FIZYKA I
Wykład V

Drgania, fale: własności sprężyste ciał (I)

Rodzaj naprężenia

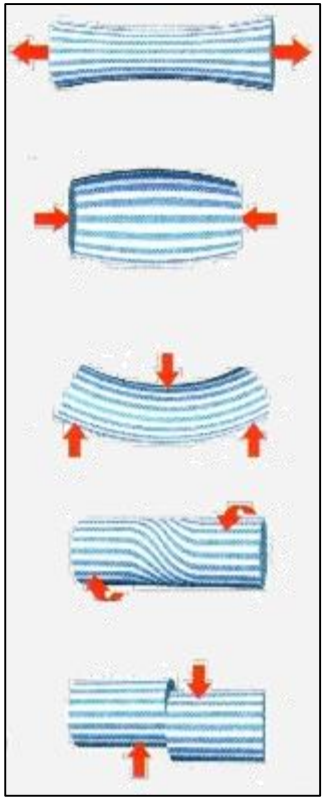
Rozciągające

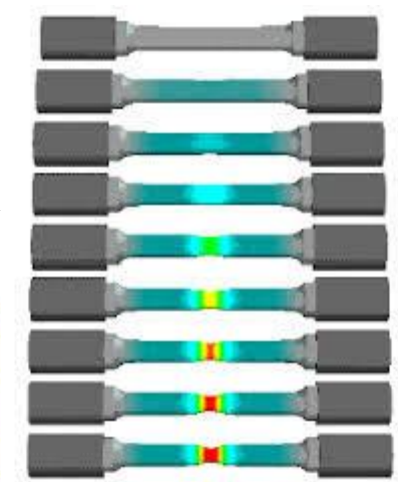
Ściskające

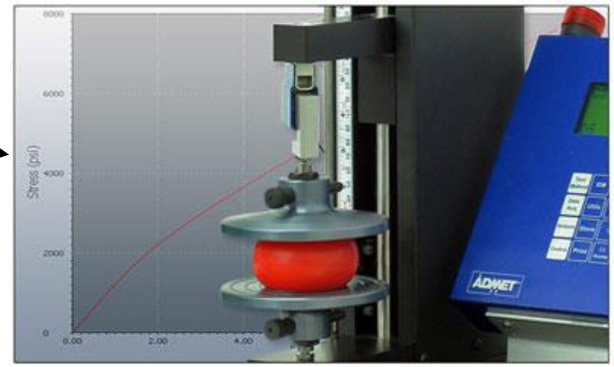
Zginające

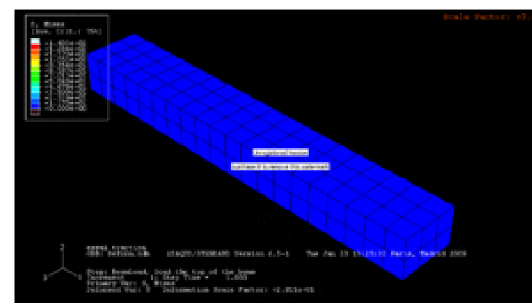
Skręcające

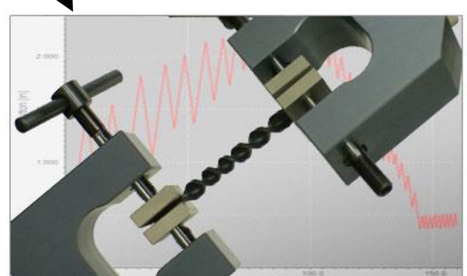
Ścinające



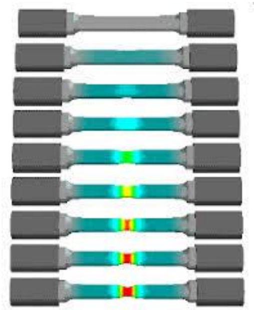


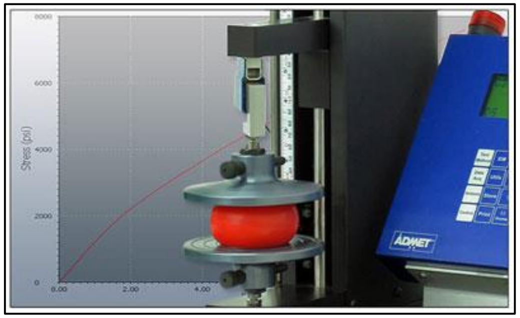


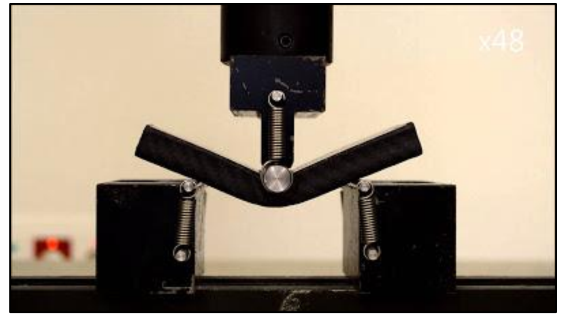


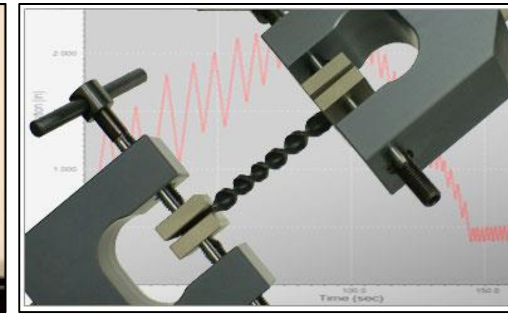


Drgania, fale: własności sprężyste ciał (II)







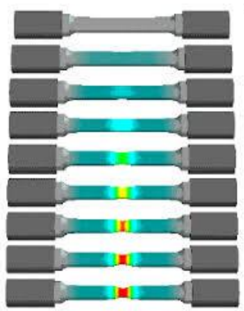


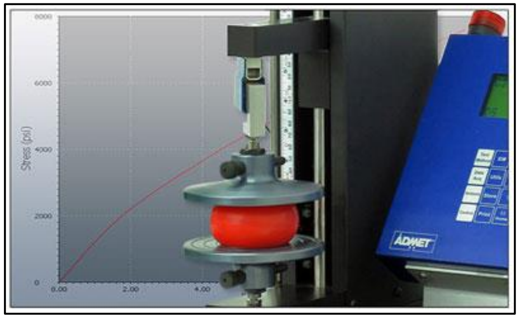
1. Względne odkształcenie ciała zależy od naprężenia.

2. naprężenie to siła odkształcająca odniesiona do jednostki pola powierzchni, na jaką działa.

3. naprężenie = (moduł sprężystości) · (odkształcenie), gdy ciało wraca do pierwotnego kształtu.

Drgania, fale: własności sprężyste ciał (III)





Rozciąganie i ściskanie:

Naprężenie σ definiuje się jako:

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{S}}$$

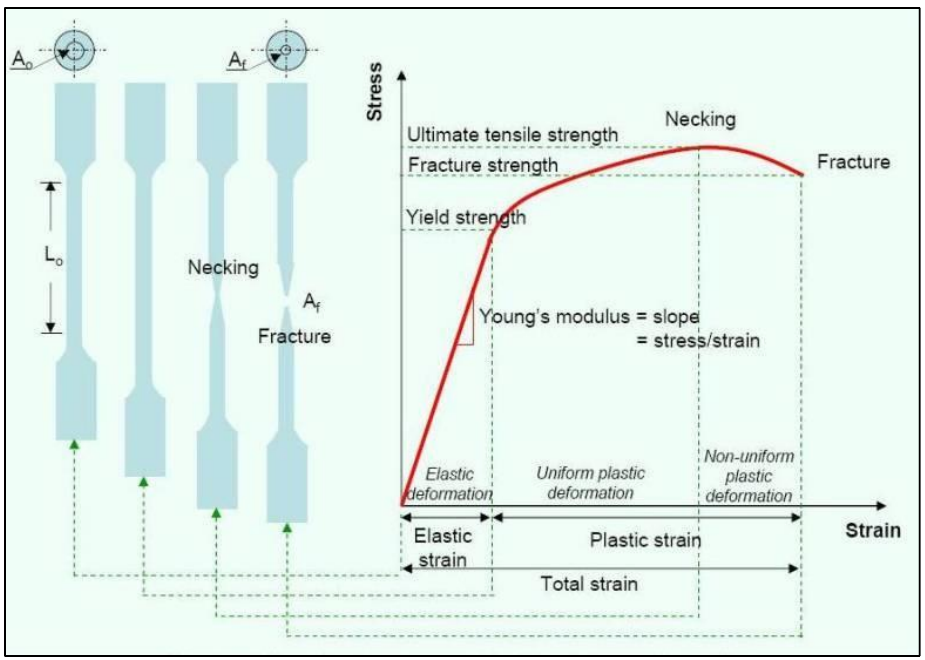
gdzie F jest wartością siły przyłożonej do ciała w miejscu, w którym ciało ma pole S przekroju **prostopadłego** do kierunku działania siły.

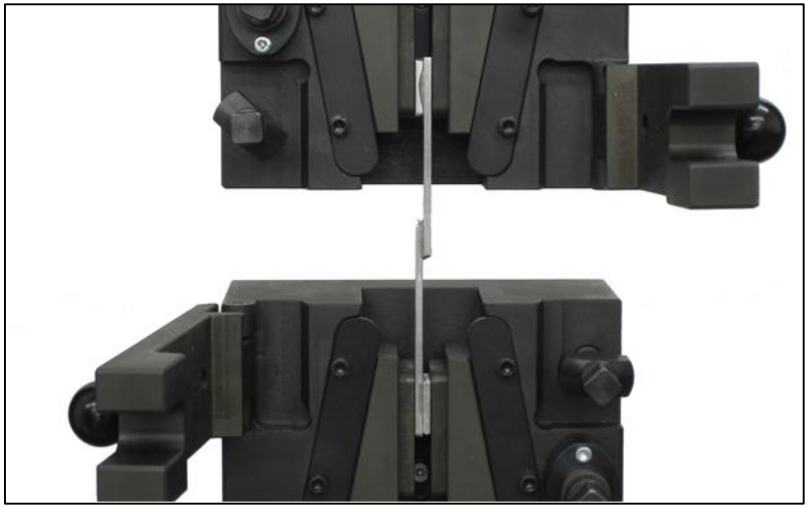
Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa $\frac{\Delta L}{L}$ względna zmiana długości.

W granicach sprężystości czyli dla małych odkształceń obowiązuje prawo Hooke'a:

$$\boxed{\frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta L}{L}}$$

E – moduł Younga



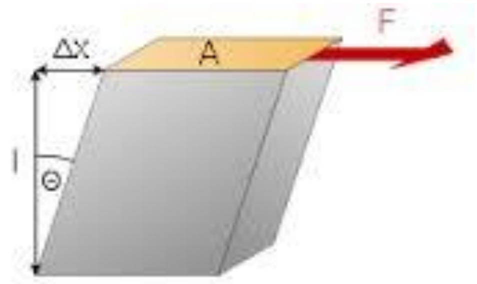


Ścinanie:

Naprężenie σ definiuje się jako:

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{S}}$$

gdzie F jest wartością siły przyłożonej do ciała w miejscu, w którym ciało ma pole S przekroju **<u>równolegle</u>** do kierunku działania siły.



Miarą odkształcenia jest wielkość bezwymiarowa

$\frac{\Delta x}{L}$ względna zmiana długości.

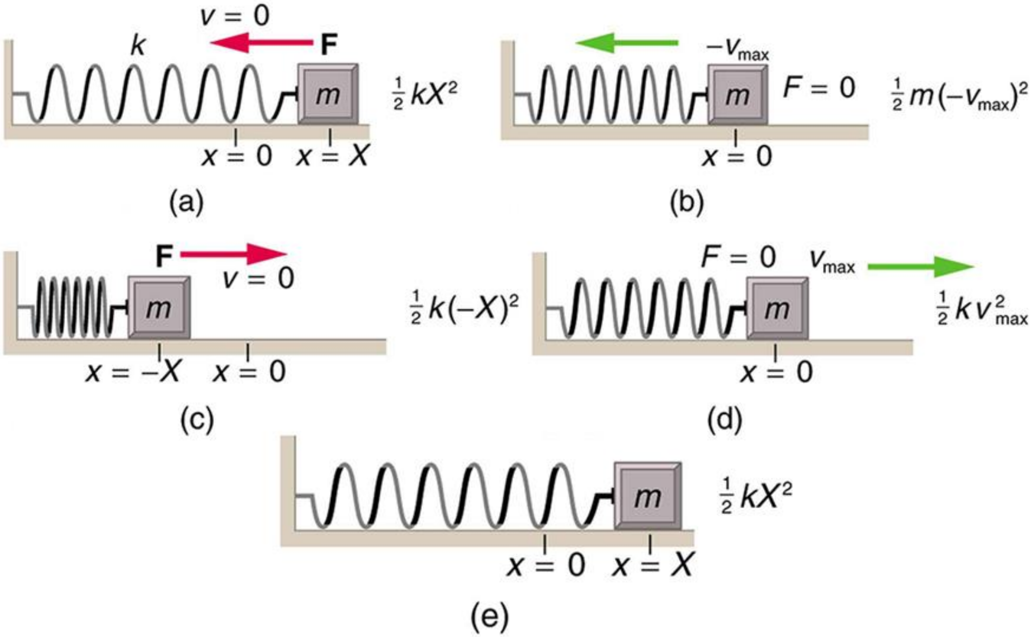
$$\boxed{\frac{F}{S} = G\frac{\Delta x}{L}}$$

G – moduł ścinania

Oscylator harmoniczny

Siła harmoniczna $\boxed{F = -kx}$

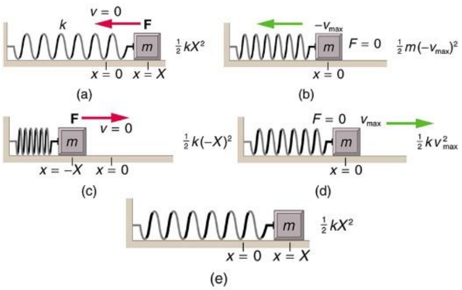
- siła F proporcjonalna do wychylenia x z położenia równowagi
- zwrot siły: do położenia równowagi



Najważniejsze własności oscylatora harmonicznego:

1. Częstość ruchu nie zależy od amplitudy drgań.
2. Jeśli działa wiele sił, to zmiany wywołane sumują się liniowo.

Druga zasada dynamiki dla oscylatora harmonicznego



$$F = ma \Rightarrow ma = -kx \qquad x = x(t)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -kx$$

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

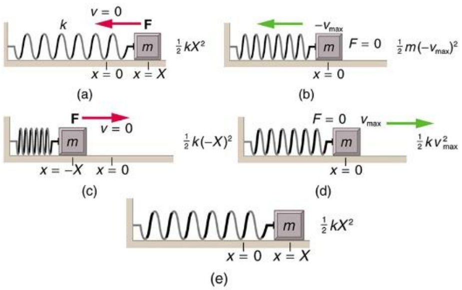
$$x(0) = A\sin\omega 0 + B\cos\omega 0 = B = 0$$

$$\frac{d}{dt}x = A\omega\cos\omega t \qquad \frac{d^2}{dt^2}x = -A\omega^2\sin\omega t$$

$$m(-A\omega^2\sin\omega t) = -k\,A\sin\omega t \Rightarrow m\omega^2 = k$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Druga zasada dynamiki dla oscylatora harmonicznego



$$F = ma \Rightarrow ma = -kx \quad x = x(t)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -kx$$

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$x(0) = A\sin\omega 0 + B\cos\omega 0 = B = 0$$

$$\frac{d}{dt}x = A\omega\cos\omega t \quad \frac{d^2}{dt^2}x = -A\omega^2\sin\omega t$$

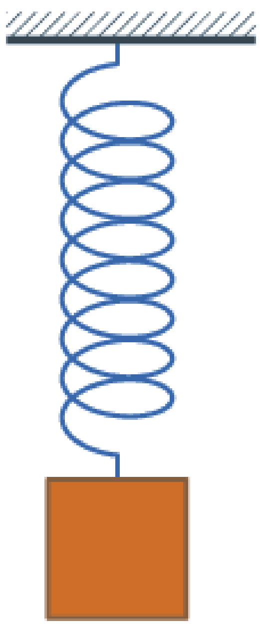
$$m(-A\omega^2\sin\omega t) = -k\,A\sin\omega t \Rightarrow m\omega^2 = k$$

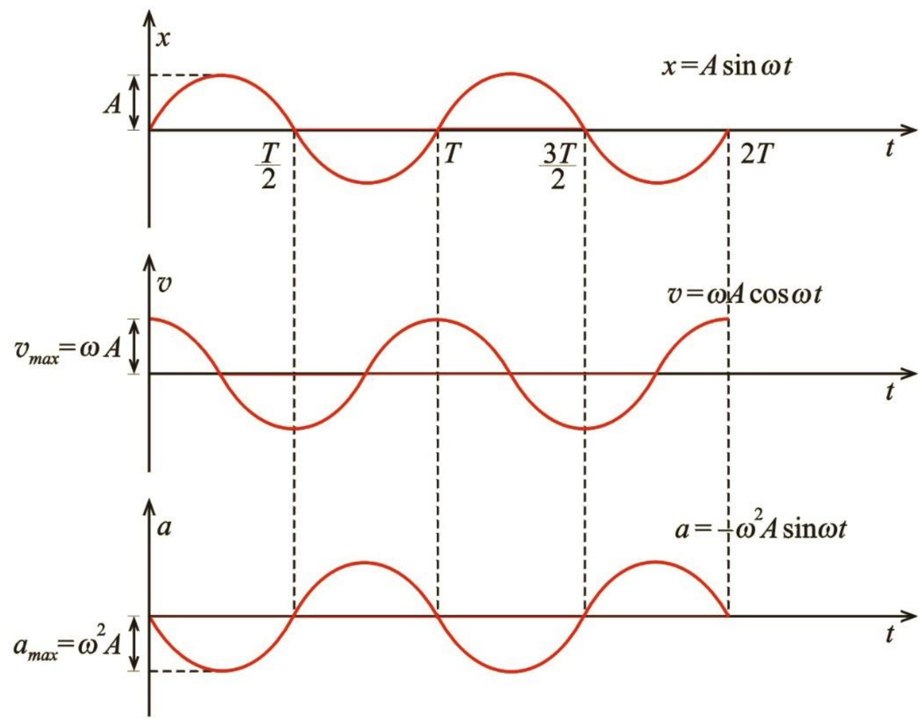
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = A\sin\omega t$$

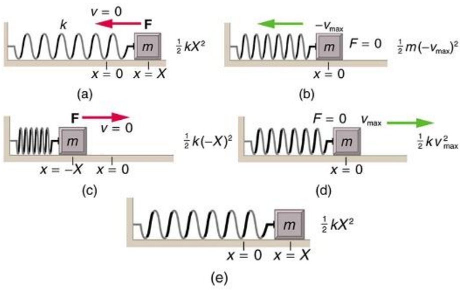
$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \omega A\cos\omega t$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \omega^2 A\cos\omega t$$



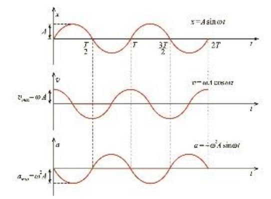


Energia oscylatora harmonicznego (w funkcji czasu)



$$F = ma \Rightarrow ma = -kx \quad x = x(t)$$
$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -kx$$
$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$
$$x(0) = A\sin\omega 0 + B\cos\omega 0 = B = 0$$
$$\frac{d}{dt}x = A\omega\cos\omega t \quad \frac{d^2}{dt^2}x = -A\omega^2\sin\omega t$$
$$m(-A\omega^2\sin\omega t) = -k\,A\sin\omega t \Rightarrow m\omega^2 = k$$
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

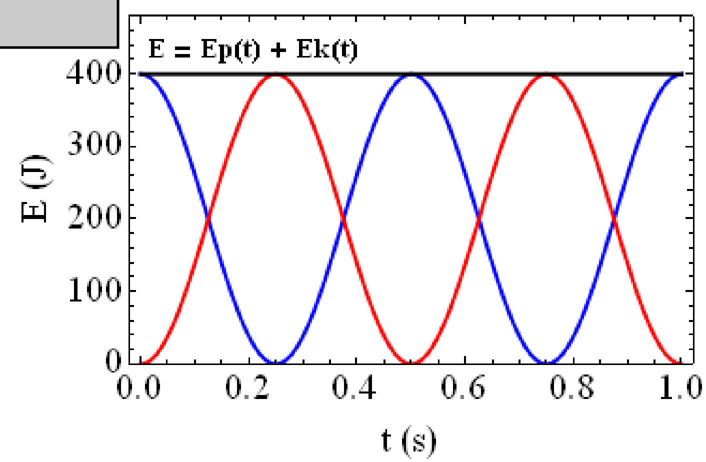
$$x(t) = A\sin\omega t$$
$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \omega A\cos\omega t$$
$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \omega^2 A\cos\omega t$$



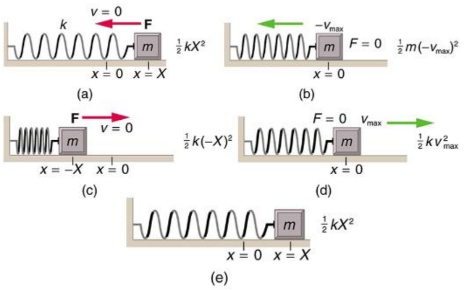
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\,A^2\sin^2\omega t$$ Energia potencjalna sprężystości

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2\,A^2\cos^2\omega t$$ Energia kinetyczna

$$E_c = E_p + E_k = \frac{1}{2}k\,A^2\sin^2\omega t + \frac{1}{2}m\,\omega^2\,A^2\cos^2\omega t = \frac{1}{2}m\,\omega^2\,A^2\sin^2\omega t + \frac{1}{2}m\,\omega^2\,A^2\cos^2\omega t =$$
$$= \frac{1}{2}m\,\omega^2\,A^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = \frac{1}{2}m\,\omega^2\,A^2$$



Energia oscylatora harmonicznego (w funkcji wychylenia)



$$F = ma \Rightarrow ma = -kx \quad x = x(t)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -kx$$

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$x(0) = A\sin\omega 0 + B\cos\omega 0 = B = 0$$

$$\frac{d}{dt}x = A\omega\cos\omega t \quad \frac{d^2}{dt^2}x = -A\omega^2\sin\omega t$$

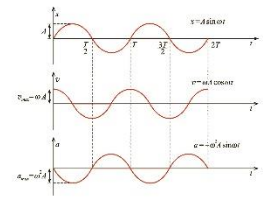
$$m(-A\omega^2\sin\omega t) = -k\,A\sin\omega t \Rightarrow m\omega^2 = k$$

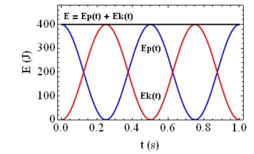
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = A\sin\omega t$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \omega A\cos\omega t$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \omega^2 A\cos\omega t$$

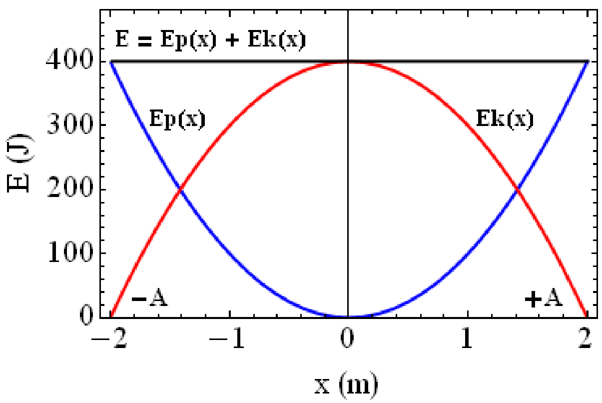




$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2\omega t$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\,A^2\sin^2\omega t$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$



$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow E_p(0) = 0, E_p(A) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_k = E - E_p = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_k(A) = 0, E_k(0) = \frac{1}{2}kA^2$$

Wahadło matematyczne

$$F = mg \quad F_s = mg\sin\theta \quad F_N = mg\cos\theta$$

$$\theta << 1\,rad \quad \sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots$$

$$\theta = \frac{d}{l} \quad \theta << 1\,rad \Rightarrow d \approx x$$

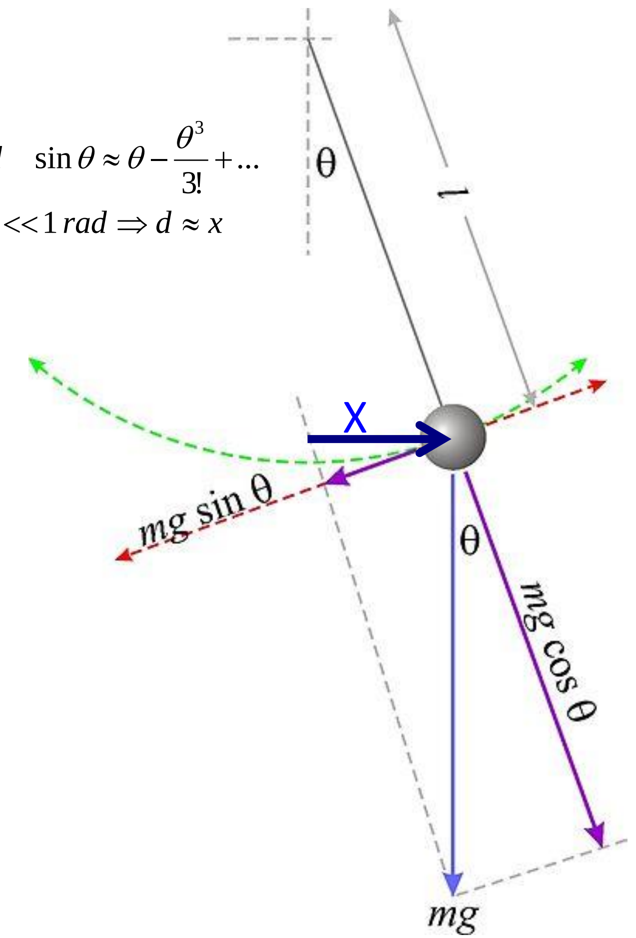
$$F_s \approx mg\theta$$

$$F_s \approx mg\frac{d}{l} \approx mg\frac{x}{l} = \frac{mg}{l}x = k\,x \quad k = \frac{mg}{l}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m}\frac{mg}{l} = \frac{g}{l} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

$$4\pi^2\nu^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \nu^2 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{g}{l} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$



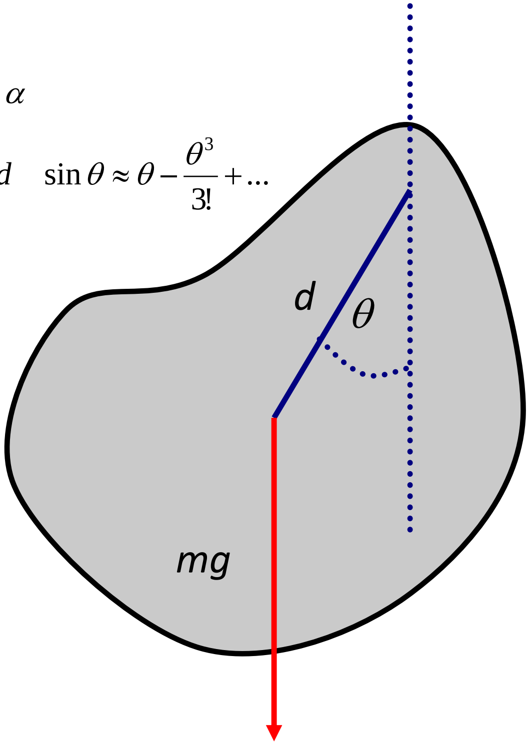
Wahadło fizyczne

$$\begin{cases} M = I\varepsilon = I\dfrac{d^2}{dt^2}\theta \\ M = -dmg\sin\theta = -k\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} \quad \left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|\sin\alpha$$

$$M = dmg\sin\theta \quad \theta << 1\,rad \quad \sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots$$

$$M \approx dmg\theta$$



$$I\frac{d^2}{dt^2}\theta = -dmg\sin\theta = -k\sin\theta$$

$$\theta(t) = \theta_0\sin\omega t \quad \frac{d\theta}{dt} = \theta_0\omega\cos\omega t \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_0\omega^2\sin\omega t$$

$$I(-\theta_0\omega^2\sin\omega t) = -k\theta_0\sin\omega t \Rightarrow I\omega^2 = k \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{I}$$

$$M = -k\theta \Rightarrow dmg = k = \omega^2 I \Rightarrow \omega^2 = \frac{dmg}{I} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{dmg}}}$$

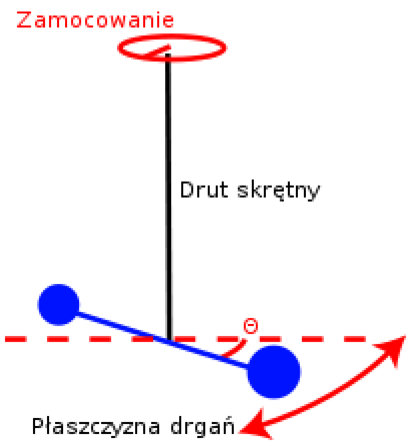
Wahadło torsyjne

$$I\frac{d^2}{dt^2}\theta = -k\theta$$

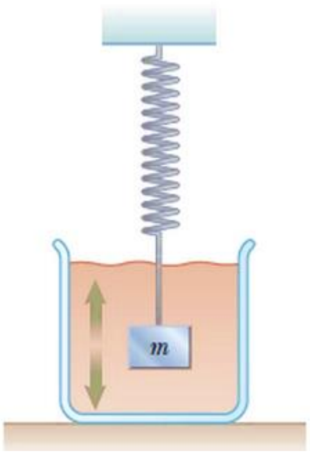
$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \frac{k}{I}\theta = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \omega\theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}}$$



Oscylator harmoniczny tłumiony



$$F = -k\,x - F_T \quad F_T \propto N \quad F_T \propto \frac{dx}{dt} \quad F_T \propto \frac{d^2x}{dt^2} \quad F_T \propto \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Z II zasady dynamiki Newtona $\quad F = -k\,x - \gamma\frac{dx}{dt}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - \gamma\frac{dx}{dt} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + k\,x = 0$$

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin\omega t$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\beta e^{-\beta t}\sin\omega t + Ae^{-\beta t}\omega\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 Ae^{-\beta t}\sin\omega t - 2\omega\beta Ae^{-\beta t}\cos\omega t - \omega^2 Ae^{-\beta t}\sin\omega t$$

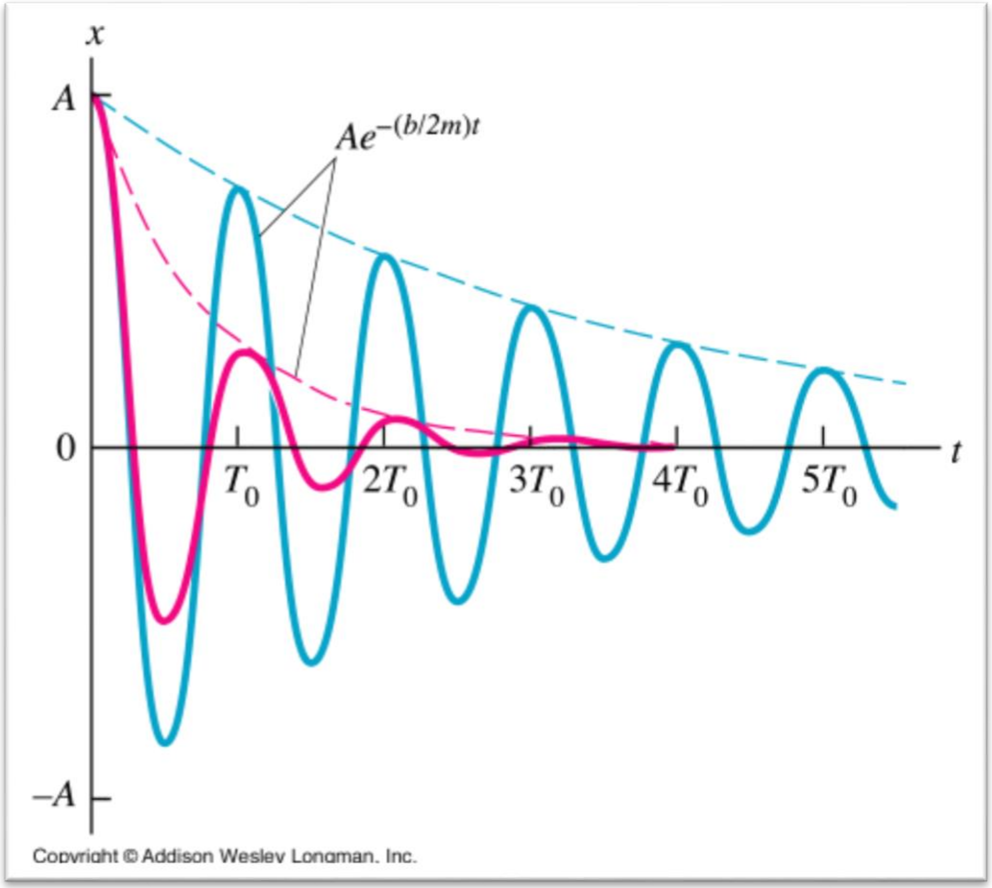
$$m\left(\beta^2 Ae^{-\beta t}\sin\omega t - 2\omega\beta Ae^{-\beta t}\cos\omega t - \omega^2 Ae^{-\beta t}\sin\omega t\right) + \gamma\left(Ae^{-\beta t}\omega\cos\omega t - A\beta e^{-\beta t}\sin\omega t\right) + kAe^{-\beta t}\sin\omega t = 0$$

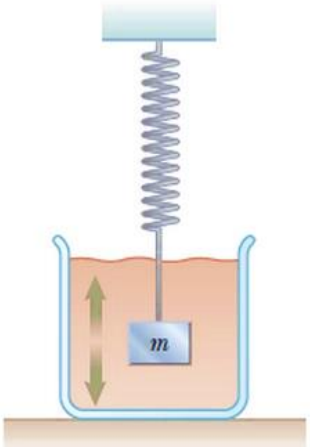
$$\beta = \frac{\gamma}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Oscylator harmoniczny tłumiony

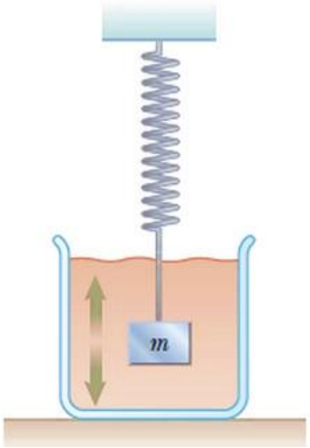
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+k\,x=0$$

$$\beta=\frac{\gamma}{2m}\qquad \omega_0^2=\frac{k}{m}\qquad \omega^2=\omega_0^2-\beta^2\qquad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$





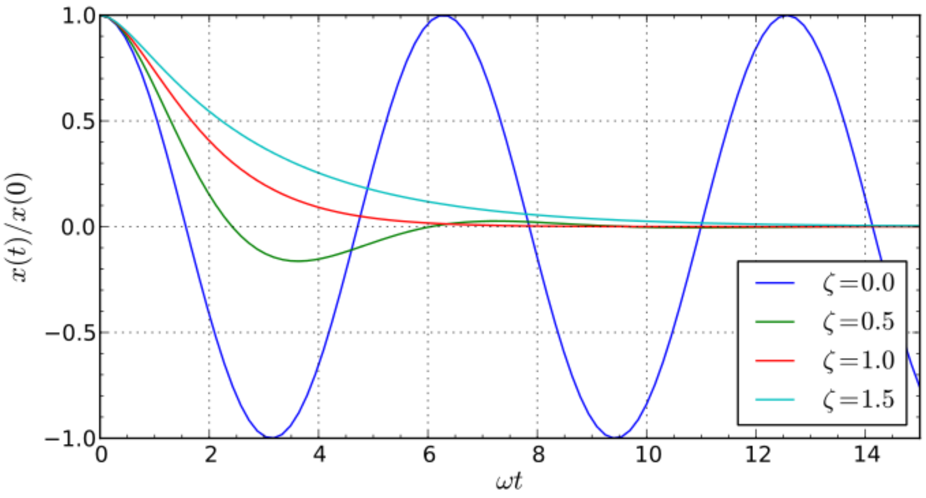
Oscylator harmoniczny tłumiony



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+k\,x=0$$

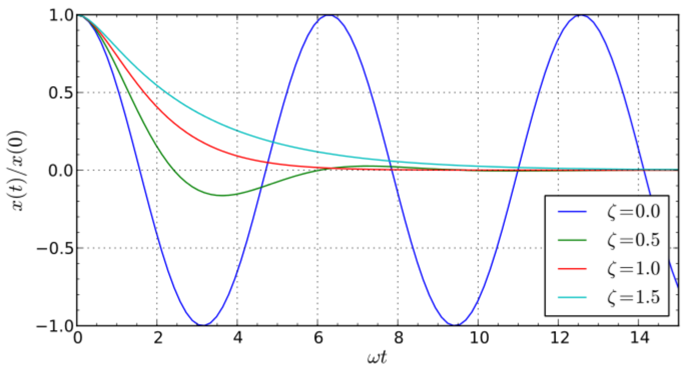
$$\beta=\frac{\gamma}{2m}\qquad \omega_0^2=\frac{k}{m}\qquad \omega^2=\omega_0^2-\beta^2\qquad \omega\;=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

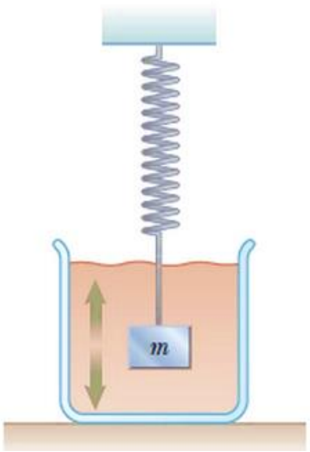
Gdy $\underline{\beta=\omega_0}$ występuje wtedy *tłumienie krytyczne*.



Gdy tłumienie (opór) stanie się dostatecznie duże $\underline{(\beta>\omega_0)}$ ruch *przestaje być ruchem drgającym*, a ciało wychylone z położenia równowagi powraca do niego asymptotycznie - *ruchem aperiodycznym*. Przykładem takiego ruchu jest ruch w bardzo gęstym ośrodku (np. w miodzie).

Oscylator harmoniczny tłumiony





Logarytmiczny dekrement tłumienia Λ jest to logarytm naturalny ze stosunku kolejnych amplitud

$$A(t) = A_0 e^{\left(\frac{-\beta}{2m} t\right)}$$

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = -\ln \frac{A(t+T)}{A(t)} = -\ln \frac{e^{-\beta(t+T)}}{e^{-\beta t}} = \beta T$$

Oscylator harmoniczny tłumiony z wymuszeniem

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+k\,x=F(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2\,x=\frac{F(t)}{m}$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\qquad\frac{F(t)}{m}=\frac{F_0\sin\omega t}{m}\equiv\alpha_0\sin\omega t\qquad\alpha_0=\frac{F_0}{m}\qquad\beta=\frac{\gamma}{2m}$$

Zakładamy periodyczne wymuszenie w postaci siły wymuszającej

$$x(t)=x_0\sin(\omega t+\varphi)\qquad\frac{dx}{dt}=\dots\qquad\frac{d^2x}{dt^2}=\dots$$

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)x_0\sin(\omega t+\varphi)+2\beta\omega\cos(\omega t+\varphi)=\alpha_0\sin\omega t$$

$$\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\varphi-2\beta\omega\sin\varphi\right)x_0\sin\omega t+\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\varphi+2\beta\omega\cos\varphi\right)x_0\cos\omega t=\alpha_0\sin\omega t$$

$$\begin{cases}(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi+2\beta\omega\cos\varphi=0\\ \left((\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi-2\beta\omega\sin\varphi\right)x_0=\alpha_0\end{cases}$$

$$x_0=\frac{\alpha_0}{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi-2\beta\omega\sin\varphi}$$

$$\sin\varphi=\frac{-2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}}\qquad\cos\varphi=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}}$$

$$tg\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Otrzymujemy drgania „niegasnące”, jak dla prostego oscylatora harmonicznego, o amplitudzie niezależnej od czasu, ale

1. amplituda x_0 jest funkcją częstości wymuszenia
2. przesunięcie fazowe (kąt o jaki maksimum przemieszczenia x wyprzedza maksimum siły wymuszającej F) nie jest dowolną stałą lecz jest również ściśle określone przez częstość wymuszenia

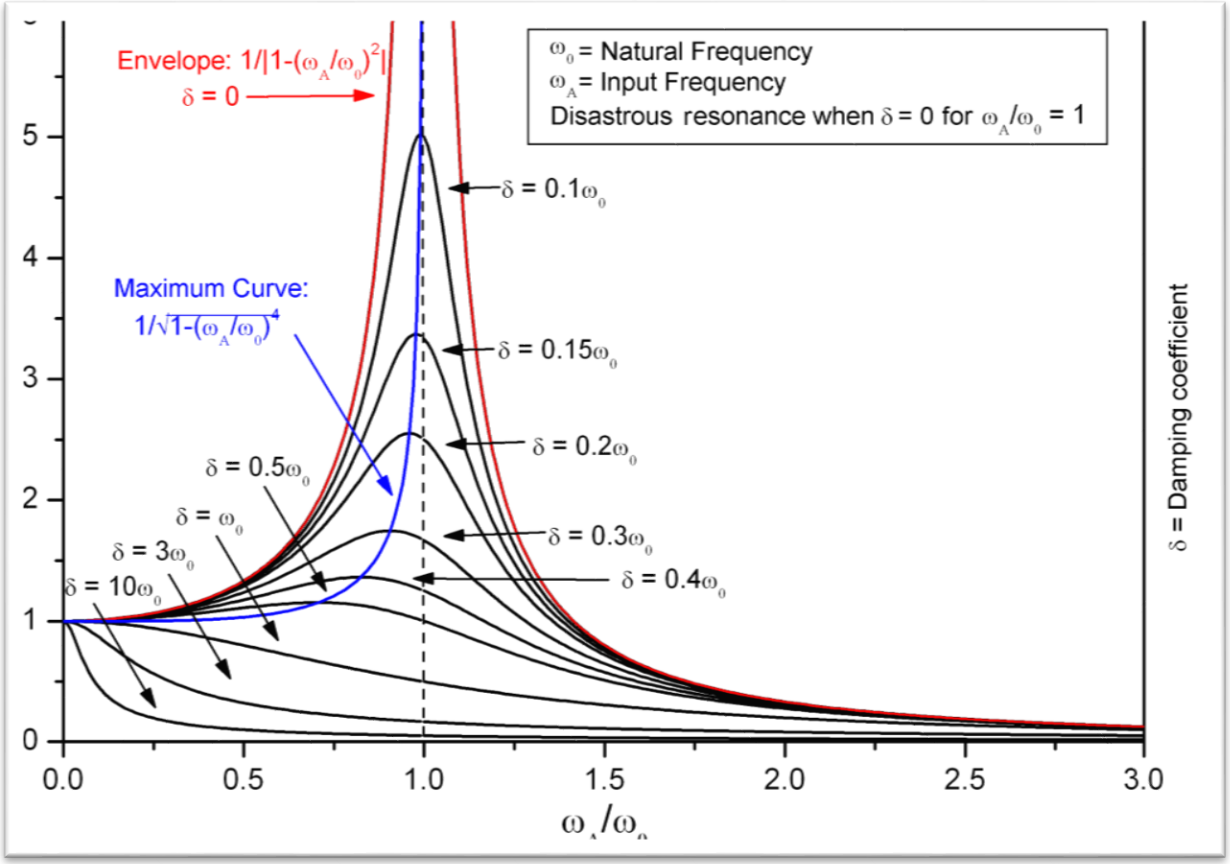
Oscylator harmoniczny tłumiony z wymuszeniem

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+k\,x=F(t)$$

$$x_0=\frac{\alpha_0}{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi-2\beta\omega\sin\varphi}$$

$$tg\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

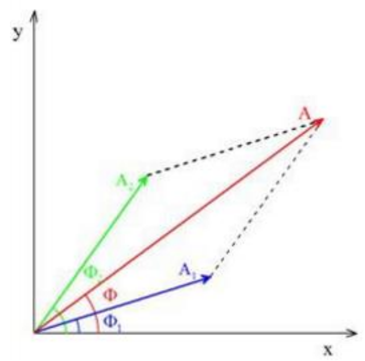
Rezonans występuje gdy amplituda osiąga wartość maksymalną co w praktyce oznacza gdy częstość wymuszenia zbliża się do częstości drgań własnych.

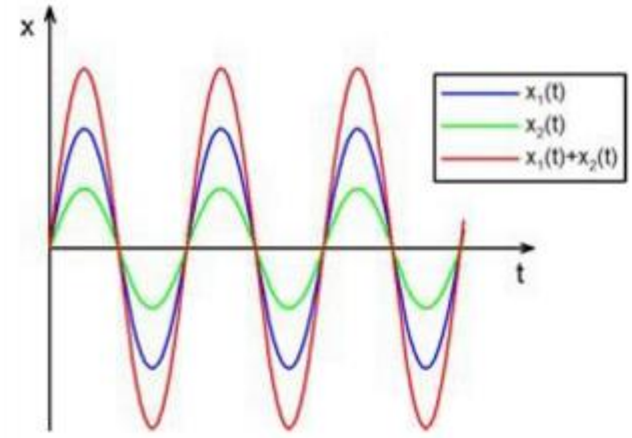


Drgania, fale: oscylator harmoniczny (XIV)

Składanie drgań zachodzących w tym samym kierunku

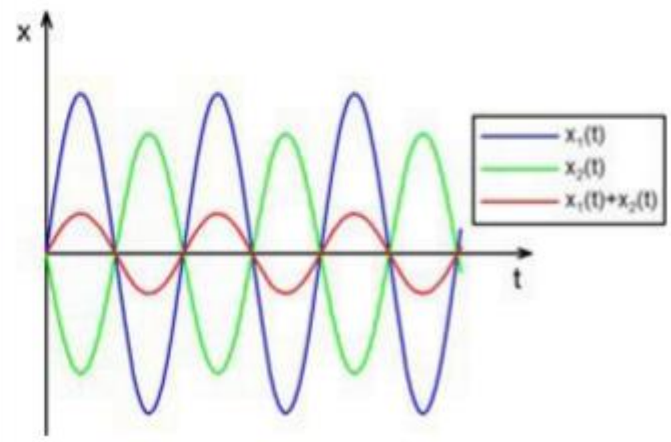
$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$





$$(\varphi_2 - \varphi_1) = 2n\pi$$

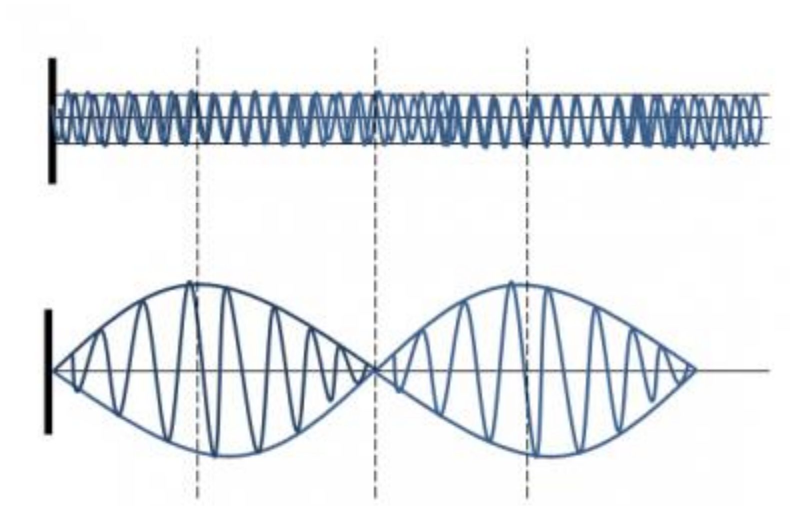
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$
$$tg\varphi = \frac{A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{A_1 + A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}$$



$$(\varphi_2 - \varphi_1) = (2n+1)\pi$$

Składanie drgań zachodzących w tym samym kierunku

Nakładanie się drgań o bardzo zbliżonych częstościach: dudnienia

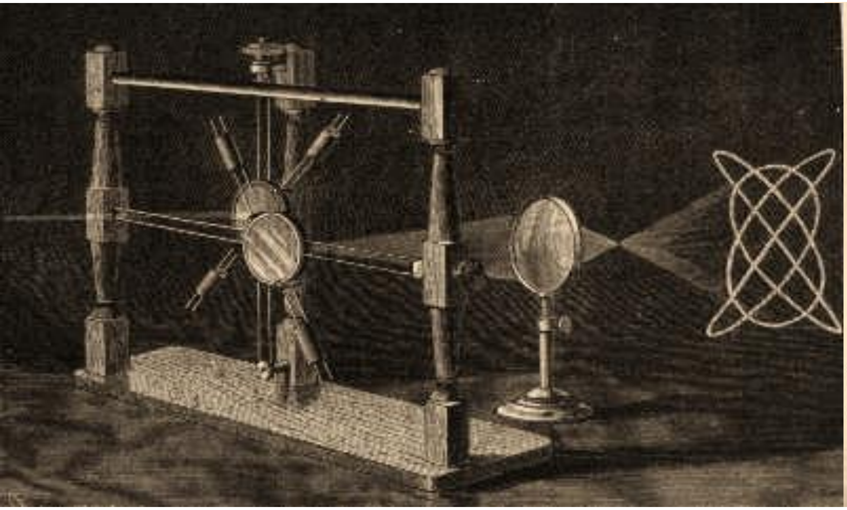


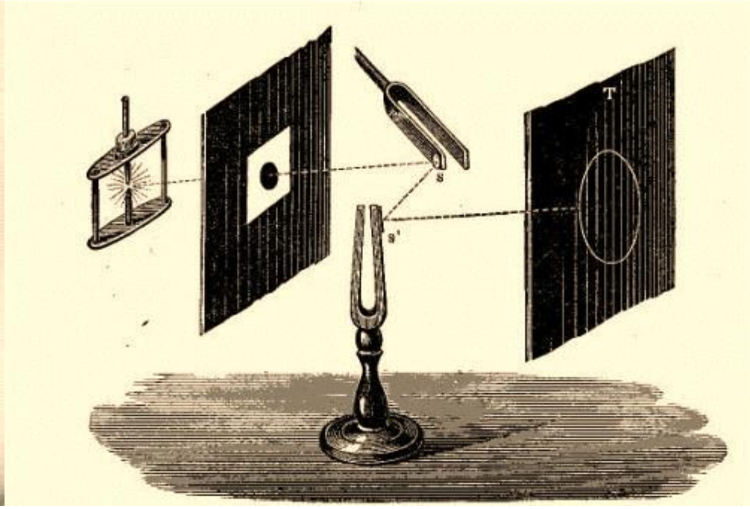
$$x_1(t) = A\cos\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t$$

$$x_2(t) = A\cos\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\left[\cos\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t + \cos\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right] = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin\omega t$$

Składanie drgań zachodzących w kierunkach prostopadłych





Krzywe Lissajous – Jules Antoine Lissajous (1822-1880) po raz pierwszy zademonstrował krzywe w roku 1857.

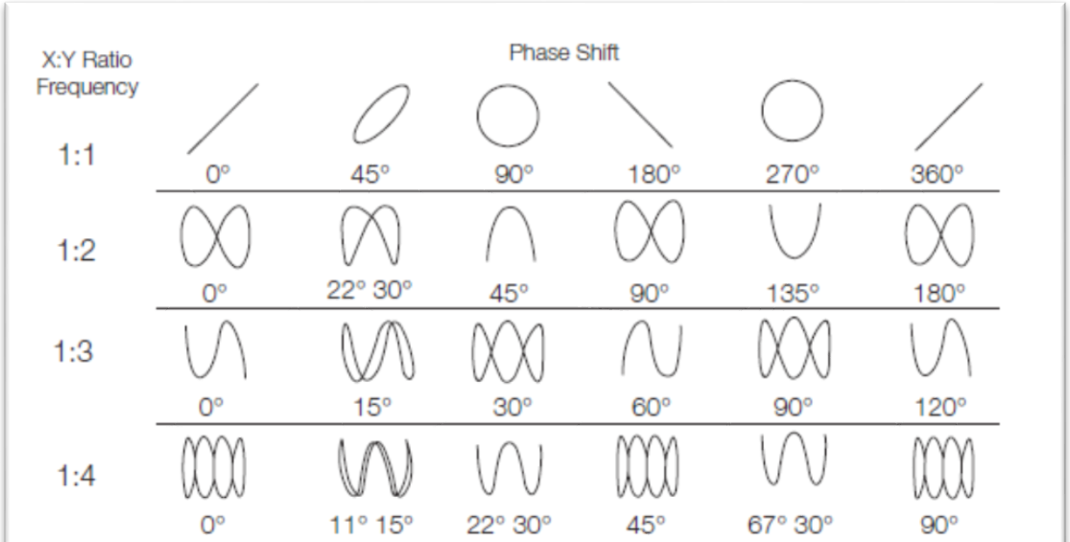


Figure 70. Lissajous patterns.