ĆWICZENIE 13
TEORIA BŁĘDÓW POMIAROWYCH

Pomiary (definicja, skale pomiarowe, pomiary proste , złożone, zliczenia).
Błędy (definicja, rodzaje błędów, błąd maksymalny i przypadkowy,).
Rachunek błędów
Sposoby zapisów wyników
Przenoszenie błędów
Średnia arytmetyczna
Błąd standardowy pojedynczego pomiaru i średniej

RACHUNEK BŁĘDÓW (1)

Zadaniem rachunku błędów jest analiza i ocena błędów pomiarowych.
W rachunku błędów 'błąd' nie jest synonimem 'złego postępowania', 'pomyłki' czy też 'gafy'.
'Błąd' czy też 'niepewność wyniku pomiarowego' -towarzyszy nierozerwalnie pomiarom, nie sposób go uniknąć. Można jedynie go zmniejszać np. dokonując staranniejszych pomiarów czy też używając dokładniejszych przyrządów.

UWAGA: PODAWANIE WYNIKU POMIARU BEZ OSZACOWANIA BŁĘDÓW JEST BEZUŻYTECZNE !!!

RACHUNEK BŁĘDÓW (2)

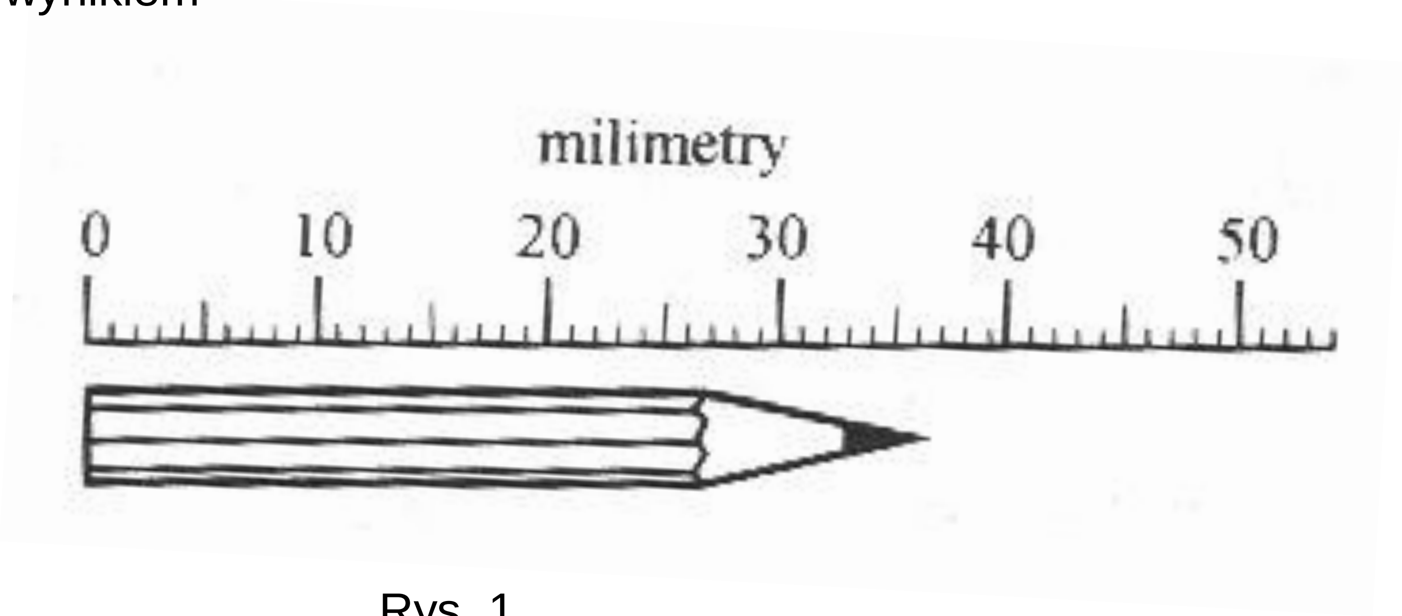
Pomiary proste

•**Odczytywanie skali** (podziałka milimetrowa, skale przyrządów pomiarowych) –połowa wartości pomiędzy działkami (Rys. 1 & 2)

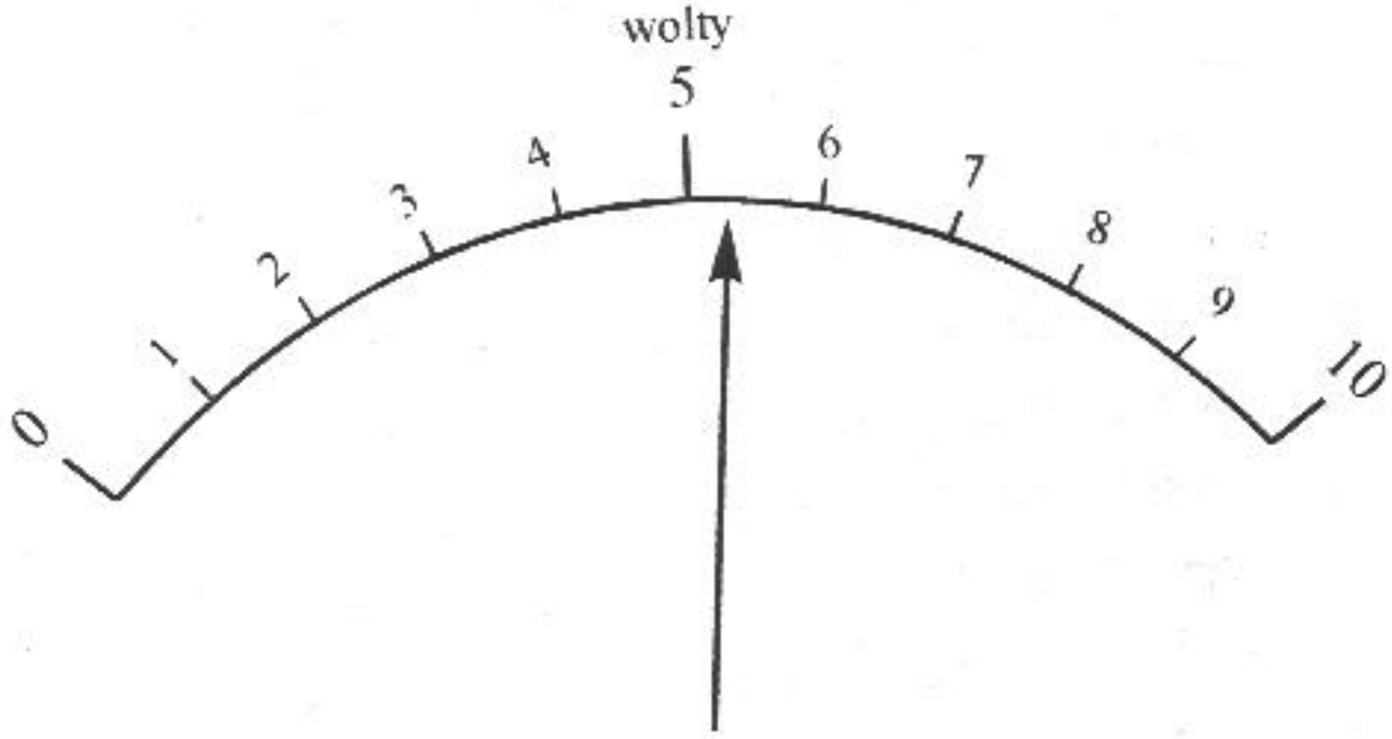
Pomiary wielokrotne

- **najlepsze przybliżenie= średnia arytmetyczna**

-prawdopodobny zakres: pomiędzy najmniejszym a największym wynikiem



Rys. 1



Rys. 2

Pomiary wielokrotne

- **najlepsze przybliżenie= średnia arytmetyczna**
- **prawdopodobny zakres:** pomiędzy najmniejszym a największym wynikiem

RACHUNEK BŁĘDÓW (4)

Przykład :

Wyniki pomiarów: 2,3; 2,4; 2,5; 2,4

-najlepsze przybliżenie= (2,3+2,4+2,5+2,4)/4=2,4

-prawdopodobny zakres: od 2,3 do 2,5

Sposoby zapisu wyników

x- wartość zmierzona,
- najlepsze przybliżenie - x_{np}
-prawdopodobny zakres: od $x_{np} - \delta x$ *do* $x_{np} + \delta x$

ZAPIS

1) $\mathbf{x = x_{np}} \pm \delta x$ δx – ‘niepewność’ (błąd bezwzględny)

2) $\mathbf{x = x_{np} \pm \delta x / x_{np} * 100\ \%}$ (zapis z uwzględnieniem błędu względnego

RACHUNEK BŁĘDÓW (5)

Reguły zapisu:

- x_{np} oraz **δx podawać w tych samych jednostkach** (np. cm, s, m/s^2 itp.)
- δx **zaokrąglać do dwu cyfr znaczących**)
- ostatnia cyfra znacząca **x_{np} powinna być tego samego rzędu** (stać na tym samym miejscu dziesiętnym) **co niepewność (δx)**
- zapis **x_{np} i δx w tej samej** formie (np. dziesiętnej, „naukowej”, „inżynierskiej”)

RACHUNEK BŁĘDÓW (6)

Przykłady

Nie prawidłowo	Prawidłowo
$9{,}82 \pm 0{,}0248\ \ m/s^2$	$9{,}820 \pm 0{,}025\ \ m/s^2$
$3467{,}72 \pm 20\ \ m/s$	$3470 \pm 20\ \ m/s$ lub $3468 \pm 20\ m/s$
$1{,}61 \cdot 10^{-19} \pm 5 \cdot 10^{-21}\ \ C$	$(1{,}61 \pm 0.05) \cdot 10^{-19}\ C$ lub $(161 \pm 5) \cdot 10^{-21}\ C$
$2{,}57\ m \pm 2cm$	$2{,}57 \pm 0{,}02\ \ m$ lub $257 \pm 2\ \ cm$

NIEPEWNOŚCI POMIAROWE -δq

NAJLEPSZĄ METODĄ OCENY WIARYGODNOŚCI POMIARU JEST JEGO WIELOKROTNE POWTARZANIE I BADANIE OTRZYMANYCH WYNIKÓW

NIEPEWNOŚCI POMIAROWE -δq

PRZYPADKOWE-δ_{przyp}

mogą być poddawane obróbce statystycznej

SYSTEMATYCZNE-δ_{system}

nie mogą być poddawane **obróbce statystycznej**

$$\delta q = \sqrt{\delta_{przyp}^2 + \delta_{system}^2}$$

Błędy (niepewności) systematyczne nie da się ani zmniejszyć ani też wykryć poprzez powtarzanie pomiarów. Można je wykryć, a następnie zredukować np. poprzez kalibracje przyrządów. **Dążymy aby:** $\delta_{system} \leq \delta_{przyp}$

RACHUNEK BŁĘDÓW (8)

NIEPEWNOŚCI (BŁĘDY) WZGLĘDNE (DOKŁADNOŚĆ)

$x = x_{np}$ $\pm \delta x$

niepewność względna $= \dfrac{\delta x}{|x_{np}|}$

niepewność procentowa [%] $= \dfrac{\delta x}{|x_{np}|}$ *100

Przykład

x= 4,82±0,08 kg= 4,82 $\cdot \left(1 \pm \frac{0{,}08}{4{,}82}\right) = 4{,}82 \cdot (1 \pm 0{,}017)\, kg = 4{,}82\ kg \pm 1{,}7\%$

SREDNIA ARYTMETYCZNA

Twierdzenie

(postulat Gaussa) : $x_{np} = \overline{x}$

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$\bar{x}$

Błąd pojedynczego pomiaru

ODCHYLENIE STANARDOWE Z PRÓBY (BŁĄD STANDARDOWY)- s_x

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

ODCHYLENIE STANDARDOWE MIARĄ BŁĘDU (NIEPEWNOŚCI) POJEDYNCZEGO POMIARU

Wykonując n pomiarów otrzymujemy: x_1, x_2, …, x_n , następnie obliczamy

oraz s_x. Jeśli przeprowadzimy następny pomiar, to istnieje ok. 70% (dokładniej 68,27 %) prawdopodobieństwa, że wynik tego pomiaru będzie się różnił

o mniej niż s_x $\bar{x}$

POMIARY WIELOKROTNE

ODCHYLENIE STANDARDOWE ŚREDNIEJ

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

$$x = x_{np} \pm \delta x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$$

Zasady przenoszenia błędów

Mierzymy dwie wielkości x i y ,z błędami δx i δy zadaniem jest obliczenie błędu ich funkcji q=q(x,y):

$$\delta q \approx \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \delta y \qquad (1)$$

Jest to tzw **błąd maksymalny**.

W przypadku niezależnych x i y oraz **błędów przypadkowych** możliwe jest częściowe znoszenie się błędów x i y. Wówczas lepszym (o mniejszej wartości) przybliżeniem δq:

$$\delta q = \sqrt{(\frac{\partial q}{\partial x}\sigma_x)^2 + (\frac{\partial q}{\partial y}\sigma_y)^2} \qquad (2)$$

POMIARY POŚREDNIE (1)

1. FUNKCJA JEDNEJ ZMIENNEJ   q=q(x)

$$\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|\delta x$$

2. FUNKCJA WIELU ZMIENNYCH   q=q(x,…,z),   x,…,z –niezależne:

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\delta x\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

Zawsze:

$$\delta q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \cdots + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right|\delta z$$

1. PRZENOSZENIE NIEPEWNOŚCI
(mogą być nieprzypadkowe – błąd maksymalny)

1. Sumy i różnice:

$q = x + \ldots + z - (u + \ldots v)$

$\delta q \approx \delta x + \ldots + \delta z + \delta u + \ldots + \delta v$

2. **Iloczyny, ilorazy, potęgi:**

$$q = \frac{x \cdots z}{u \cdots v}$$

$$\frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta x}{|x|} + \cdots + \frac{\delta z}{|z|} + \frac{\delta u}{|u|} + \cdots + \frac{\delta v}{|v|}$$

$$q = x^{\alpha}$$

$$\frac{\delta q}{|q|} = |\alpha| \frac{\delta x}{|x|}$$

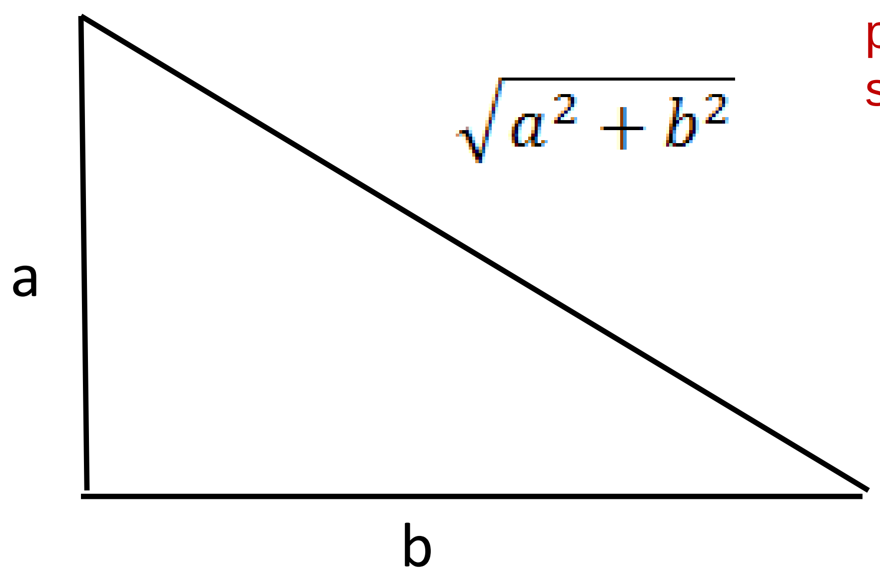
2. PRZENOSZENIE NIEPEWNOŚCI
(błędy przypadkowe)

<u>1.Sumy i różnice:</u> <u>q = x+…+z-(u+…v)</u>

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \cdots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \cdots (\delta v)^2}$$

$$\delta q \le \delta x + \cdots + \delta z + \delta u + \cdots \delta v$$

Gdy ‘=‘ błąd maksymalny, przypadek obejmuje występowanie błędów przypadkowych i systematycznych



POMIARY POŚREDNIE (2)

Przykład 1: Funkcja jednej zmiennej: q=q(x)

$$\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|\delta x$$

Równanie Bragga: $\lambda = asin\theta$

λ= długość fali (Cu-K_α)= 0,154 nm - stała
θ =kąt= 12,71°±0,02° stąd $\delta\theta$=0,02°= 0,02 x π/180 rad= 3,5 x 10^{-4} rad

$$a = \frac{\lambda}{sin\theta}$$

I. SPOSÓB (różniczka zwykła)

$$\delta a = \left|\frac{da}{d\theta}\right|\delta\theta = \left|\frac{-\lambda\cos\theta}{\sin^2\theta}\right|\delta\theta$$

$$\delta a = \left|\frac{-0{,}154\cos 12{,}71^{\circ}}{\sin^2 12{,}71^{\circ}}\right| \cdot 3{,}5 \text{ x } 10^{-4} = 1{,}086 \text{ x } 10^{-3} \text{ nm}$$

POMIARY POŚREDNIE (3)

Przykład c.d: Funkcja jednej zmiennej

II. SPOSÓB (różniczka logarytmiczna

$$\ln|a| = ln\lambda - \ln\ |sin\theta|$$

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{cos\theta \cdot \delta\theta}{sin\theta}$$

$$a = \frac{0{,}154\ nm}{sin12{,}71^{o}} = 0{,}69995\ nm$$

$$\delta a = 0{,}69995\ x\ 5{,}833\ x\ 3{,}5x\ 10^{-4} nm = 1{,}086\ \mathrm{x}\ 10^{-3}\ \mathrm{nm}$$

POMIARY POŚREDNIE (4)

Przykład Funkcja wielu zmiennych

q=q(x,…,z), x,…,z –niezależne:

$$\delta q = \sqrt{(\frac{\partial q}{\partial x}\delta x)^2 + \cdots + (\frac{\partial q}{\partial z}\delta z)^2}$$

Błędy przypadkowe

Zawsze: $$\delta q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x + \cdots + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right| \delta z$$

Błąd maksymalny (przypadkowe+systematyczne)

Przykład 2– wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego (g) metodą pomiaru okresu (T) wahadła matematycznego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

l= 144,0± 0,2 cm; T=2,41± 0,04 s

$$lng = \ln(4\pi^2) + \ln l - 2lnT$$

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta l}{l} + 2\frac{\delta T}{T} = \frac{0,2}{144,0} + \frac{0,04}{2,41} = 0,0180$$ (1,8 %)

POMIARY POŚREDNIE (5)
Przykład c.d: Funkcja wielu zmiennych

g=978,8 cm/s^2

$$\delta g \ \ (maksymalny) = 0{,}0180\, x\, 978{,}8 = 17{,}6\ cms^{-2}$$

$$\delta g\ (przypadkowy) = \sqrt{(\frac{\partial g}{\partial l}\ \delta l)^2 + (\frac{\partial g}{\partial T}\ \delta T)^2}$$

$$\delta g (przypadkowy) = 2\pi \sqrt{(\frac{\delta l}{T^2})^2 + (\frac{2 l \delta T}{T^3})^2} = 5{,}2\ cms^{-2}$$

POMIARY POŚREDNIE (6)

Przykład Funkcja wielu zmiennych

Przykład 3. Dane jak w przykładzie 2, z tą różnicą, że pomiar okresu wahań (T) jest dodatkowo obciążony błędem systematycznym :

$$\delta T_{system} = 0{,}08\ s$$

Ponieważ: $$\boldsymbol{\delta q} = \sqrt{\boldsymbol{\delta^2_{przyp}} + \boldsymbol{\delta^2_{system}}}$$

oraz $$\delta T_{przyp} = 0{,}04\ s$$

$$\delta T_{całk} = \sqrt{0{,}04^2 + 0{,}08^2} = 0{,}089\ s$$

Tę wartość (0,089 s) należy wstawić do poprzednich obliczeń za δT, by policzyć δg (maksymalne lub przypadkowe)

2. PRZENOSZENIE NIEPEWNOŚCI
(błędy przypadkowe) (c.d.)

2. **Iloczyny, ilorazy**

$$q = \frac{x \cdots z}{u \cdots v}$$

$$\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\delta v}{v}\right)^2}$$

$$\frac{\delta q}{|q|} \leq \frac{\delta x}{|x|} + \cdots + \frac{\delta z}{|z|} + \frac{\delta u}{|u|} + \cdots + \frac{\delta v}{|v|}$$

POMIARY POŚREDNIE

1. FUNKCJA JEDNEJ ZMIENNEJ   q=q(x)

$$\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|\delta x$$

2. FUNKCJA WIELU ZMIENNYCH   q=q(x,…,z), x,…,z –niezależne:

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\delta x\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

Zawsze: $$\delta q \leq \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \cdots + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right|\delta z$$

ĆWICZENIE (T.Ch. lub C.)

Celem określenia porowatości otwartej cegieł (stosunek objętości por/objętości cegły, wyrażony w %) wykonano następujące pomiary:

- Wymiary geometryczne cegły : a, b, c.
- Pomiary wykonano poprzez 4-ro krotne powtórzenie i otrzymano:

  a : 24,7 cm; 24,9 cm; 25,1 cm; 25,3 cm

  b= 12,2 $\pm$ 0,4 cm

  c= 7.8 $\pm$ 0,3 cm
- Masa cegły : m = 2985 $\pm$ 15 g
- Cegłę zanurzono w wodzie, a następnie ją zważono (masa cegły+ woda wypełniająca pory) m_w = 3535 $\pm$ 40 g Porowatość , p, obliczano ze wzoru:

$$p = \frac{\Delta V}{V} * 100\% = \frac{m_w - m}{d_{H2O}} * \frac{100}{a*b*c}\ \%$$

gdzie d_{H2O} = 0,974$\pm$ 0,004 g/cm^3

- Obliczyć p = p(m_w, m, d_{H2O}, a, b, c)
- Obliczyć błąd maksymalny p
- Obliczyć różniczkę logarytmiczną p
- Obliczyć błąd (kwadratowy) p zakładając brak błędu systematycznego
- Obliczyć błąd (kwadratowy) p zakładając, że występuje błąd systematyczny δm = 30g.

ĆWICZENIE (I.M.)

Celem określenia porowatości otwartej spieku półprzewodnika (stosunek objętości por/objętości spieku, wyrażony w %) użyto próbki w kształcie walca o promieniu r oraz wysokosci h i wykonano następujące pomiary:

- Wymiary geometryczne r i h. Pomiary wykonano poprzez 4-ro krotne powtórzenie i otrzymano:

  2r : 19,7 ; 19,9; 20,1; 20,3 mm

  h : 30,3; 30,1; 29,9; 29,7 mm

- Masa spieku : m = 42,6455 $\pm$ 0,0005 g
- Odpompowano zawarte powietrze w spieku i zalano ciekłym CCl_4,

a następnie ją zważono

- (masa spieku+ CCl_4 wypełniający pory)

  m_c = 44,2395 $\pm$ 0,0025 g

Porowatość , p, obliczano ze wzoru:

$$p = \frac{\Delta V}{V} * 100\% = \frac{m_c - m}{d_{CCl4}} * \frac{100}{\pi * r^2 * h} \%$$

gdzie d_{CCl4} = 1,594$\pm$ 0,006 g/cm^3

- Obliczyć p = p(m_c, m, d_{CCl4}, r, h)
- Obliczyć błąd maksymalny p
- Obliczyć różniczkę logarytmiczną p
- Obliczyć błąd (kwadratowy) p zakładając brak błędu systematycznego
- Obliczyć błąd (kwadratowy) p zakładając, że występuje błąd systematyczny δm_c = 0,0015 g.