KATEDRA
CHEMII ANALITYCZNEJ I BIOCHEMII

Jan Wyrwa, Małgorzata Dziubaniuk, Małgorzata Jakubowska

Zaokrąglanie i prezentacja wyników pomiarów

Materiały dla studentów odbywających zajęcia
w Katedrze Chemii Analitycznej i Biochemii WIMiC AGH

Kraków, 2023

1. Cyfry znaczące

Cyfry znaczące danej liczby różnej od zera to wszystkie jej cyfry z wyjątkiem początkowych zer. Zera końcowe to cyfry znaczące, jeśli są wynikiem obliczeń, a nie zaokrągleń. Pierwsza cyfra znacząca jest różna od zera, natomiast druga, trzecia i dalsze mogą być zerami.

$$\mathbf{0{,}001\underbrace{274300}_{\text{cyfry znaczące}}}$$

Przykład 1.

Dwie osoby zważyły tę samą książkę. Pierwsza podała wynik **1,7 kg**, natomiast druga **1,70 kg.** Czy podały ten sam wynik?

Tak, ale to jest wynik pomiaru! Jeśli pierwsza osoba podała 1,70 kg a nie po prostu 1,7 kg to znaczy, że pisząc dodatkowe zero chciała coś przez to przekazać. Chciała powiedzieć, że jej pomiar jest dokładniejszy niż pomiar drugiej osoby. Jeśli nie podano w jawnej postaci błędu pomiarowego, wtedy **zapis 1,7 kg** oznacza, że książka może ważyć **od 1,65 kg do 1,74 kg,** gdyż ostatnia cyfra pochodziła prawdopodobnie z zaokrąglenia. Zapis **1,70 kg** oznacza, że książka może ważyć **od 1,165 kg do 1,704 kg.** Zapisanie zera było istotne. Jest to cyfra znacząca.

Przykład 2.

Dwie osoby zważyły ziarnko maku. Pierwsza podała wynik **0,0014 kg**, zaś druga **$1{,}4 \cdot 10^{-3}$ kg.** Dokładność jest taka sama. Tylko dwie cyfry (jedynka i czwórka) mówią o dokładności. Reszta mówi tylko o rzędzie wielkości, czyli jednostce. Początkowe zera liczby 0,0014 kg nie są znaczące. Nic nie mówią o dokładności wyniku.

W tab. 1 podano przykłady określania, ile jest cyfr znaczących w liczbie. Ogólnie, każdy wynik pomiaru jest liczbą przybliżoną, zaokrągloną zgodnie z podanymi zasadami. Nadmierne podawanie cyfr znaczących wyniku nie ma sensu. Podajemy taką liczbę cyfr znaczących, aby tylko ostatnia cyfra charakteryzowała się niepewnością.

UWAGA! Wynik pomiaru bezpośredniego nie może być podawany z większą liczbą cyfr znaczących, niż pozwala na to skala przyrządu pomiarowego.

Tab. 1. Przykłady określania, ile jest cyfr znaczących w liczbie.

Liczba	Ile cyfr znaczących
123,453	6
124,5600	7
0,345	3
0,00345000	6
$3{,}4 * 10^3$	2
$3{,}400 * 10^3$	4

2. Błąd bezwzględny, błąd względny

Błąd bezwzględny Δx liczby przybliżonej x to wartość bezwzględna różnicy między **liczbą dokładną** $\boldsymbol{X}$ i **liczbą przybliżoną** $\boldsymbol{x}$ wyrażany wzorem:

$$\Delta x = |X - x|$$

Jeżeli liczba dokładna X nie jest znana, co występuje w większości przypadków, to pojęcie błędu bezwzględnego nie jest przydatne. **Błąd względny** δ_x liczby przybliżonej x definiowany jest jako stosunek błędu bezwzględnego $\boldsymbol{\Delta x}$ do wartości bezwzględnej liczby dokładnej $X \neq 0$, czyli:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|X|}$$

Błąd względny wyrażony w procentach określamy wzorem:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|X|} \cdot 100\%$$

3. Zasady zaokrąglania liczb

Gdy zaokrąglamy liczbę do **n cyfr znaczących** to należy:

- <u>obciąć</u> wszystkie cyfry zapisane z prawej strony n-tej cyfry znaczącej, w przypadku, gdy <u>znajduje się ona na pozycji ułamkowej</u>
- <u>zastąpić je zerami</u>, w przypadku, gdy n-ta cyfra znacząca <u>znajduje się na pozycji całkowitej</u>

- jeśli pierwsza z odrzuconych cyfr jest mniejsza od 5, to pozostałych cyfr nie zmienia się, np.

  1,4532 po zaokrągleniu do 3 cyfr znaczących otrzymujemy **1,45**

  289160 po zaokrągleniu do 3 cyfr znaczących otrzymujemy **289000**
- jeśli pierwsza z odrzuconych cyfr **jest większa lub równa 5**, to do ostatniej pozostawianej cyfry dodać 1, np.

  0,27390 po zaokrągleniu do 3 cyfr znaczących otrzymujemy **0,274**

  6246 po zaokrągleniu do 3 cyfr znaczących otrzymujemy **6250.**

Przykłady zaokrąglania liczb podano w tab. 2.

Tab. 2. Przykłady nieprawidłowego i prawidłowego zaokrąglania liczb, gdy podano, ile jest cyfr znaczących.

Liczba	Ile cyfr znaczących	Nieprawidłowo	Prawidłowo
0,000347534	2	0,0 lub 0,00	0,0035
15,50000001	2	15 lub 15,50	16
15,49999999	2	16 lub 15,50	15
1,000000000	2	1	1,0
1,000000000	4	1 lub 1,0000	1,000
12,745	4	12,7450	12,75

4. Zaokrąglanie i prezentacja wyników pomiarów

Zaokrąglanie wyników jest obowiązkiem w odniesieniu do wyników końcowych. Przy wynikach pośrednich zaleca się postępowanie bardziej elastyczne. Liczba cyfr znaczących wyników pośrednich powinna być wyższa przynajmniej o 1 lub 2 cyfry od liczby dokładnych cyfr znaczących w wyniku końcowym. Przedwczesne zaokrąglanie wyników pośrednich może zniekształcić wyniki końcowe.

Wynik końcowy pomiaru prezentujemy w postaci:

$$\boldsymbol{x_R} = \boldsymbol{x_M} \pm \Delta \boldsymbol{x},$$

gdzie:

$\boldsymbol{x_R}$ - wynik pomiaru

$\boldsymbol{x_M}$ - wartość średnia obliczona dla serii pomiarów

$\Delta\boldsymbol{x}$ - niepewność.

Podany zapis oznacza, że najlepszym przybliżeniem wartości mierzonej jest według eksperymentatora liczba $\boldsymbol{x_M}$, zaś szukana wartość znajduje się pomiędzy $\boldsymbol{x_M}$ - $\Delta\boldsymbol{x}$ oraz $\boldsymbol{x_M}$ + $\Delta\boldsymbol{x}$. Obliczenia wykonujemy zawsze z większą liczbą cyfr niż chcemy podać wynik. Zaokrągleń dokonujemy po zakończeniu obliczeń.

Aby poprawnie podać wynik pomiaru (tab. 3) w pierwszym etapie oszacowane błędy zaokrąglamy do dwóch cyfr znaczących, a dalej odpowiednio zapisujemy wynik. Ostatnia cyfra znacząca w wyniku pomiaru powinna stać na tym samym miejscu dziesiętnym, co błąd pomiaru. Podczas zaokrąglaniu wyniku pomiaru i błędu stosowane są powszechnie przyjęte zasady zaokrągleń, tzn., jeżeli kolejna cyfra to 0-4 zaokrąglamy w dół, a jeżeli to 5 - 9 w górę.

Wartości x_M oraz Δx należy podawać w tych samych jednostkach (np. cm, s, m/s^2). W zapisie x_M i Δx stosować tą samą formę (np. dziesiętną, „naukową", „inżynierską"). Jednostkę należy podawać zawsze na końcu zapisu, tzn.

$$x_R = x_M \pm \Delta x \text{ jednostka lub } x_R = (x_M \pm \Delta x) \text{ jednostka}$$

Poprawny jest zapis $E = (123{,}457 \pm 0{,}014)$ J, zaś niepoprawny $E = 1{,}2 \cdot 10^8 \pm 1{,}6 \cdot 10^7$J.

Tab.3. Przykłady zapisu wyniku po zaokrągleniu – nieprawidłowo i prawidłowo.

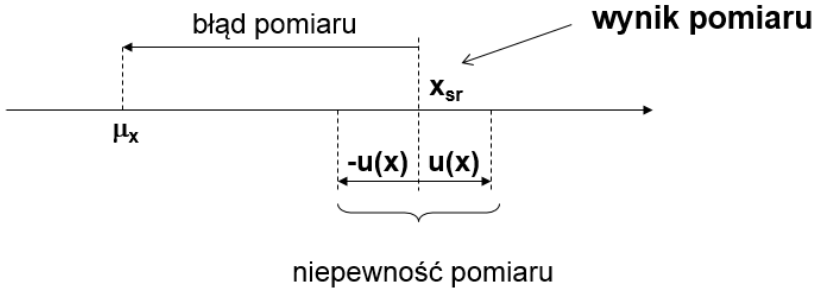
Nieprawidłowo	Prawidłowo
9,8212 ± 0,0248 m/s^2	9,821 ± 0,025 m/s^2
3467,72 ± 20,3 m/s	3468 ± 20 m/s
1,61·10^{-19} ± 5·10^{-21} C	(1,61 ± 0,05)·10^{-19} C
2,57 m ± 2 cm	2,57 ± 0,02 m lub 257 ± 2 cm

Podczas zaokrąglania należy mieć na uwadze porównanie liczby cyfr znaczących a nie położenie przecinka.

5. Niepewność pomiaru

Niepewność pomiaru $u(x)$ (ang. *measurement uncertainty*) to parametr związany z wynikiem pomiaru. Charakteryzuje rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej. To przedział, w którym z określonym prawdopodobieństwem

znajduje się wartość oczekiwana. Niepewność nie może służyć do skorygowania wyniku pomiaru.



Dwa podstawowe typy niepewności pomiarowej to niepewność typu A oraz typu B. **Niepewność standardowa typu A** (u_A) jest obliczana metodami analizy statystycznej serii pojedynczych obserwacji (serii pomiarowej). Wykorzystuje się dowolną prawidłową metodę statystycznego opracowania danych, np. obliczanie odchylenia standardowego średniej dla serii niezależnych obserwacji. Szacowanie **niepewności standardowej typu B** (u_B) można wykonać różnymi sposobami. Oszacowanie może być oparte o naukowy osąd oraz doświadczenie eksperymentatora. Należy wykorzystać wszystkie dostępne informacje, wyniki poprzednich pomiarów, doświadczenie oraz wiedzę na temat zachowania, własności przyrządów i badanych materiałów, informacje producentów przyrządów, dane zawarte w protokołach kalibracji przyrządów oraz dane z podręczników. Metody obliczania niepewności zależą od tego, czy pomiary wykonywane były w sposób bezpośredni lub pośredni.

Literatura

1. Wojciech Hyk, Zbigniew Stojek, Analiza statystyczna w laboratorium badawczym, Wydawnictwo Naukowe PWN 2023.
2. Jerzy Arendarski, Niepewność pomiarów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej 2013.
3. JCGM 100:2008 Ewaluacja danych pomiarowych – Przewodnik wyrażania niepewności pomiaru.