# LABORATORIUM 8

## WERYFIKACJA HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH

### PARAMETRYCZNE TESTY ISTOTNOŚCI

# WERYFIKACJA HIPOTEZ

**Hipoteza statystyczna** –jakiekolwiek przypuszczenie dotyczące populacji generalnej- jej poszczególnych parametrów lub rozkładu

**Hipoteza statystyczna**

**PARAMETRYCZNA**
**(parametryczne testy istotności)**
precyzuje wartość parametru
w rozkładzie populacji gen.

**NIEPARAMETRYCZNA**
**(nieparametryczne testy istotności)**
orzeka o typie rozkładu

TESTY ZGODNOŚCI
Sprawdzają hipotezę , że populacja ma określony typ rozkładu .

TESTY SPRAWDZAJĄCE CZY 2 PRÓBY POCHODZĄ Z JEDNEJ POPULACJI

# Standardowy przebieg procedury weryfikacyjnej

Reguły postępowania przy weryfikacji hipotez są określane mianem **testów statystycznych**

## 1. **Sformułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej**

**Hipoteza zerowa ($H_0$)** - Jest to hipoteza poddana procedurze weryfikacyjnej, w której zakładamy, że różnica między analizowanymi parametrami lub rozkładami wynosi zero. Przykładowo wnioskując o parametrach hipotezę zerową zapiszemy jako:

$$H_0\colon \theta_1 = \theta_2$$

$\Theta_2$ –znane (hipotetyczna wartość)

**Hipoteza alternatywna ($H_1$)** - hipoteza przeciwstawna do weryfikowanej. Możemy ją zapisać na trzy sposoby w zależności od sformułowania badanego problemu:

$$H_1\colon \theta_1 \neq \theta_2 \qquad H_1\colon \theta_1 > \theta_2 \qquad H_1\colon \theta_1 < \theta_2$$

## 2. Wybór statystyki testowej

$$x_\theta = x(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_1, \theta_2)$$

Wyznaczamy pewną funkcję wyników z próby losowej,

i wyznaczamy jej rozkład przy założeniu, że hipoteza zerowa jest prawdziwa. Funkcję $x_\theta$ nazywa się **statystyką testową** lub **funkcją testową**.

# Standardowy przebieg procedury weryfikacyjnej

## 3. Określenie poziomu istotności α

Na tym etapie procedury weryfikacyjnej przyjmujemy maksymalne dopuszczalne prawdopodobieństwo popełnienia **błędu I rodzaju**, który polega na odrzuceniu hipotezy zerowej wtedy, gdy jest ona prawdziwa. Prawdopodobieństwo to jest oznaczane symbolem **α** i nazywane **poziomem istotności.**

Na ogół przyjmujemy prawdopodobieństwo bliskie zeru, ponieważ chcemy aby ryzyko popełnienia błędu było jak najmniejsze. Najczęściej zakładamy poziom istotności $\alpha=0.05$, czasem przyjmuje się np. $\alpha=0.01$ ; $\alpha=0.1$

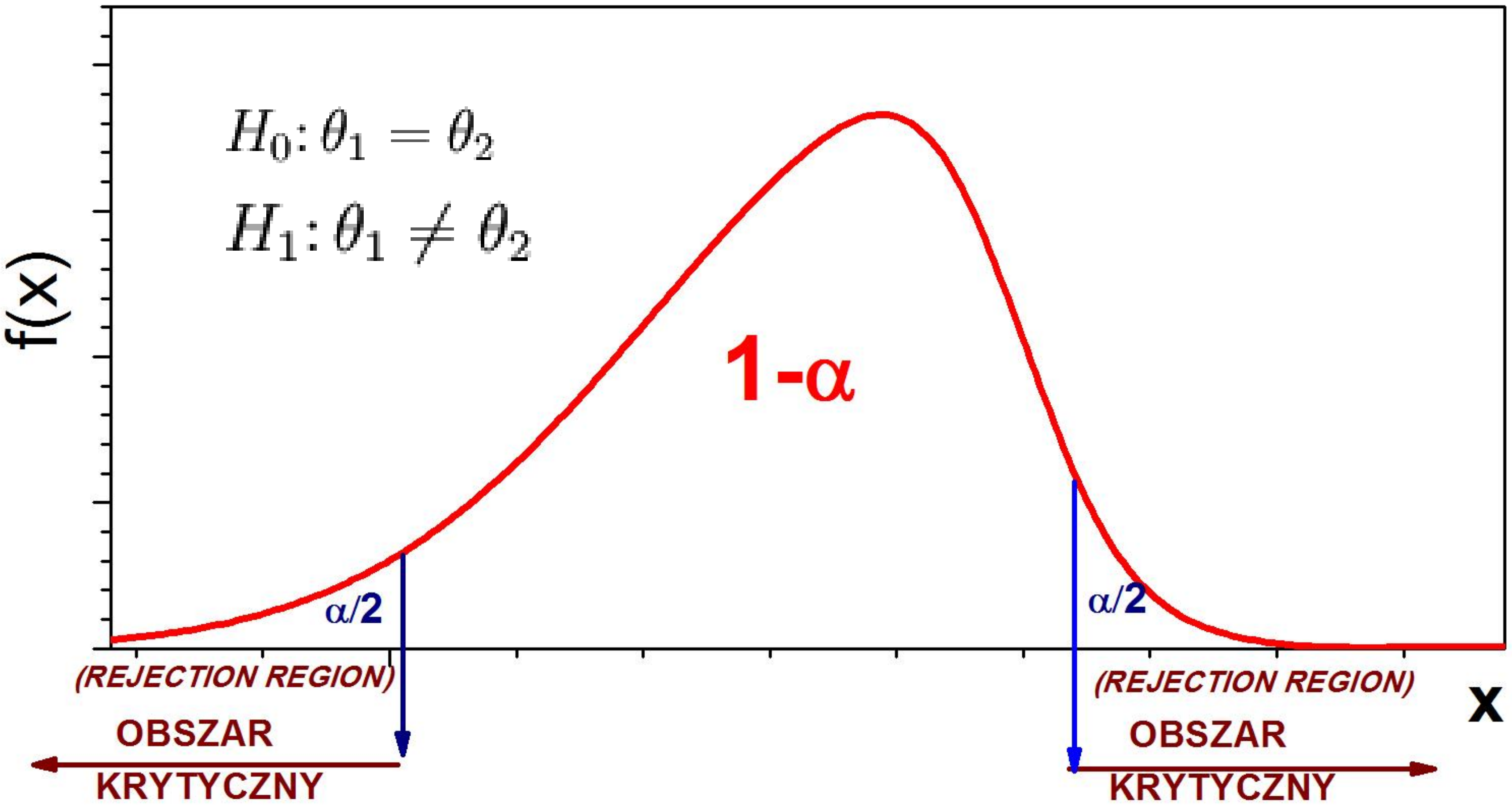
## 4. Podjęcie decyzji

Wyznaczoną na podstawie próby wartość statystyki porównujemy z **wartością krytyczną testu.** Jeżeli wartość ta znajdzie się w **obszarze krytycznym**, to hipotezę zerową **należy odrzucić** jako nieprawdziwą. Stąd wniosek, że prawdziwa jest hipoteza alternatywna. Jeżeli natomiast wartość ta znajdzie się poza obszarem krytycznym, oznacza to, że **brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej**.

Stąd wniosek, że hipoteza zerowa może, ale nie musi, być prawdziwa, a postępowanie nie dało **żadnych** dodatkowych informacji uprawniających do podjęcia decyzji o przyjęciu lub odrzuceniu hipotezy zerowej.

# OBSZAR KRYTYCZNY

**Obszar krytyczny-** obszar znajdujący się zawsze na krańcach rozkładu. Jeżeli obliczona przez nas wartość statystyki testowej znajdzie się w tym obszarze, to weryfikowaną przez nas hipotezę $H_0$ odrzucamy. Wielkość obszaru krytycznego wyznacza dowolnie mały poziom istotności α, natomiast jego położenie określane jest przez hipotezę alternatywną.

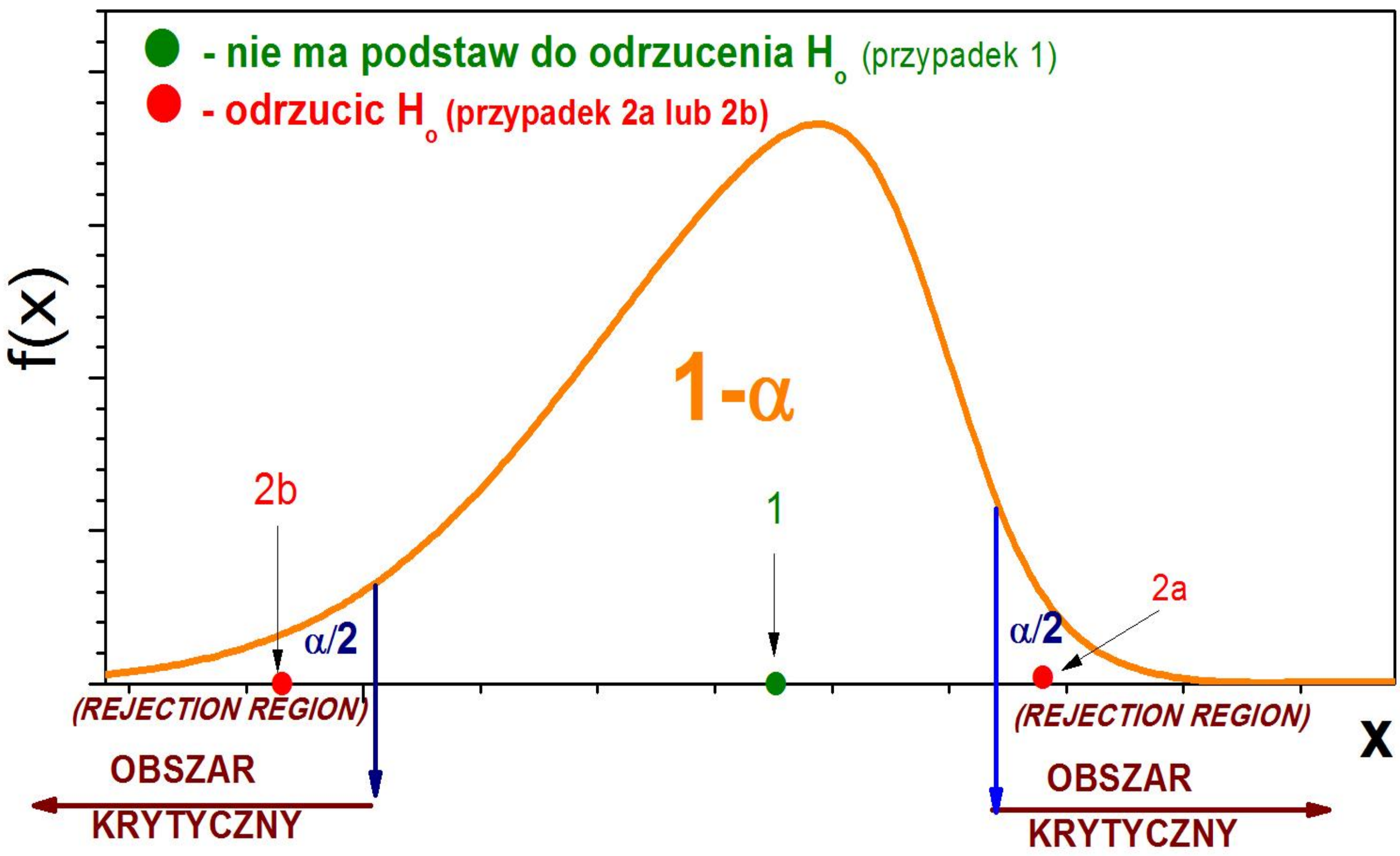



DWUSTRONNY OBSZAR KRYTYCZNY

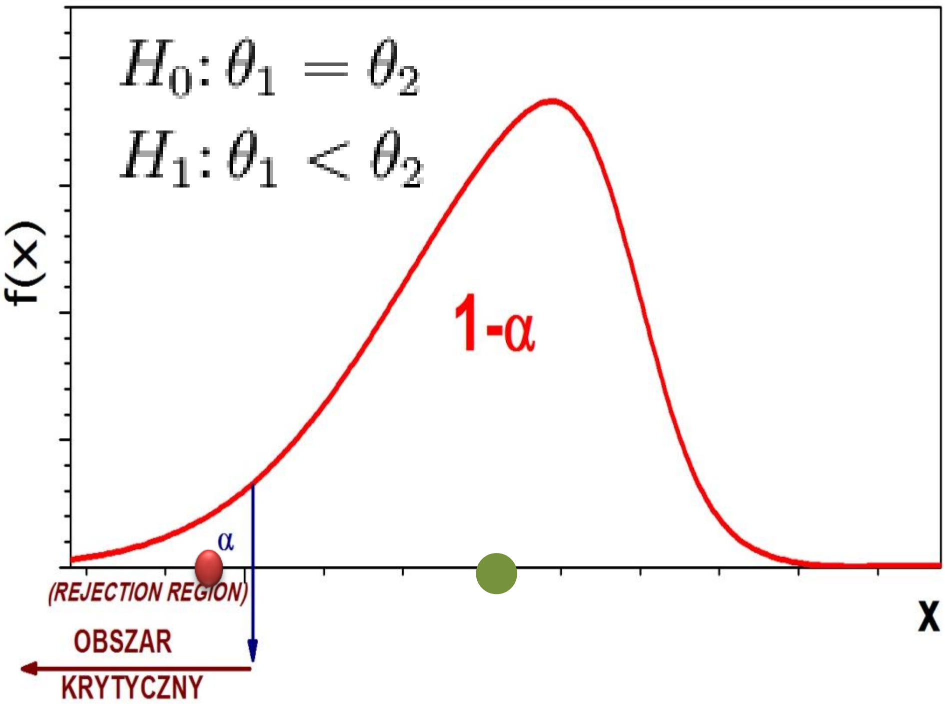
test **dwuśladowy** *(two-tail test)*

# DECYZJE

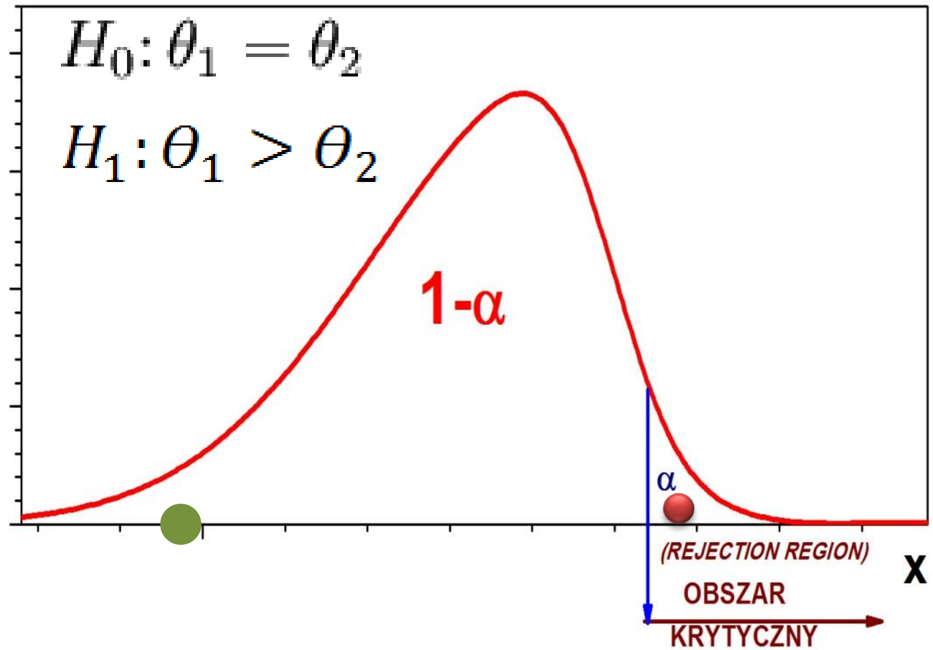
Obszar krytyczny od pozostałej części rozkładu statystyki oddzielony jest przez tzw. **wartości krytyczne testu** czyli wartości odczytane z rozkładu statystyki przy danym α, tak aby spełniona była relacja zależna od sposobu sformułowania $H_1$.



# OBSZAR KRYTYCZNY




LEWOSTRONNY
OBSZAR KRYTYCZNY
Test **jednośladowy**
(*one- tail test*)




PRAWOSTRONNY
OBSZAR KRYTYCZNY
Test **jednośladowy**
(*one- tail test*)

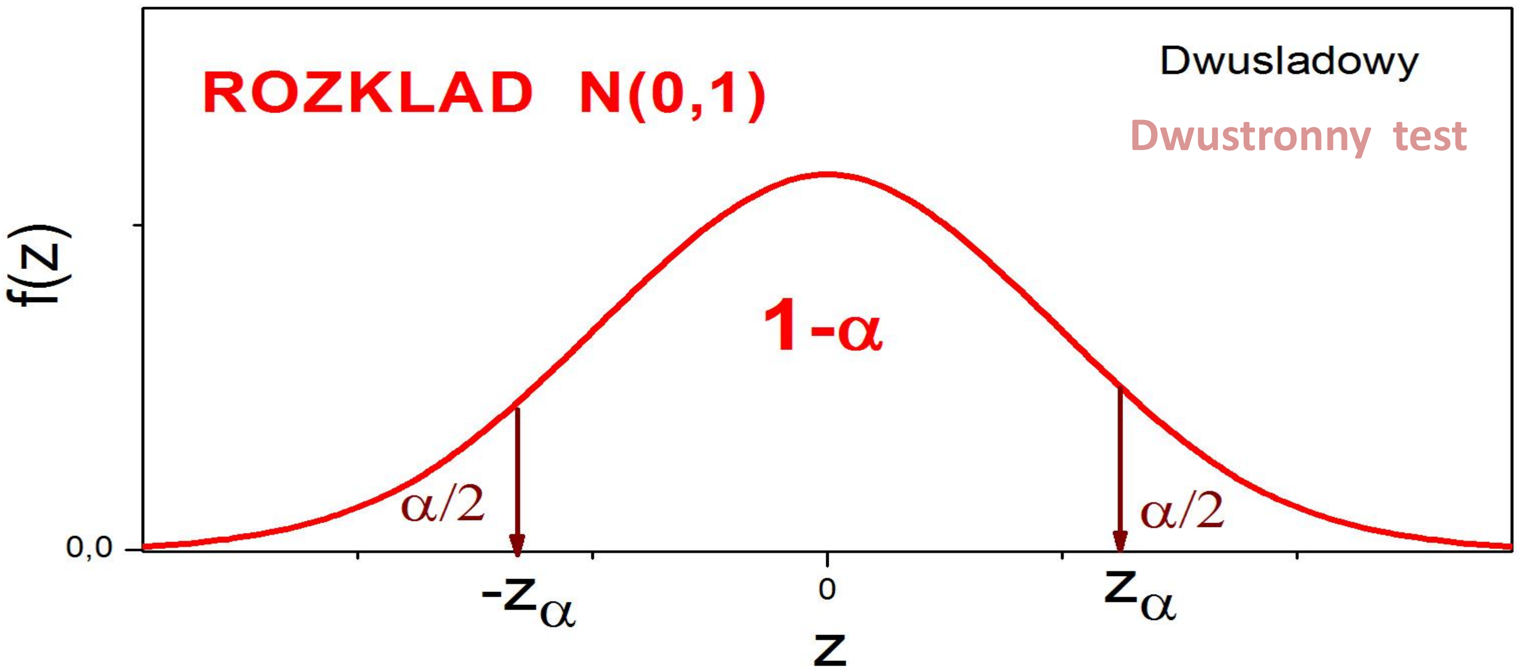
**$H_o$ odrzucić, przyjąć H1**

**$H_o$ nie ma podstaw do odrzucenia**

# TESTY DLA WARTOŚCI ŚREDNIEJ POPULACJI ( znane σ )

**Przypadek 1.** Populacja generalna ma rozkład normalny N(μ, σ); **odchylenie standardowe σ jest znane.** Na podstawie n-elementowej próby sprawdzić, hipotezę: $H_o : \mu = \mu_o$ ($\mu_o$-hipotetyczna wartość) wobec hipotezy alternatywnej: $H_1 : \mu \neq \mu_o$ .

**Rozwiązanie:** Statystyka testowa: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma}\sqrt{n}$ ma rozkład N(0,1) , **dwustronny obszar krytyczny**




Dla $H_1 : \mu > \mu_o$ lub $H_1 : \mu < \mu_o$ zastosować **prawostronny** lub **lewostronny** test, odpowiednio.

# TESTY DLA WARTOŚCI ŚREDNIEJ POPULACJI (próba duża)

**Przypadek 2.**

Populacja generalna ma rozkład normalny N($\mu$, $\sigma$) lub dowolny inny; odchylenie standardowe $\sigma$ jest nieznane. Na podstawie dużej próby $n \geq 30$

sprawdzić, hipotezę: $H_o : \mu = \mu_o$ ($\mu_o$-hipotetyczna wartość) wobec hipotezy alternatywnej: $H_1 : \mu \neq \mu_o$ .

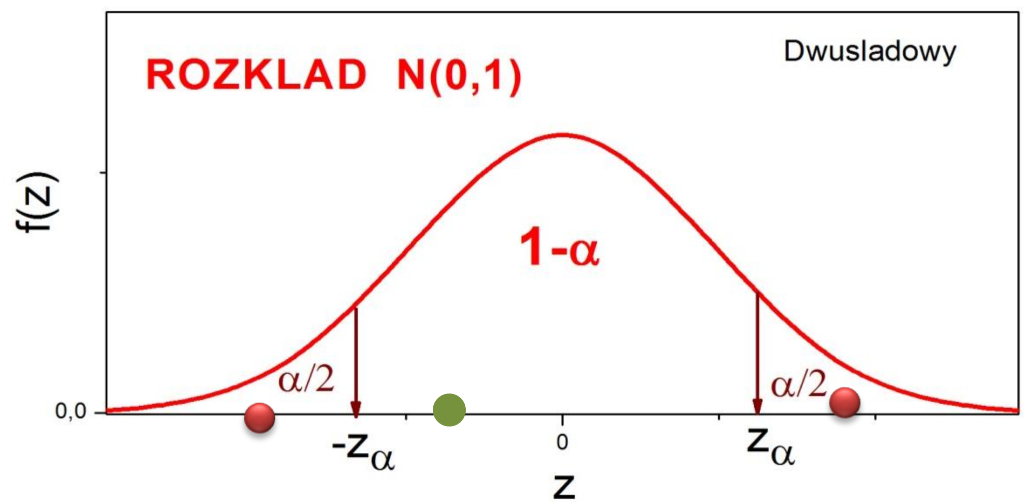
**Rozwiązanie:** Statystyka testowa:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{s}\sqrt{n-1}$$

ma rozkład N(0,1)dwustronny obszar krytyczny (dalej postępować jak w Przypadku 1.

$H_o$ odrzucić, przyjąć $H_1$

$H_o$ nie ma podstaw do odrzucenia

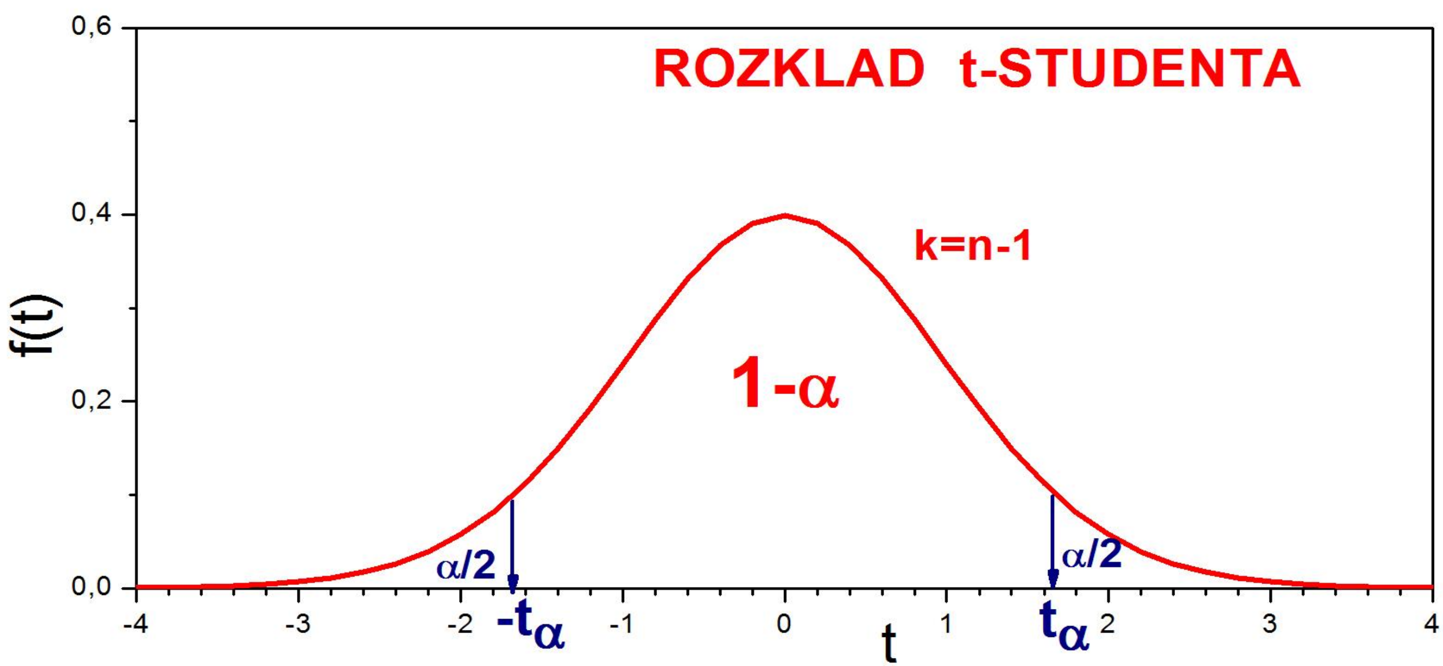


# TESTY DLA WARTOŚCI ŚREDNIEJ POPULACJI (próba mała)

**Przypadek 3.**

Populacja generalna ma rozkład normalny N(μ, σ) ,odchylenie standardowe σ jest nieznane. Na podstawie małej próby (n <30) sprawdzić, hipotezę: $H_o : \mu = \mu_o$ ($\mu_o$-hipotetyczna wartość) wobec hipotezy alternatywnej: $H_1 : \mu \neq \mu_o$.

**Rozwiązanie:** Statystyka testowa: $t = \frac{\bar{x} - \mu_o}{s}\sqrt{n-1}$ ma rozkład t-Studenta z k=n-1 stopniami swobody, dwustronny obszar krytyczny.



# WARYFIKACJA HIPOTEZ dla μ:

$H_o : \mu = \mu_o$ ($\mu_o$-hipotetyczna wartość)

$H_1 : \mu \neq \mu_o$ lub: $\mu > \mu_o$ lub: $\mu < \mu_o$

**Dane: próba losowa: $P^{(n)}$, poziom istotności: α**

**PRÓBA LOSOWA $P^{(n)}$**

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma}\sqrt{n}$$

Gdy: **σ znane** (jest to słuszne też dla małej próby)

**Próba duża**

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{s}\sqrt{n-1}$$

Gdy: **σ nieznane TYLKO dla dużej próby**

**Mała (n <30)**

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_o}{s}\sqrt{n-1}$$

**σ nieznane dla małej próby**

**$Z_\alpha$ N(0,1) : ROZKLAD.N.S.ODW**

prawdopodobieństwo :

a) **Test dwustronny** ($H_1 : \mu \neq \mu_o$) : α/2

b) **Test jednostronny** ($H_1 : \mu > \mu_o$ lub : $\mu < \mu_o$ ) : α

**$t_\alpha$ : ROZKLAD.T.ODW**

Stopnie swobody: **k=n-1,** prawdopodobieństwo:

a) **Test dwustronny** ($H_1 : \mu \neq \mu_o$) : α/2

b) **Test jednostronny** ($H_1 : \mu > \mu_o$ lub : $\mu < \mu_o$ ) : α

# WARYFIKACJA HIPOTEZ dla DWÓCH POPULACJI

$H_o : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ lub: $\mu_1 > \mu_2$ lub: $\mu_1 < \mu_2$

**Dane: próby losowe: $P(n_1)$ i $P(n_2)$ poziom istotności: $\alpha$**

**PRÓBY LOSOWE $P(n_1)$ i $P(n_2)$**

**Próby duże**

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Gdy: **$\sigma_1$ i $\sigma_2$ znane** (jest to słuszne też dla małej próby)

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Gdy: **$\sigma_1$ i $\sigma_2$ nieznane TYLKO dla dużej próby**

**Małe (n <30)**

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

**$\sigma_1$ i $\sigma_2$ nieznane, ale $\sigma_1 = \sigma_2$ dla małej próby; $k = n_1 + n_2 - 2$**

**Populacja generalna przed ($X_i$) oraz po ($Y_i$) MODYFIKACJI**

$z_i = y_i - x_i$ $\quad H_o: \mu_z = 0$

$$t = \frac{\bar{z}}{s_z}\sqrt{n-1}$$

$k = n-1$

$Z_\alpha$ N(0,1) : ROZKLAD.N.S.ODW

prawdopodobieństwo :

a) Test dwustronny ($H_1 : \mu \neq \mu_o$) : $\alpha/2$

b) Test jednostronny ($H_1 : \mu > \mu_o$ lub : $\mu < \mu_o$) : $\alpha$

$t_\alpha$ : ROZKLAD.T.ODW

a) Test dwustronny ($H_1 : \mu \neq \mu_o$) : $\alpha/2$

b) Test jednostronny ($H_1 : \mu > \mu_o$ lub : $\mu < \mu_o$) : $\alpha$

# TEST DLA WSKAŹNIKA STRUKTURY (PROCENTU)

Populacja generalna ma rozkład dwupunktowy z parametrem **p .** Z populacji tej wylosowano próbę n-elementową (n>100) próbę. W oparciu o wynik tej próby zweryfikować hipotezę: **$H_o$ : $p=p_o$** wobec hipotezy alternatywnej: **$H_1 : p \neq p_o$** , gdzie $p_o$ jest hipotetyczna wartość parametru **p**

Statystyka testowa:

$$z = \frac{\frac{m}{n} - p_o}{\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}}$$

Gdzie m- liczba wyróżnionych elementów w próbie.
Statystyka z ma rozkład N(0,1)

# Alternatywne podejście: p-wartości

*(p –Value of a test)*

Powyższa standardowa procedura wymaga przyjęcia arbitralnego poziomu istotności $\alpha$ a wynikiem weryfikacji jest odpowiedź binarna – albo statystyka testowa mieści się w przedziale ufności, albo nie.
(**Alternatywnym i nowocześniejszym**, choć mniej popularnym podejściem jest obliczenie zamiast tego surowej **p-wartości** prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju) i podawanie jej jako wyników weryfikacji. Dzięki temu nie ma potrzeby przyjmowania a priori żadnych wartości $\alpha$, pozwala to również na porównywanie istotności różnych konkurencyjnych hipotez statystycznych.

**Definicja:** **p-wartość** *(p-value)* testowania hipotezy jest to najmniejsza wartość $\alpha$ (poziomu istotności) , która prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej, $H_o$.

Mała p-wartość wskazuje na poparcie hipotezy alternatywnej $\mathbf{H_1}$
Duża p-wartość dostarcza mało argumentów na poparcie hipotezy alternatywnej

# ĆWICZENIA

1) Z populacji generalnej pobrano losowo próbę $P^{(n)}$ (n-elementową).
Wyznaczone wartości dla tej próby wynoszą: $x_{sr}$ = 136 g, s= 12 g.
Na poziomie istotności α=0,05 zweryfikować hipotezę: **$H_o$: μ = 148 g** gdy:

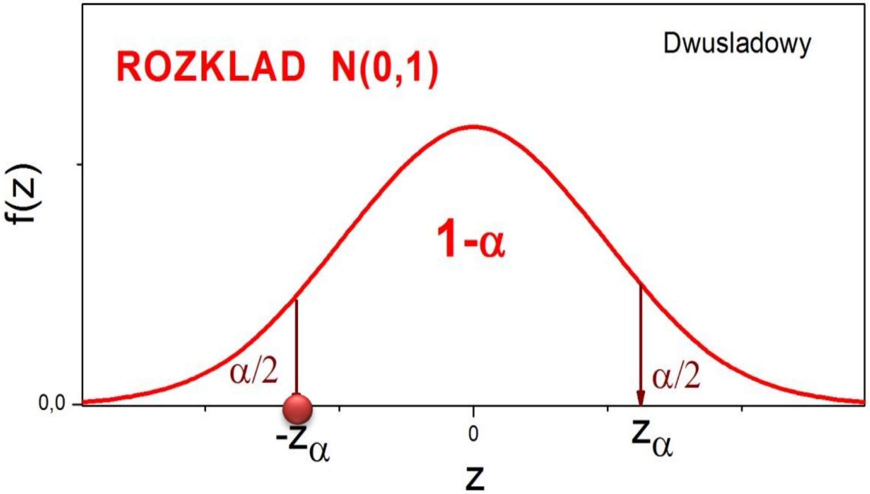
a) n=36, σ= 10 g, **$H_1$ : μ ≠ 148 g, $H_1$ : μ <148 g**
b) n=16, σ= 10 g, **$H_1$ : μ ≠ 148 g**
c) n=50 (σ nieznane), **$H_1$ : μ ≠ 148 g**
d) n=26 (σ nieznane), **$H_1$ : μ ≠ 148 g**

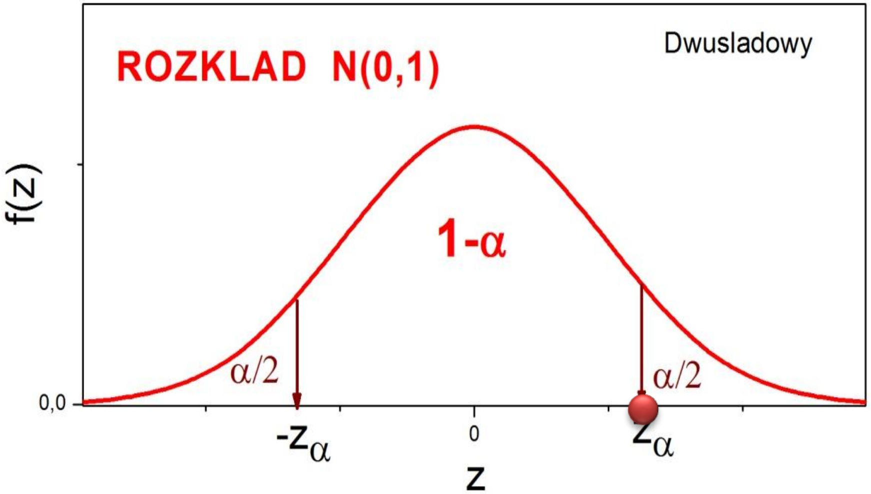
Wyznaczyć dla przypadków a-d: **p-wartości**

**Definicja:** **p-wartość** *(p-value)* testowania hipotezy jest to najmniejsza wartość α (poziomu istotności), która prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej, $H_o$.

***Wyznaczanie p- wartości:***

a) z próby wyznaczamy $z_\alpha$ ($t_\alpha$)
b) korzystając z funkcji: **ROZKŁAD.N.S (ROZKŁAD.T)** wyznaczamy p=α



# ĆWICZENIA c.d

1. Zmierzono czas reakcji u 8 kierowców przed i po wypiciu 100 g wódki, wyniki w sekundach następujące:

a) Przed wypiciem:
   0,22; 0,18; 0,16; 0,19; 0,20; 0,23; 0.17; 0,25

a) Po wypiciu:
   0,28; 0,25; 0,20; 0,30; 0,19; 0,26; 0,28; 0,24

Na poziomie istotności $\alpha$=0,05 zweryfikować hipotezę , że wódka zwiększa czas reakcji. $t_z 3.90 > 1.895 = t_\alpha$ $H_o$ odrzucić.

2. Na 800 zbadanych pacjentów, 320 miało grupę krwi ‘0’ . Na poziomie istotności α=0,05 zweryfikować hipotezę, że procent pacjentów z tą grupą krwi wynosi 35%. P=2,96> 1.96=$z_{\alpha;}$ , Ho odrzucic\ć