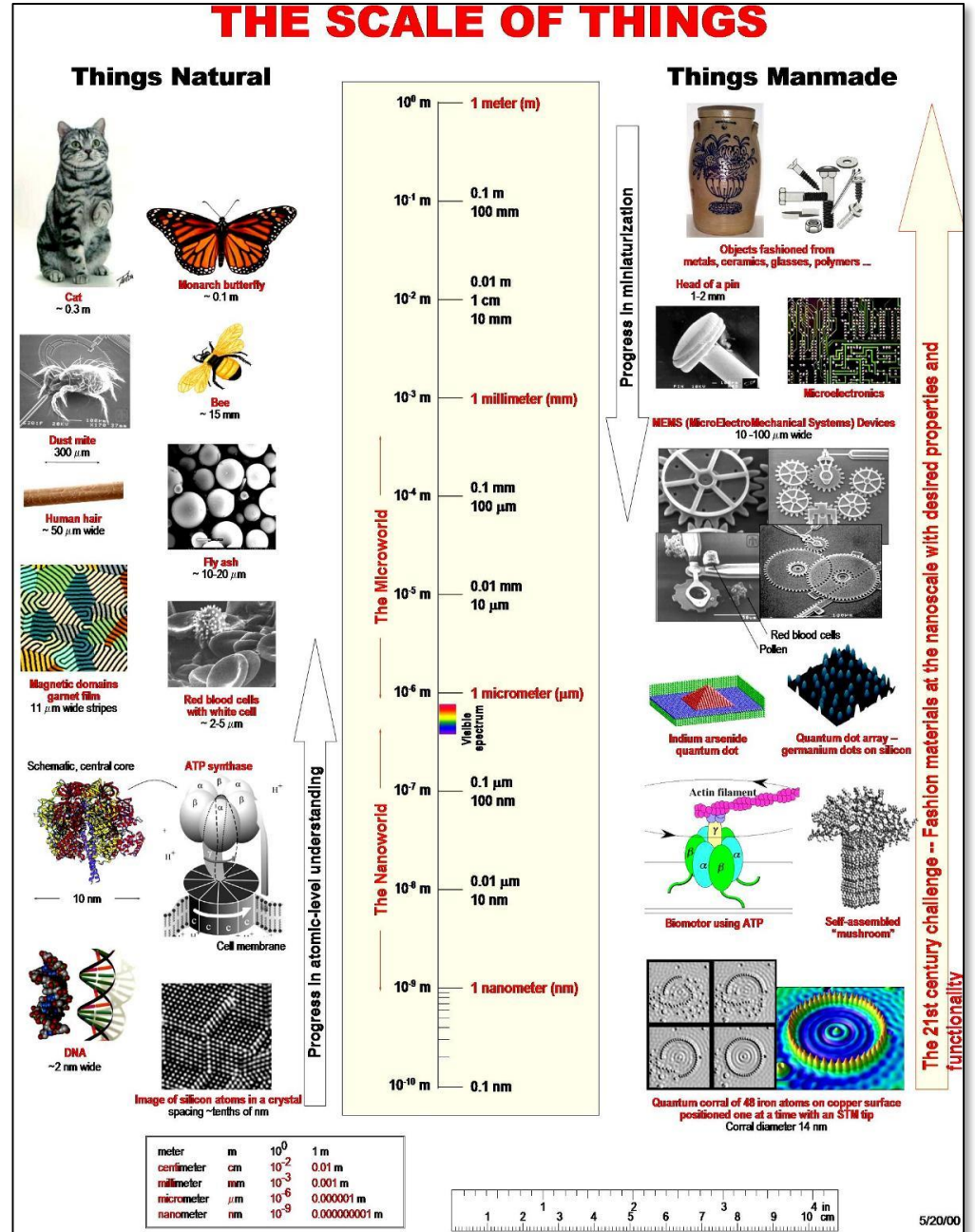
Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
Długość	Metr	m
Masa	Kilogram	kg
Czas	Sekunda	s
Natężenie prądu	Amper	A
Temperatura	Kelwin	K
Światłość	Kandela	cd

WYBRANE JEDNOSTKI POCHODNE W UKŁADZIE SI

Wielkość	Wzór	Nazwa jednostki	Symbol	Wymiar
Pole powierzchni	$s = ab$	Metr kwadratowy	m^2	$m \cdot m$
Objętość	$v = abh$	Metr sześcienny	m^3	$m \cdot m \cdot m$
Gęstość	$\rho = \frac{m}{V}$	Kilogram na metr sześcienny	$\frac{kg}{m^3}$	
Siła	$F = ma$	Niuton	N	$kgms^{-2}$
Prędkość	$v = s:t$	Metr na sekundę	$\frac{m}{s}$	ms^{-1}
Przyspieszenie	$a = v:t$	Metr na sekundę do kwadratu	$\frac{m}{s^2}$	ms^{-2}
Pęd	$p = mv$	Kilogram razy metr przez sekundę	$kgms^{-1}$	$\frac{kg \cdot m}{s}$
Energia	$E_p = mgh$ $E_k = mc^2, \frac{1}{2}mv^2$	Dżul	J	Nm
Praca	$W = Fs$	Dżul	J	Nm
Moc	$P = W:t$	Wat	W	J:s
Ciepło	$Q = cmT$	Dżul	J	
Ciśnienie	$p = F_2:s$	Paskal	Pa	$N:m^{-2}$
Ładunek elektryczny	$Q = It$	Kulomb	C	As
Napięcie elektryczne	$U = W:Q$	Wolt	V	J:C
Pojemność elektryczna	$C = Q:U$	Farad	F	C:V
Opór elektryczny	$R = U:I$	Om	Ω	V:A
Natężenie prądu elektrycznego	$J = \frac{Q}{t}$	Amper	A	$\frac{C}{s}$
Częstotliwość	$f = \frac{1}{T}$	Herc	Hz	$\frac{1}{s}$
Zdolność skupiająca soczewki	$Z = \frac{1}{f}$	Dioptria	D	$\frac{1}{m}$

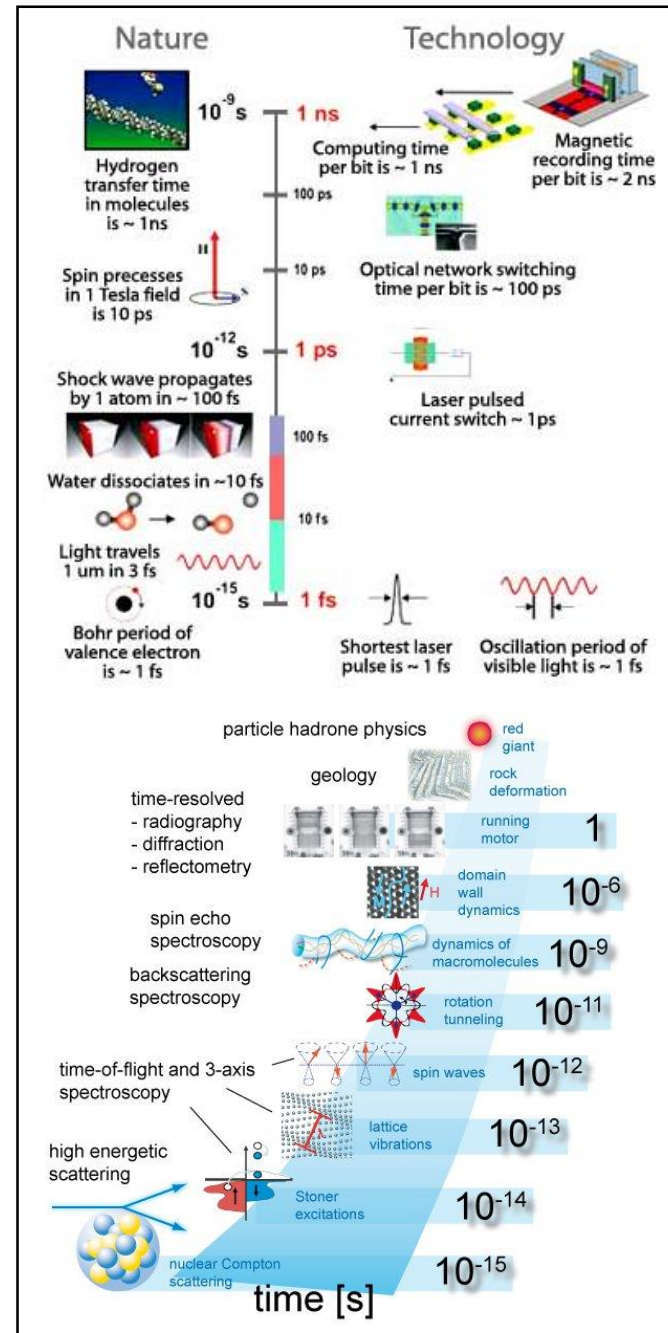
- **Sekunda** (łac. *secunda* - następna, najbliższa) - jednostka podstawowa większości układów jednostek miar np. SI, MKS, CGS - oznaczana **s**.
- Termin *sekunda* pochodzi od łacińskiego wyrażenia *pars minuta secunda* (druga mała część).
- Jest to czas równy 9 192 631 770 okresów promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami $F = 3$ i $F = 4$ struktury nadsubtelnej stanu podstawowego $^2S_{1/2}$ atomu cezu ^{133}Cs (powyższa definicja odnosi się do atomu cezu w spoczynku, w temperaturze 0 K).
- Definicja ta, obowiązująca od 1967 r., została ustalona przez Międzynarodowy Układ Jednostek Miar.
- Poprzednio sekundę definiowano jako $1/31\,556\,925,9747$ część roku zwrotnikowego 1900 lub $1/86400$ część doby.

PRZEDROSTEK	SYMBOL	WARTOŚĆ	ZAPIS
femto-	f	0,000 000 000 000 001	10 ⁻¹⁵
piko-	p	0,000 000 000 001	10 ⁻¹²
nano-	n	0,000 000 001	10 ⁻⁹
mikro-	μ	0,000 001	10 ⁻⁶
mili-	m	0,001	10 ⁻³
centy-	c	0,01	10 ⁻²
decy-	d	0,1	10 ⁻¹
		1	10 ⁰
deka-	da	10	10 ¹
hekto-	h	100	10 ²
kilo-	k	1 000	10 ³
mega-	M	1 000 000	10 ⁶
giga-	G	1 000 000 000	10 ⁹
tera-	T	1 000 000 000 000	10 ¹²



Jednostki

PRZEDROSTEK	SYMBOL	WARTOŚĆ	ZAPIS
femto-	f	0,000 000 000 000 001	10^{-15}
piko-	p	0,000 000 000 001	10^{-12}
nano-	n	0,000 000 001	10^{-9}
mikro-	μ	0,000 001	10^{-6}
mili-	m	0,001	10^{-3}
centy-	c	0,01	10^{-2}
decy-	d	0,1	10^{-1}
		1	10^0
deka-	da	10	10^1
hekto-	h	100	10^2
kilo-	k	1 000	10^3
mega-	M	1 000 000	10^6
giga-	G	1 000 000 000	10^9
tera-	T	1 000 000 000 000	10^{12}



Pojęcia podstawowe

Pomiar wielkości fizycznej polega na porównaniu jej z wielkością tego samego rodzaju przyjętą za jednostkę. Liczba otrzymana jako wynik pomiaru zależy od wyboru jednostki (przykład: pomiar długości w cm, m, ft, in itp.). Wynik pomiaru musi więc zawsze składać się z dwóch części: wartości liczbowej oraz jednostki

Skalar jest to wielkość mechaniczna, którą można jednoznacznie określić za pomocą jednej liczby rzeczywistej. Przykładami tych wielkości są: masa, temperatura, czas, praca, energia etc.

Wektor jest to wielkość mechaniczna, którą można przedstawić za pomocą usytuowanego w przestrzeni odcinka mającego określony kierunek i zwrot. Przykładami wielkości wektorowych są: siła, prędkość, przyspieszenie etc.

Rachunek różniczkowy i całkowy – dział matematyki zajmujący się badaniem funkcji zmiennej rzeczywistej lub zespolonej w oparciu o podstawowe dla tej dyscypliny matematycznej pojęcia pochodnych i całek.

Analiza błędów (niepewności) pomiarowych

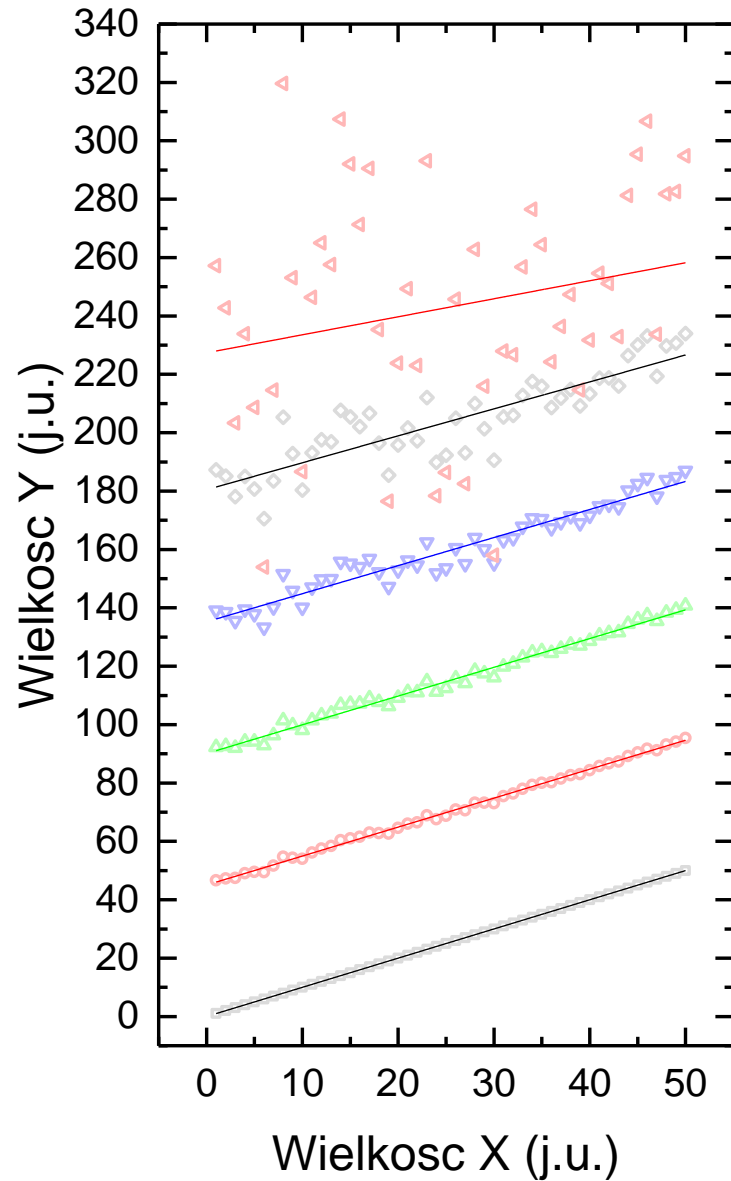
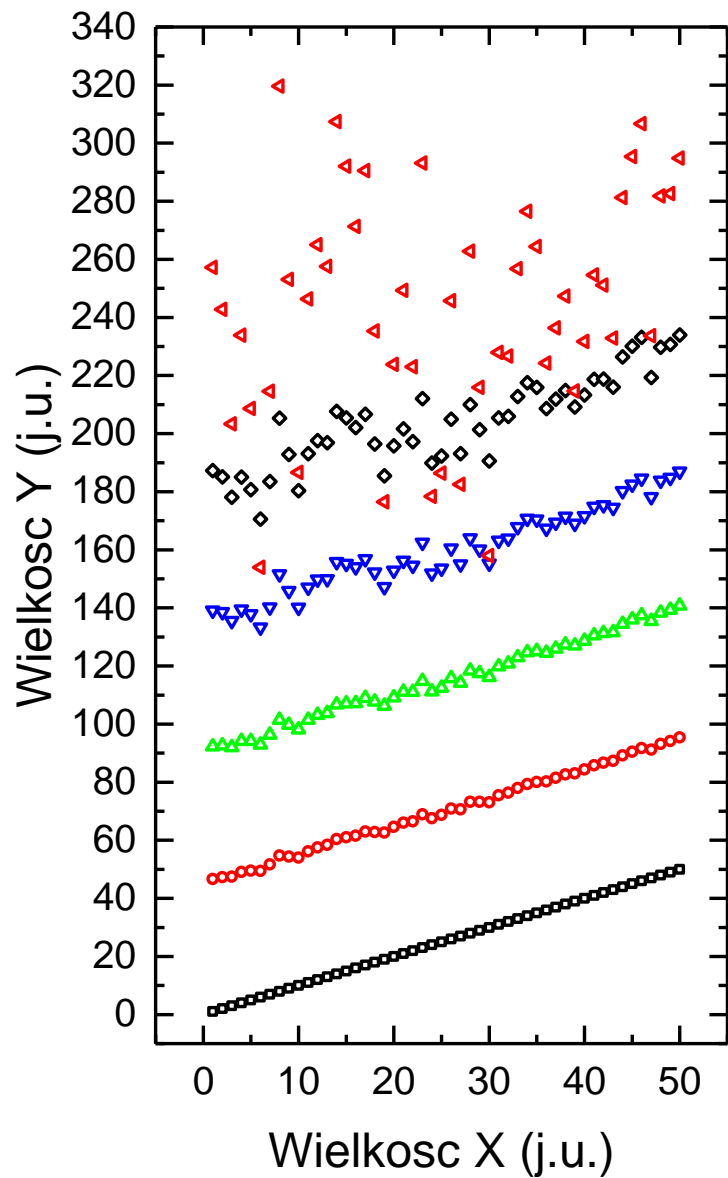
Niezależnie od metody pomiarów nie możemy nigdy bezwzględnie dokładnie wyznaczyć rzeczywistej wartości wielkości fizycznej. Różnicę pomiędzy wynikiem pomiaru, a rzeczywistą wartością mierzonej wielkości nazywamy błędem pomiaru. Błędy pomiarów dzielimy na grube (omyłki), przypadkowe oraz systematyczne.

Błędy grube powstają zwykle na skutek nieuwagi lub niestaranności obserwatora przy odczytywaniu lub zapisywaniu wyników lub w wyniku nagłej zmiany warunków pomiaru (np. wstrząsy). Jeśli mamy serię pomiarów wyniki obarczone błędem grubym są łatwe do wykrycia i usunięcia.

Błędy systematyczne wynikają z niedoskonałości przyrządów i metod pomiarowych. Można je redukować stosując bardziej doskonałe i precyzyjne metody i przyrządy, jednak całkowite wyeliminowanie błędów systematycznych jest niemożliwe. Rozpoznane błędy systematyczne należy uwzględniać poprzez wprowadzenie odpowiednich poprawek do wyniku.

Błędy przypadkowe występują zawsze. Wynikają one z różnych przypadkowych i nie dających się uwzględnić czynników (np. wahania temperatury, lub ruch powietrza w pobliżu przyrządu pomiarowego). Inną przyczyną może być niezgodność przyjętego modelu z obiektem mierzonym – np. gdy mamy zmierzyć średnicę pręta, zakładamy milcząco, że jest on idealnym walcem, co nie jest prawdą. O istnieniu błędów przypadkowych świadczy niepowtarzalność wyników pomiaru jednej i tej samej wielkości. Błędy przypadkowe redukuje się poprzez wielokrotne powtarzanie pomiaru – zachodzi wówczas częściowa kompensacja przypadkowych zawyżających i zaniżających odchyłek wyniku.

Analiza błędów (niepewności) pomiarowych



Analiza błędów (niepewności) pomiarowych

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$x_e$$

$$\delta x = |x_i - x_e|$$

$$\bar{x} \approx x_e$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{d}{d\bar{x}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\bar{x}} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n 2(-1)(x_i - \bar{x}) =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n (-x_i + \bar{x}) = -2 \sum_{i=1}^n x_i + 2 \sum_{i=1}^n \bar{x} = -2 \sum_{i=1}^n x_i + 2n\bar{x}$$

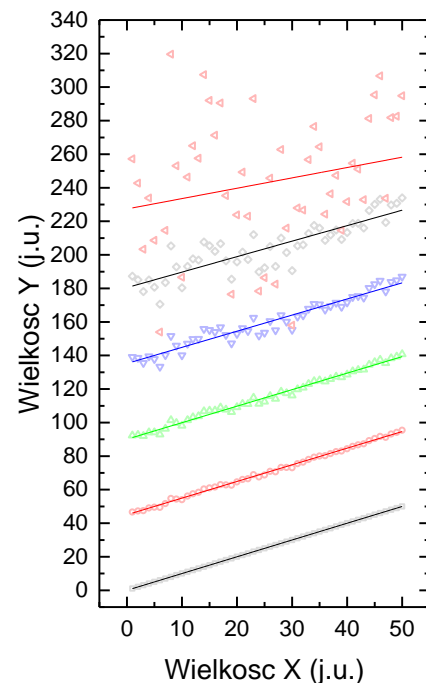
$$\frac{d}{d\bar{x}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^n x_i = -2n\bar{x} \quad | \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$x_e \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



Analiza błędów (niepewności) pomiarowych

$$y = ax + b \quad (x_i, y_i)$$

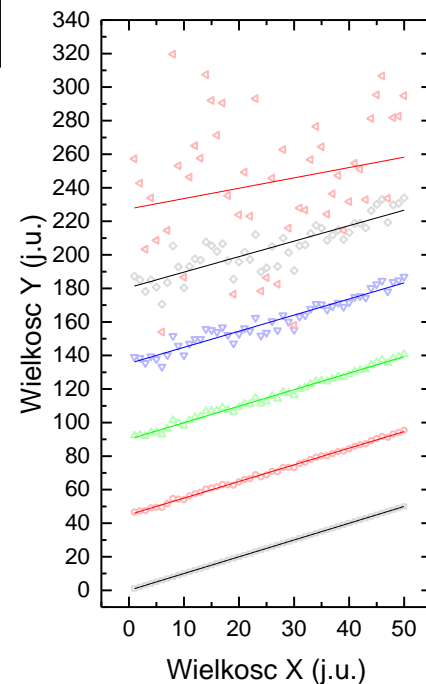
$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (-y_i x_i + ax_i^2 + bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (-y_i + ax_i + b) = 0$$



Analiza błędów (niepewności) pomiarowych

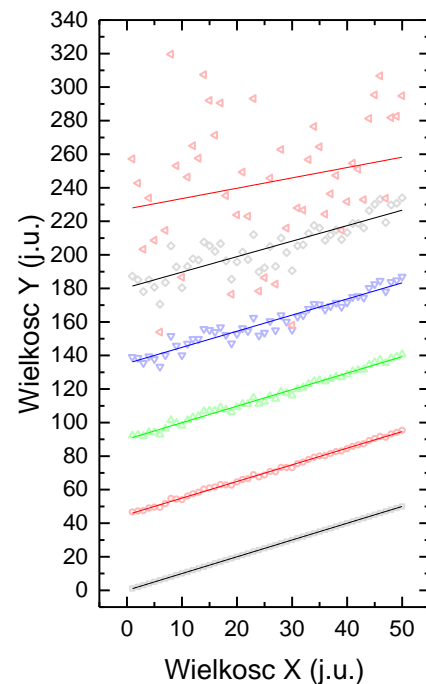
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a x_i^2 + \sum_{i=1}^n b x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n a x_i + n b = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

$$W_g = \begin{vmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

$$W_a = \begin{vmatrix} \sum_i x_i y_i & \sum_i x_i \\ \sum_i y_i & n \end{vmatrix} = n \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i$$

$$W_b = \begin{vmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i & \sum_i y_i \end{vmatrix} = \sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i$$

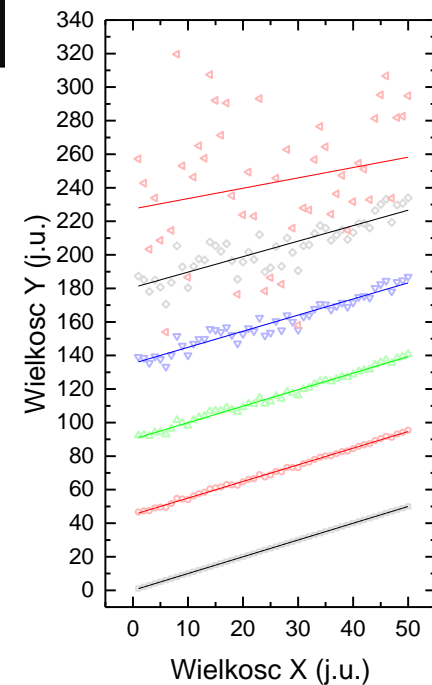
$$a = \frac{W_a}{W_g} \quad ; \quad b = \frac{W_b}{W_g}$$



Analiza błędów (niepewności) pomiarowych

$$a = \frac{n \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}$$

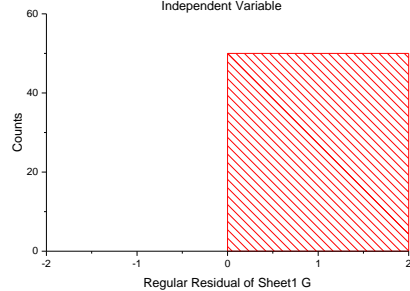
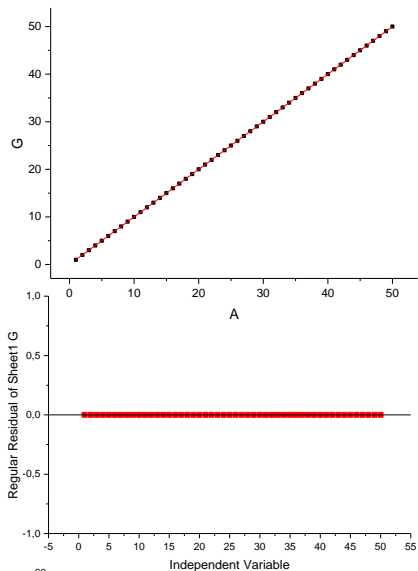
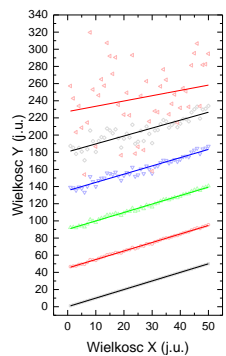
$$b = \frac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}$$



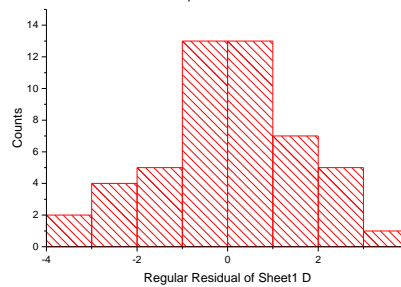
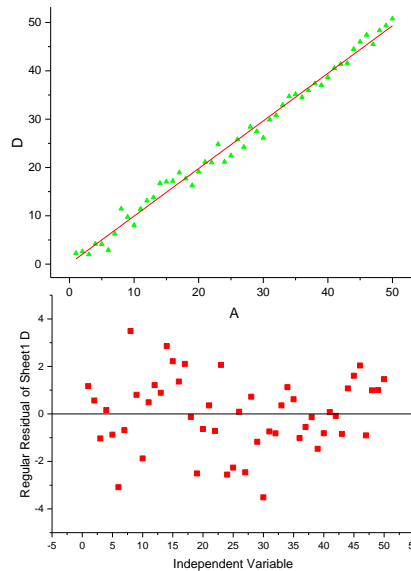
Analiza błędów (niepewności) pomiarowych

$$\frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

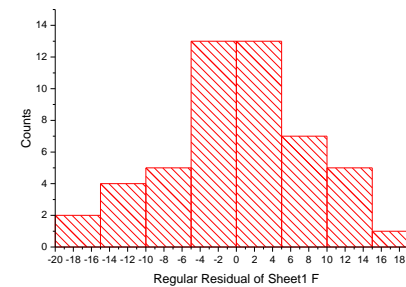
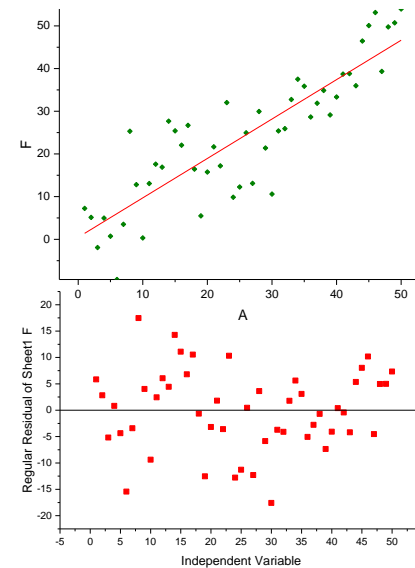
$$\frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$



Equation	$y = a + b \cdot x$
Plot	G
Weight	No Weighting
Intercept	0 ± 0
Slope	1 ± 0
Residual Sum of Squares	0
Pearson's r	1
R-Square(COD)	1
Adj. R-Square	1



Equation	$y = a + b \cdot x$
Plot	D
Weight	No Weighting
Intercept	$0,09511 \pm 0,44639$
Slope	$0,98469 \pm 0,01524$
Residual Sum of Squares	116,00747
Pearson's r	0,9943
R-Square(COD)	0,98864
Adj. R-Square	0,9884



Equation	$y = a + b \cdot x$
Plot	F
Weight	No Weighting
Intercept	$0,47557 \pm 2,23195$
Slope	$0,92343 \pm 0,07618$
Residual Sum of Squares	2900,18669
Pearson's r	0,86821
R-Square(COD)	0,75379
Adj. R-Square	0,74866



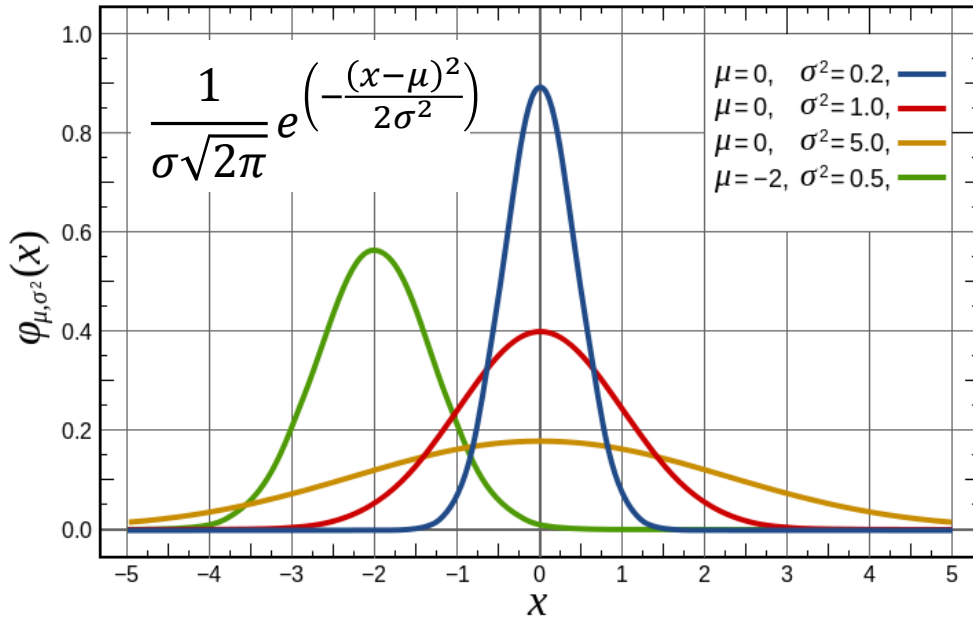
Carl Friedrich Gauß (Gauss) (1777-1855) – niemiecki matematyk (zajmował się również teorią rachunku różniczkowego i całkowego, teorią szeregów, metodami pomiarów geodezyjnych, statystyką matematyczną, geometrią sferyczną), fizyk (przeprowadzał badania

magnetyzmu i elektryczności, wprowadził takie pojęcia jak oś optyczna soczewki, odległość ogniskowa, ognisko i środek soczewki), astronom i geodeta. Uznawany jest za jednego z twórców geometrii nieeuklidesowej.

W roku 1833 wspólnie z Weberem zbudował pierwszy w Niemczech telegraf elektromagnetyczny.

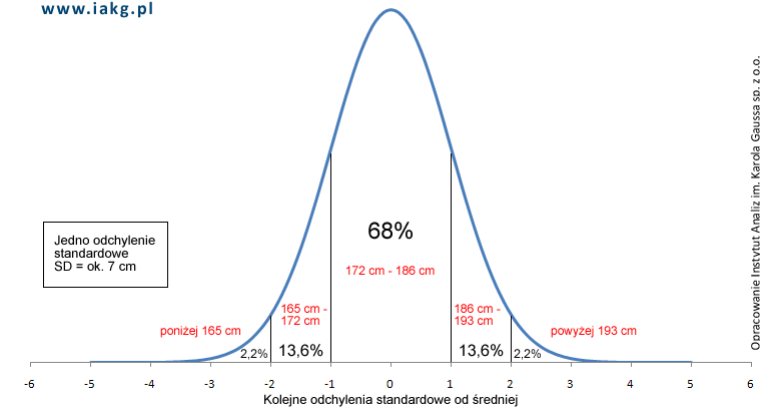
Jego badania związane z teorią błędów doprowadziły do odkrycia rozkładu normalnego zmiennej losowej (nazywany także rozkładem Gaussa), który jest najważniejszym rozkładem w teorii prawdopodobieństwa.

Prawo Gaussa

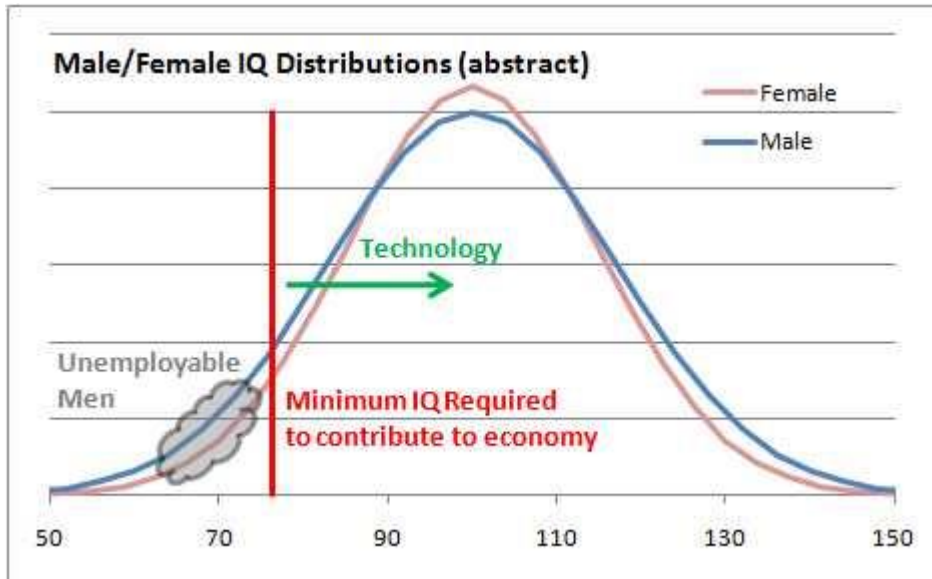


IA Instytut Analiz
im. Karola Gaussa
www.iakg.pl

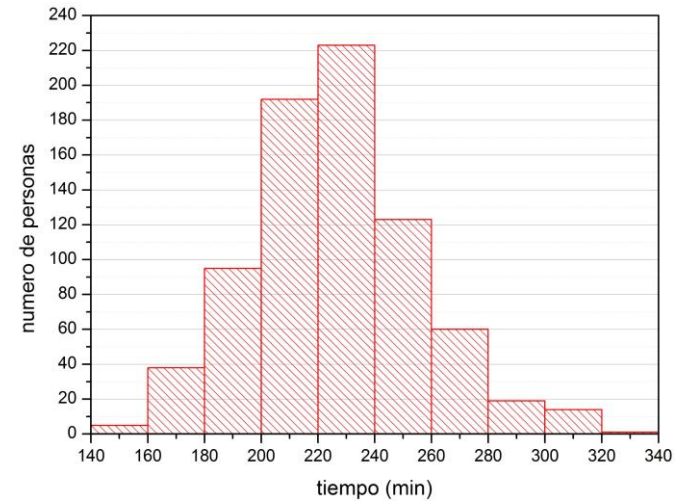
Krzywa Gaussa - wzrost



Opracowanie: Instytut Analiz im. Karola Gaussa sp. z o.o.



Czas przebycia 42km



Błąd średni kwadratowy (odchylenie standardowe) pojedynczego pomiaru

$$u(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

Odchylenie standardowe wartości średniej

$$u(\bar{X}) = \sqrt{s_{\bar{X}}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}$$

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k) \quad X_1, X_2, \dots, X_k \quad \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$$

$$Y \approx \bar{Y} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k) \quad u(X_1), u(X_2), \dots, u(X_k)$$

$$u_c(Y) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left[\frac{\partial f}{\partial X_j}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k) \right]^2 u^2(\bar{X}_j)}$$

$$u_c = \sum_{j=1}^k \left| \frac{\partial f(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k)}{\partial X_j} \right| u(\bar{X}_j)$$

Analiza błędów (niepewności) pomiarowych

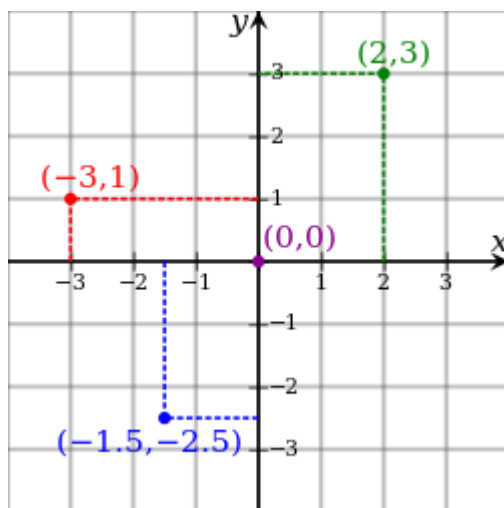
Wyniki pomiaru zapisujemy zawsze łącznie z błędem (niepewnością) i jednostką. Błędy (niepewność) podajemy zawsze z dokładnością do jednej cyfry znaczącej z wyjątkiem sytuacji gdy pierwszą cyfrą znaczącą jest jedynka; wówczas podajemy dwie cyfry znaczące. Liczbę cyfr znaczących wyniku dobieramy tak, aby ostatnia cyfra rezultatu i niepewności należały do tego samego rzędu. Korzystamy na ogół z zapisu z wykorzystaniem symbolu \pm lub z użyciem nawiasów.

Wynik pomiaru



wartość pomiaru \pm błąd pomiarowy

Układy odniesienia 2D: kartezjański i biegunowy



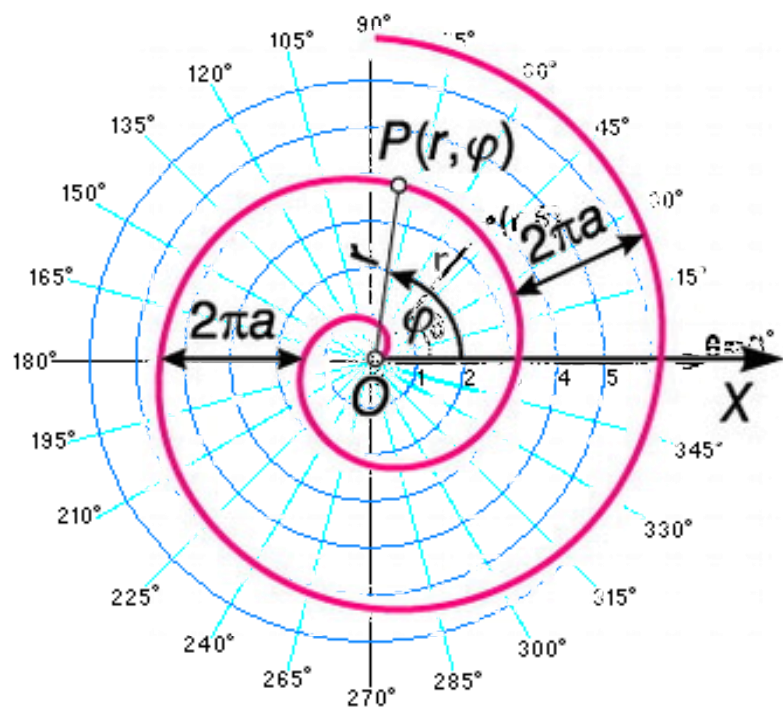
$P(x, y)$

Grégoire de Saint-Vincent



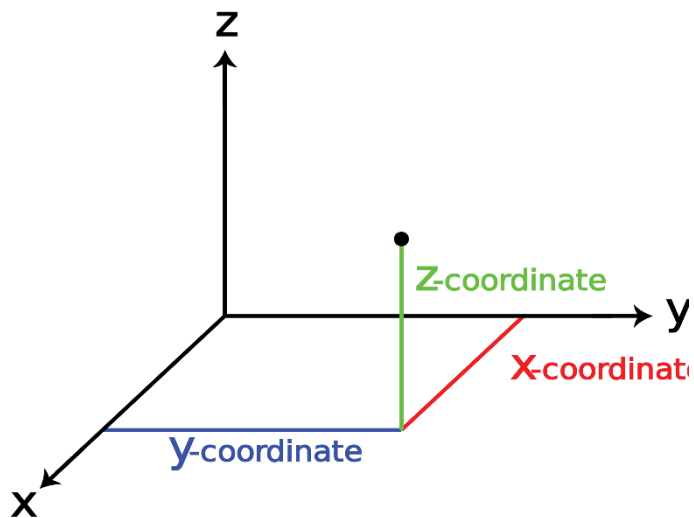
Bonaventura
Francesco Cavalieri

Bonaventura

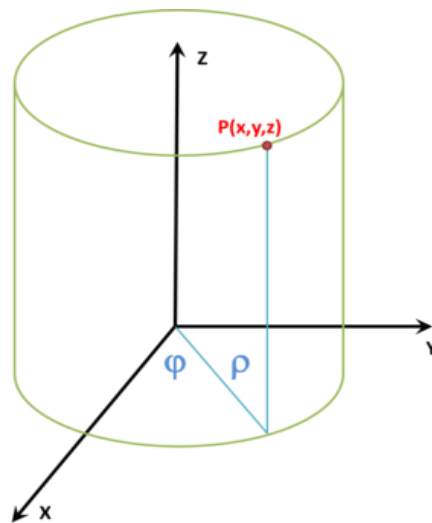


$P(r, \theta)$

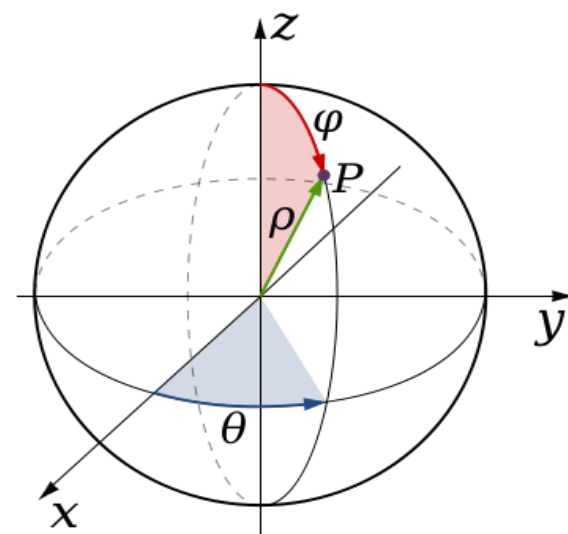
Układy odniesienia 3D: kartezjański, cylindryczny i sferyczny



$P(x, y, z)$

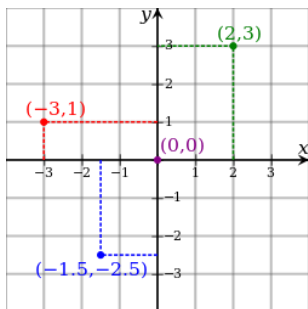


$P(\phi, r, z)$



$P(r, \phi, \vartheta)$

Układy odniesienia 3D: kartezjański, cylindryczny i sferyczny

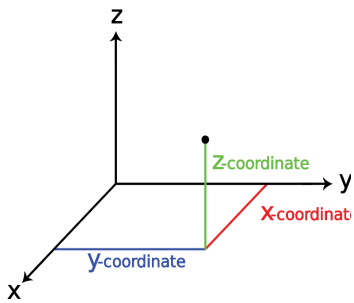
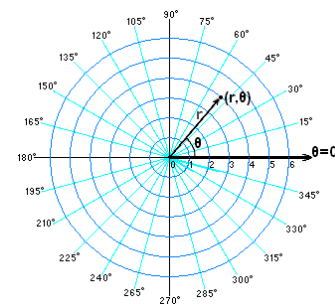


$$x = r \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \theta$$

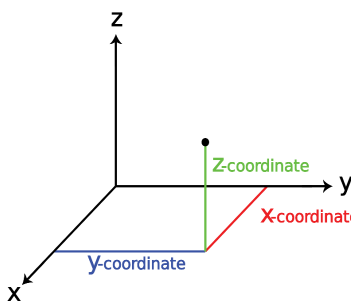
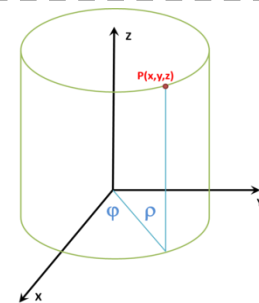
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \\ &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \end{aligned}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

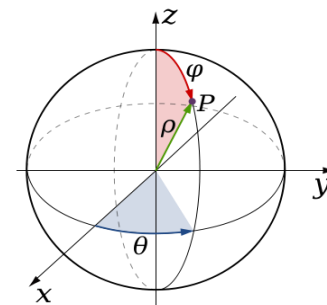
$$\frac{x}{y} = \left(\frac{r \cos \theta}{r \sin \theta} \right)^{-1} = \tan \theta = \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$



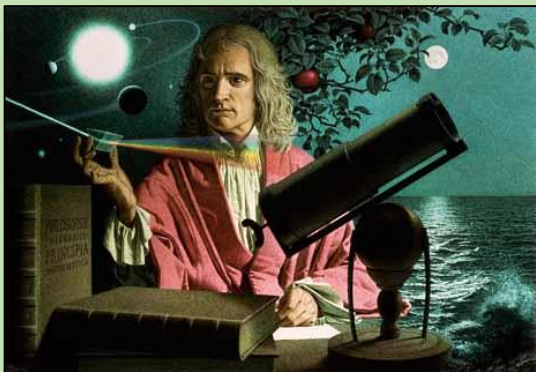
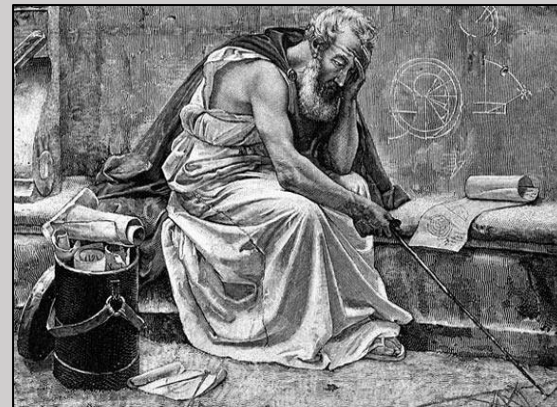
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ \varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \end{cases}$$



Archimedes (III wiek p.n.e.): *O kuli i walcu* – wyprowadza wzory na pole powierzchni i objętość kuli, walca i czasy kulistej. W dziele *Elementy mechaniki* wyłożył podstawy mechaniki teoretycznej (głównie statyki). Zajmował się również astronomią – opisał ruch pięciu planet, Słońca i Księżyca wokół nieruchomej Ziemi, zbudował globus i planetarium z hydraulicznym napędem



Isaac Newton (1642-1727) – angielski fizyk, matematyk, astronom, filozof, historyk, badacz Biblii i alchemik. Odkrywca trzech zasad dynamiki, przedstawił prawo powszechnego ciężenia oraz prawa ruchu, leżące u podstaw mechaniki klasycznej, niezależnie od Gottfrieda Leibniza przyczynił się do rozwoju rachunku różniczkowego i całkowego, podał matematyczne uzasadnienie dla praw Keplera i rozszerzył je udowadniając, że orbity są nie tylko eliptyczne, ale mogą być też hiperboliczne i paraboliczne, głosił, że światło ma naturę korpuskularną, czyli że składa się z cząstek, którym towarzyszą fale decydujące o ruchu rozchodzenia się światła, zdał sobie sprawę, że widmo barw obserwowane podczas padania białego światła na pryzmat jest cechą padającego światła, a nie pryzmatu, jak głosił 400 lat wcześniej Roger Bacon.



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) – niemiecki filozof, matematyk, prawnik, inżynier-mechanik, fizyk, historyk i dyplomata.

W filozofii starał się rozwinąć myśli Kartezjusza, wprowadzając pojęcie monad rozwiązać dylemat dualizmu systemu kartezjańskiego.

W matematyce, niezależnie od Newtona, stworzył rachunek różniczkowy, przy czym jego notacja tego rachunku okazała się praktyczniejsza. Podał pojęcie całki jako sumy nieskończonej liczby różniczek i wprowadził jej symbol.

Jako inżynier–mechanik Leibniz zajmował się konstrukcją zegarów, maszyn wydobywczych i zbudował jedną z pierwszych mechanicznych maszyn liczących.

W fizyce stworzył pojęcie momentu pędu i momentu siły.

Pochodne i całki

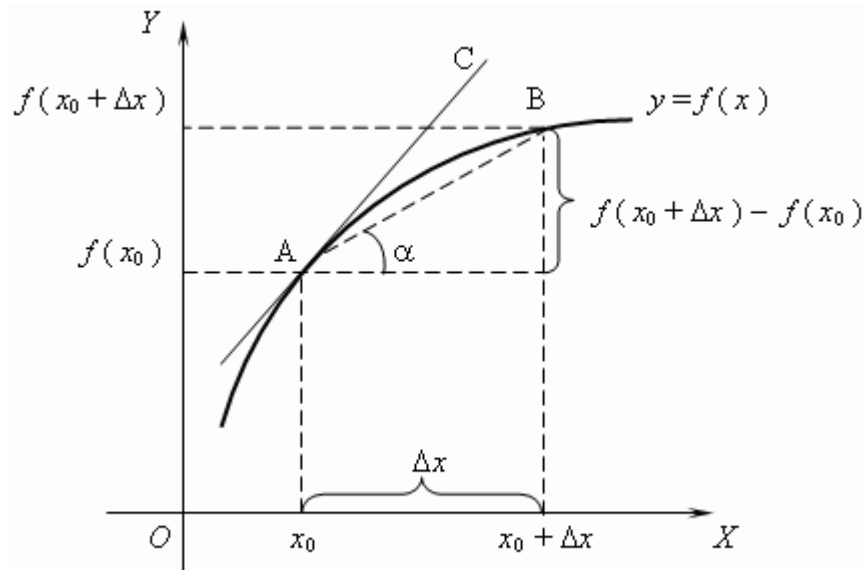


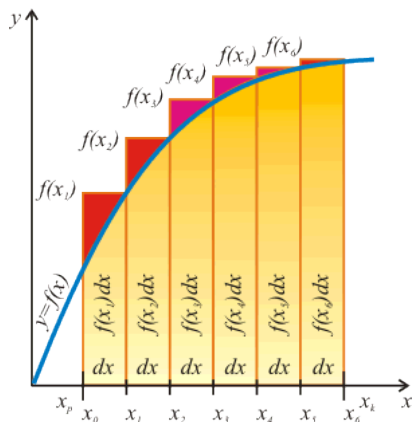
Fig. 1

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$	$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln(a)$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}, x > 0$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{x \ln a}, x > 0$

$[f + g]' = f' + g'$	
$[f - g]' = f' - g'$	
$[fg]' = f'g + fg'$	product rule
$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	quotient rule
$[g(f)]' = g'(f) \cdot f'$	chain rule

Pochodne i całki



$$P = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot dx \quad \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \quad P = C + \int f(x) dx$$

Całka nieoznaczona +

- Warunki początkowe = Całka oznaczona
- Warunki brzegowe

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3. $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$
10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$
11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + q}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + q} \right| + C$

1. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
3. $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$



Johannes Kepler (1571-1630) – niemiecki matematyk, astronom i astrolog, jedna z czołowych postaci rewolucji naukowej w XVII wieku. Najbardziej znany jest z nazwanych jego nazwiskiem praw ruchu planet, skodyfikowanych przez późniejszych

astronomów na podstawie jego prac *Astronomia nova*, *Harmonices Mundi* i *Epitome astronomiae Copernicanae*. Prawa te wykorzystano do potwierdzenia słuszności teorii grawitacji Izaaka Newtona.

Poza badaniami astronomicznymi prowadził badania w zakresie optyki i ulepszył teleskop soczewkowy Galileusza.

Kepler w swoich pracach używał argumentów religijnych, wychodząc z założenia, że Bóg stworzył świat zgodnie z inteligentnym planem, który można poznać za pomocą rozumu.



Galileusz (1564-1642) – włoski astronom, astrolog, matematyk, fizyk i filozof, prekursor nowożytnej fizyki, udoskonał tzw. „kompas geometryczny i wojskowy”, wykonał eksperyment dowodzący, że czas trwania spadku swobodnego nie zależy od masy ciała, badał staczanie się kul po równi pochyłej, skonstruował termometr.

