

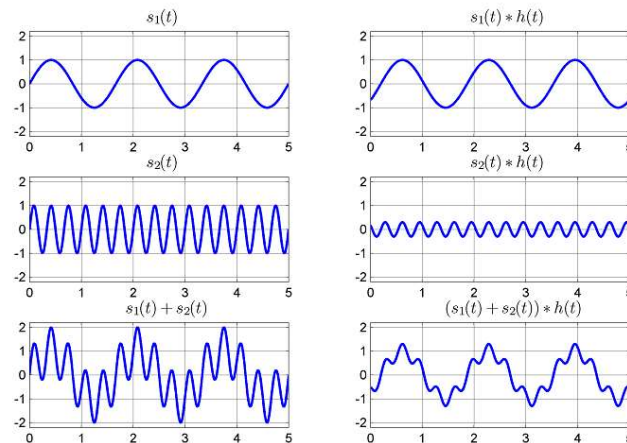
FILTRY ZE SKOŃCZONĄ ODPOWIEDZIĄ IMPULSOWĄ (SOI)

ang. Finite Impulse Response (FIR)

Spis treści

1. Definicja filtru FIR
2. Charakterystyki częstotliwościowe
3. Filtry FIR z liniową charakterystyką fazową
4. Projektowanie filtrów przy pomocy szeregów Fouriera
5. Projektowanie filtrów przy pomocy DFT
6. Optymalizacyjne metody projektowania
7. Definicja filtru 2-D FIR
8. Filtry 2-D FIR z liniową charakterystyką fazową

Przykład filtracji dolnoprzepustowej

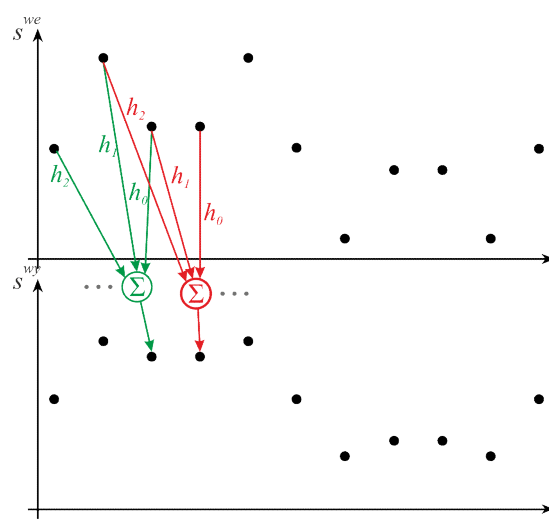


Graficzna prezentacja filtracji

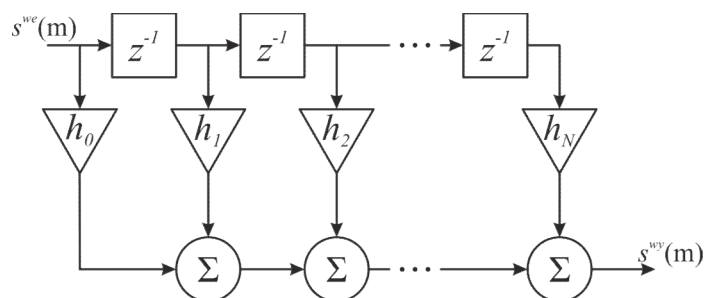


$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

N – rząd filtru



Graficzna prezentacja filtracji

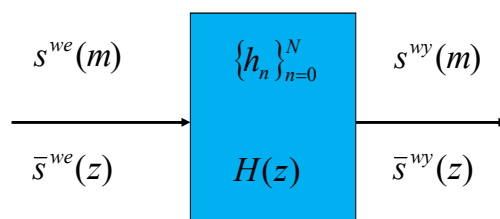


N – rząd filtru

$N + 1$ – liczba współczynników filtru

$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

Definicja filtru FIR w dziedzinie czasu



$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

$$s^{wy}(m) = h_m * s^{we}(m)$$

Definicja filtru FIR w z-dziedzinie



$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

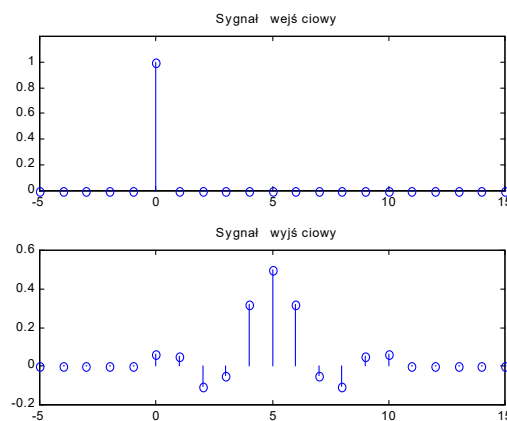
$$\begin{aligned} \bar{s}^{wy}(z) &= \sum_m s^{wy}(m) z^{-m} = \sum_m \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n) z^{-m} = \\ &= \sum_{n=0}^N h_n \sum_m s^{we}(m-n) z^{-m} = \sum_{n=0}^N h_n z^{-n} \bar{s}^{we}(z) = \bar{s}^{we}(z) \sum_{n=0}^N h_n z^{-n} \end{aligned}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = H(z) \bar{s}^{we}(z)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h_n z^{-n}$$

$$H(z) = \frac{\bar{s}^{wy}(z)}{\bar{s}^{we}(z)}$$

Filtracja dyskretnego impulsu Diraca



$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

Stąd h_n to tzw.
odpowiedź impulsowa

Dyskretny impuls Diraca $\Rightarrow h_0, h_1, h_2, \dots, h_N, 0, 0, \dots$

Liniowość filtrów FIR

$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

$$s^{we}(m) = \alpha s_1^{we}(m) + \beta s_2^{we}(m)$$

$$\begin{aligned} s^{wy}(m) &= \sum_n h_n [\alpha s_1^{we}(m-n) + \beta s_2^{we}(m-n)] \\ &= \alpha \sum_n h_n s_1^{we}(m-n) + \beta \sum_n h_n s_2^{we}(m-n) \end{aligned}$$

$$s^{wy}(m) = \alpha s_1^{wy}(m) + \beta s_2^{wy}(m)$$

Charakterystyki częstotliwościowe filtrów FIR

$$\begin{aligned} s^{wy}(t) &= \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(t-n\Delta t) \\ \hat{s}^{wy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s^{wy}(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(t-n\Delta t) e^{-2\pi j f t} dt \\ &= \sum_{n=0}^N h_n \hat{s}^{we}(f) e^{-2\pi j f n \Delta t} \quad \underline{f} = f \Delta t = f / f_p \end{aligned}$$

$$H(\underline{f}) = \frac{\hat{s}^{wy}(\underline{f})}{\hat{s}^{we}(\underline{f})} = \sum_{n=0}^N h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}$$

$$H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}$$

$$H(\underline{f}) \Rightarrow |H(\underline{f})| \text{ i } e^{j\theta(\underline{f})}$$

$$z = e^{2\pi j \underline{f}}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h_n z^{-n}$$

$$\text{tg}(\theta(\underline{f})) = \frac{\text{Im}(H(\underline{f}))}{\text{Re}(H(\underline{f}))}$$

$$\theta(\underline{f}) = \arctg \frac{\text{Im}(H(\underline{f}))}{\text{Re}(H(\underline{f}))}$$

Filtry FIR z liniową charakterystyką fazową



$$H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}$$

$$\text{dla } \theta(\underline{f}) = -2\pi \underline{f} \tau$$

$$\operatorname{tg}(\theta(\underline{f})) = \frac{\operatorname{Im}(H(\underline{f}))}{\operatorname{Re}(H(\underline{f}))}$$

$$H(\underline{f}) = \sum_{n=0}^N h_n e^{-2\pi j \underline{f} n} = \sum_{n=0}^N h_n \cos(2\pi \underline{f} n) - j \sum_{n=0}^N h_n \sin(2\pi \underline{f} n)$$

$$\operatorname{tg}(\theta(\underline{f})) = \frac{-\sum_{n=0}^N h_n \sin(2\pi \underline{f} n)}{\sum_{n=0}^N h_n \cos(2\pi \underline{f} n)} \Rightarrow \frac{-\sin(2\pi \underline{f} \tau)}{\cos(2\pi \underline{f} \tau)} = \frac{-\sum_{n=0}^N h_n \sin(2\pi \underline{f} n)}{\sum_{n=0}^N h_n \cos(2\pi \underline{f} n)} \quad \forall \underline{f} \in [0, 1/2]$$

Filtry FIR z liniową charakterystyką fazową



$$\sum_{n=0}^N h_n [\sin(2\pi \underline{f} \tau) \cos(2\pi \underline{f} n) - \cos(2\pi \underline{f} \tau) \sin(2\pi \underline{f} n)] = 0$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad \forall \underline{f} \in [0, 1/2]$$

$$\sum_{n=0}^N h_n \sin(2\pi \underline{f} (\tau - n)) = 0 \quad \forall \underline{f} \in [0, 1/2]$$

$$\text{dla } h_n = h_{N-n}$$

$$\tau = \frac{N}{2}$$

Czyli kąt nachylenia charakterystyki fazowej

$$\alpha = -\arctg(2\pi\tau) = -\arctg(\pi N)$$

Filtry FIR z liniową charakterystyką fazową



$$\sum_{n=0}^N h_n [\sin(2\pi \underline{f} \tau) \cos(2\pi \underline{f} n) - \cos(2\pi \underline{f} \tau) \sin(2\pi \underline{f} n)] = 0$$

$$\sum_{n=0}^N h_n \sin(2\pi \underline{f} (\tau - n)) = 0 \quad \forall \underline{f} \in [0, 1/2]$$

dla

$$h_n = h_{N-n}$$

$$\tau = \frac{N}{2}$$

Sprawdzenie dla N parzystego

$$\sum_{n=0}^{N/2} [h_n \sin(2\pi \underline{f} (\frac{N}{2} - n)) + h_{N-n} \sin(2\pi \underline{f} (\frac{N}{2} - N + n))] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N/2} [h_n \sin(2\pi \underline{f} (\frac{N}{2} - n)) - h_{N-n} \sin(2\pi \underline{f} (\frac{N}{2} - n))] = 0$$

Filtr z liniową charakterystyką fazową dla N nieparzystego



$$H(\underline{f}) = \sum_{n=0}^N h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}$$

$$H(\underline{f}) = 2e^{-\pi j N \underline{f}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h_n \cos((2n - N)\pi \underline{f})$$

$$\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f}$$

$$A(\underline{f}) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h_n \cos((2n - N)\pi \underline{f})$$

dla: $\underline{f} \in [0, 1/2]$

$$H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}$$

Filtr z liniową charakterystyką fazową dla N parzystego

$$H(\underline{f}) = e^{-\pi j N \underline{f}} \left[h_{N/2} + 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h_n \cos((2n - N)\pi \underline{f}) \right]$$

$$\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f}$$

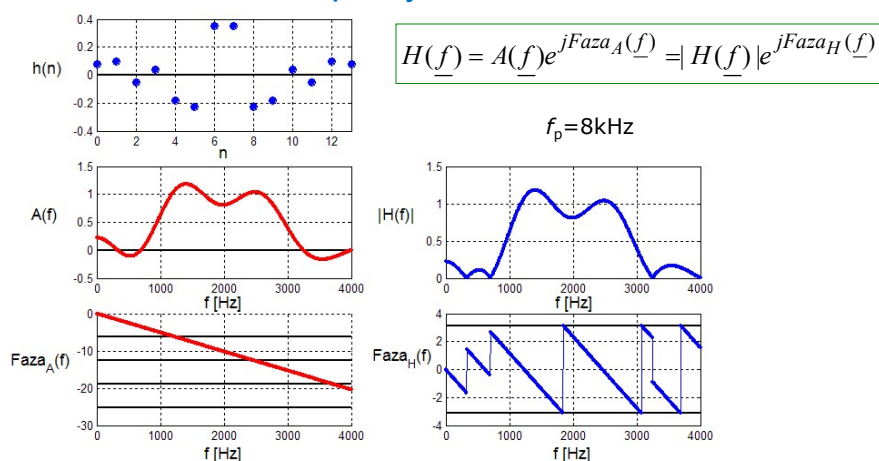
$$\text{dla: } \underline{f} \in [0, 1/2]$$

$$A(\underline{f}) = \left[h_{N/2} + 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h_n \cos((2n - N)\pi \underline{f}) \right]$$

$$H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}$$

15

Przykład filtru z liniową charakterystyką fazową N -nieparzyste

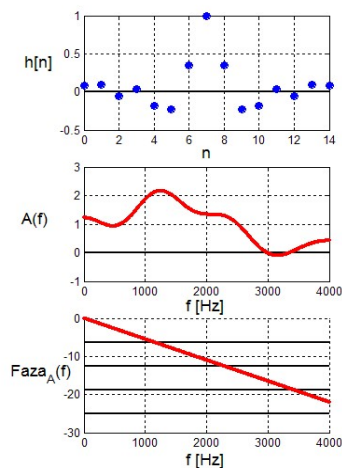


Na wykresie fazy czarne poziome linie oznaczają wielokrotność -2π

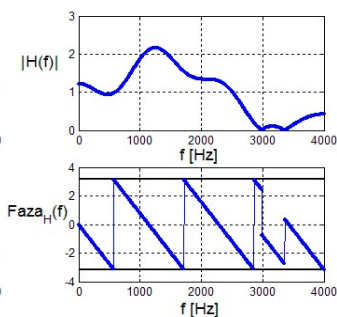
Na wykresie fazy czarne poziome linie oznaczają poziomy $+\pi$ oraz $-\pi$

16

Przykład filtru z liniową charakterystyką fazową N-parzyste



$$H(f) = A(f)e^{jFaza_A(f)} = |H(f)|e^{jFaza_H(f)}$$



Filtry FIR z afiniczną charakterystyką fazową



$$\theta(f) = -2\pi f\tau + \alpha$$

$$\tau = \frac{N}{2}$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$h_n = -h_{N-n}$$

Filtr z afiniczną charakterystyką fazową dla N nieparzystego

$$H(\underline{f}) = 2e^{-\pi j N \underline{f} - \pi j / 2} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h_n \sin((2n - N)\pi \underline{f}) \quad \text{dla: } \underline{f} \in [0, 1/2]$$

$$A(\underline{f}) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h_n \sin((2n - N)\pi \underline{f})$$

$$\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f} - \pi / 2 \quad \text{dla: } \underline{f} \in [0, 1/2]$$

$$\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f} + \pi / 2 \quad \text{dla: } \underline{f} \in [-1/2, 0]$$

$$H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}$$

Filtr z afiniczną charakterystyką fazową dla N parzystego

$$H(\underline{f}) = 2e^{-\pi j N \underline{f} - \pi j / 2} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} h_n \sin((2n - N)\pi \underline{f}) \quad \text{dla: } \underline{f} \in [0, 1/2]$$

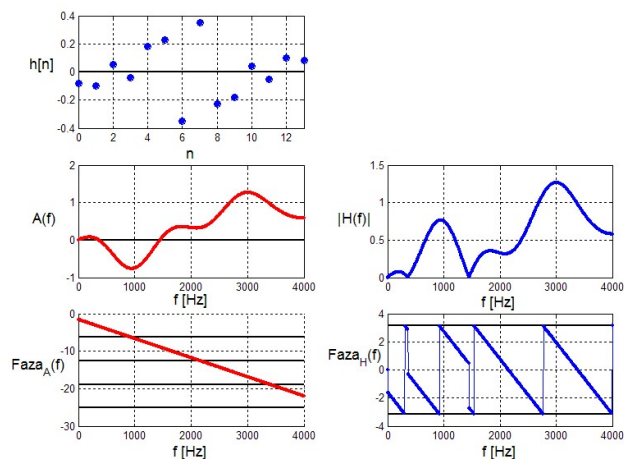
$$A(\underline{f}) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} h_n \sin((2n - N)\pi \underline{f})$$

$$\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f} - \pi / 2 \quad \text{dla: } \underline{f} \in [0, 1/2]$$

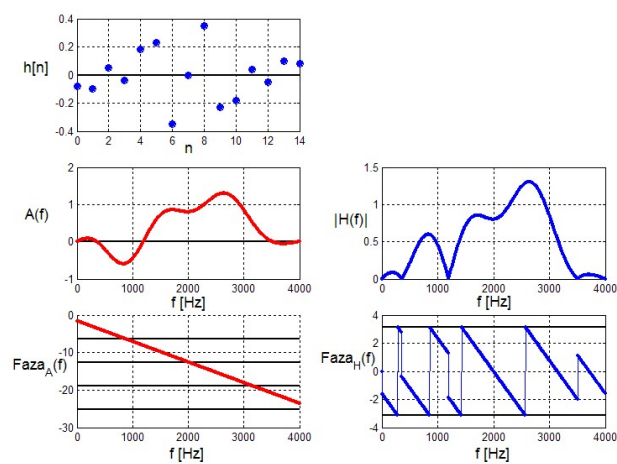
$$\theta(\underline{f}) = -\pi N \underline{f} + \pi / 2 \quad \text{dla: } \underline{f} \in [-1/2, 0]$$

$$H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}$$

Przykład filtra z afiniczną charakterystyką fazową, N -nieparzyste

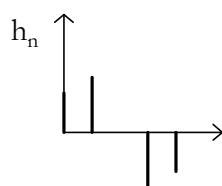
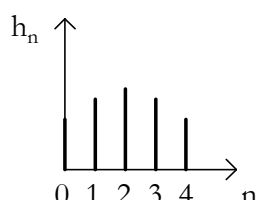


Przykład filtra z afiniczną charakterystyką fazową, N -parzyste

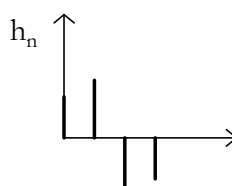
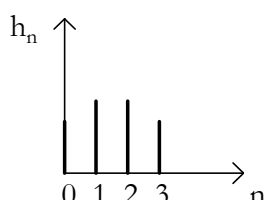


Cztery typy symetrii odpowiedzi impulsowych

filtry rzędu **parzystego**



filtry rzędu **nieparzystego**

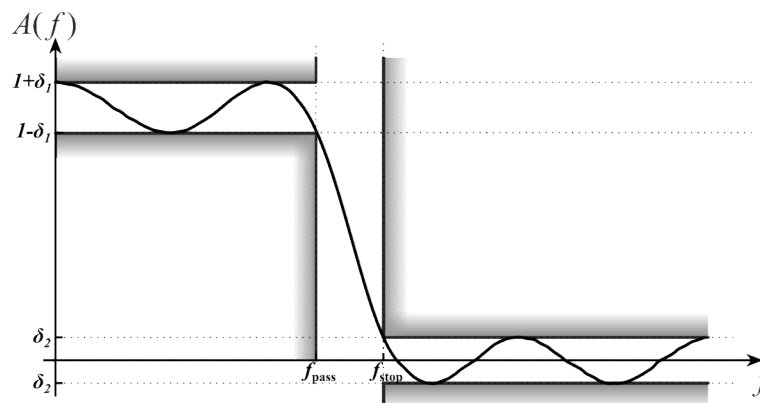


z **liniową**
charakterystyką
fazową

z **afiniczną**
charakterystyką
fazową

Projektowanie filtrów typu FIR

Założenia projektowe w dziedzinie częstotliwości



Projektowanie filtrów przy pomocy szeregów Fouriera



Współczynniki szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$H^{zad}(\underline{f}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}$$

oblicza się ze wzoru

$$h_n = \int_{-1/2}^{1/2} H^{zad}(\underline{f}) e^{2\pi j \underline{f} n} d\underline{f}$$

Ten wzór jest odwrotną transformacją Fouriera !

Charakterystyki częstotliwościowe spełniają warunki

$$\begin{cases} |H^{zad}(\underline{f})| = |H^{zad}(-\underline{f})| \\ \theta^{zad}(\underline{f}) = -\theta^{zad}(-\underline{f}) \end{cases}$$

Zespolona charakterystyka częstotliwościowa filtru ma postać

$$H(\underline{f}) = \sum_{n=0}^N h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}$$

Projektowanie filtrów przy pomocy szeregów Fouriera



Współczynniki szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$H^{zad}(\underline{f}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}$$

oblicza się ze wzoru

$$h_n = \int_{-1/2}^{1/2} H^{zad}(\underline{f}) e^{2\pi j \underline{f} n} d\underline{f}$$

Ten wzór jest odwrotną transformacją Fouriera !

Odpowiedź impulsowa spełnia warunki $h_n = 0$ dla:

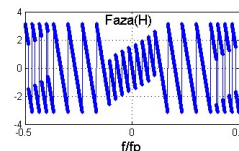
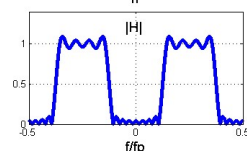
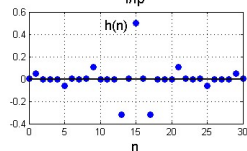
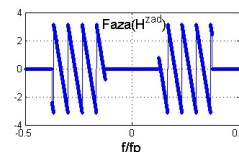
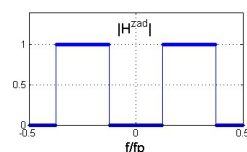
$n < 0$ bo filtr ma być przyczynowy

$n > N$ bo filtr ma być skończonego rzędu

Zespolona charakterystyka częstotliwościowa filtru ma postać

$$H(\underline{f}) = \sum_{n=0}^N h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}$$

Projektowanie filtrów przy pomocy szeregów Fouriera



Projektowanie filtrów przy pomocy odwrotnej DFT



Skoro

$$h_n = \int_{-1/2}^{1/2} H^{zad}(\underline{f}) e^{2\pi j \underline{f} n} d\underline{f}$$

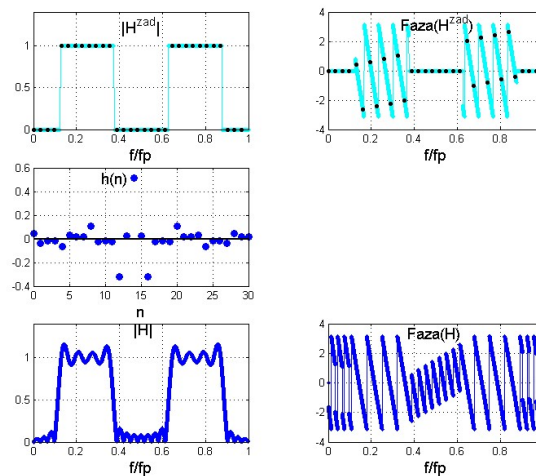
to

$$h_n = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N H^{zad}(k/(N+1)) w_{N+1}^{-kn}$$

$$n = 0, \dots, N$$

$$w_{N+1} = e^{-j \frac{2\pi}{N+1}}$$

Projektowanie filtrów przy pomocy DFT



Kryterium w przestrzeni

$$H(\underline{f}) = \sum_{n=0}^N h_n e^{-2\pi j \underline{f} n} \quad \text{AGH}$$

PROJEKTOWANE



$$Q^{opt} = \min_h Q \quad L_W^2(0, 1/2)$$

$$Q(h_0, \dots, h_N) = \int_0^{1/2} W(\underline{f}) \left| H^{zad}(\underline{f}) - H(\underline{f}) \right|^2 d\underline{f} \quad W(\underline{f}) \geq 0$$

$$Q(h_0, \dots, h_{(N-1)/2}) = \int_0^{1/2} W(\underline{f}) \left| H^{zad}(\underline{f}) - 2e^{-\pi j \underline{f} N} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} h_n \cos(\pi \underline{f} (2n+1)) \right|^2 d\underline{f}$$

$$h = \{h_n : n = 0, \dots, (N-1)/2\}$$

$$H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}$$

$$Q = \int_0^{1/2} \left\{ \alpha [A(\underline{f}) - A^{zad}(\underline{f})]^2 + (1-\alpha) [\theta(\underline{f}) - \theta^{zad}(\underline{f})]^2 \right\} d\underline{f} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Kryterium w przestrzeni



$$E(\underline{f}) = W(\underline{f}) \left(A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f}) \right) \quad C_W(0, 1/2)$$

$$Q = \max_{\underline{f}} |E(\underline{f})|$$

PROJEKTOWANE



$$Q^{opt} = \min_h \max_{\underline{f}} |E(\underline{f})|$$

Przykład metody Parks-McClellan 1972 rok



$$E(\underline{f}) = W(\underline{f}) \left(A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f}) \right)$$

$$Q^{opt} = \min_h \max_{\underline{f}} |E(\underline{f})|$$

Algorytm Remeza 1957 rok

Evgeny Yakovlevich Remez
(1895 na Białorusi 1975 w Kijowie)

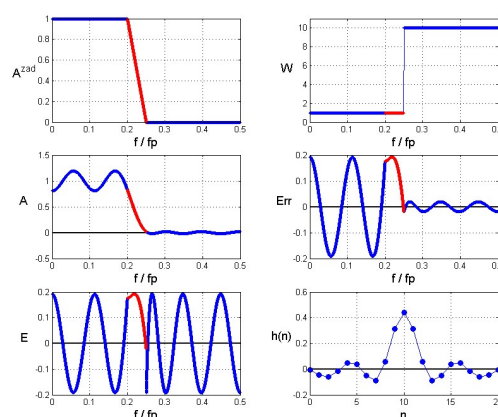
odchylki $\delta=0,18$

Przykład metody Parks-McClellan 1972 rok



$$Q^{opt} = \min_h \max_{\underline{f}} |E(\underline{f})|$$

$$E(\underline{f}) = W(\underline{f}) \left(A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f}) \right)$$



Algorytm Remeza
1957 rok

Na czerwono
zaznaczono pasmo
przejściowe
- jego waga jest
taka sama jak dla
pasma
przepustowego

Odchylki E $\delta=0,194$

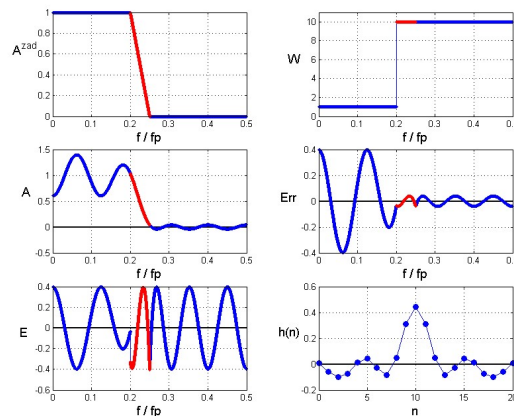
Przykład metody Parks-McClellan 1972 rok



$$Q^{opt} = \min_h \max_{\underline{f}} |E(\underline{f})|$$

$$E(\underline{f}) = W(\underline{f}) (A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f}))$$

Algorytm Remez
1957 rok



Na czerwono
zaznaczono pasmo
przejściowe
- jego waga jest
taka sama jak dla
pasma zaporowego

Odchyłki $\delta=0,194$

Twierdzenie Czebyszewa



Jeżeli $A(\underline{f}) = 2 \sum_{n=0}^M h_n \cos((2n+1)\pi \underline{f})$

i istnieje co najmniej $M+2$ częstotliwości

$$0 < \underline{f}_1 < \underline{f}_2 < \dots < \underline{f}_{M+1} < \underline{f}_{M+2} < 0,5$$

takich, że

$$E(\underline{f}_i) = -E(\underline{f}_{i+1})$$

dla $i=1, \dots, M+1$ oraz

$$|E(\underline{f}_i)| = \delta = \max_{0 \leq \underline{f} \leq 0,5} |E(\underline{f})|$$

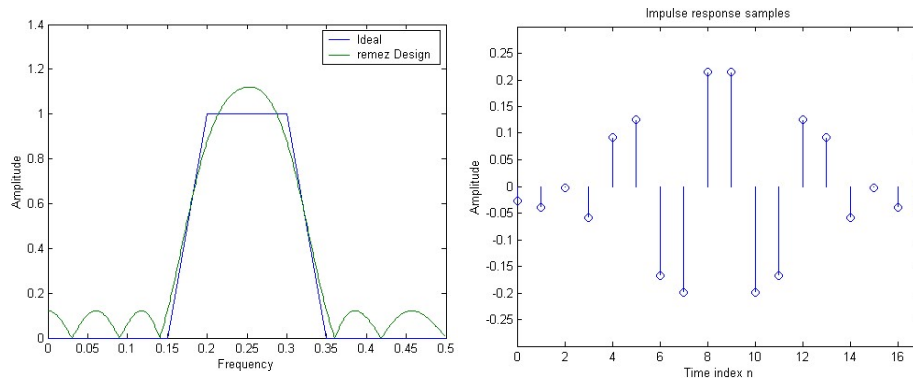
dla $i=1, \dots, M+2$,

to **wtedy i tylko wtedy istnieje jeden** zestaw współczynników h_0, \dots, h_M dla których δ osiąga najmniejszą wartość.

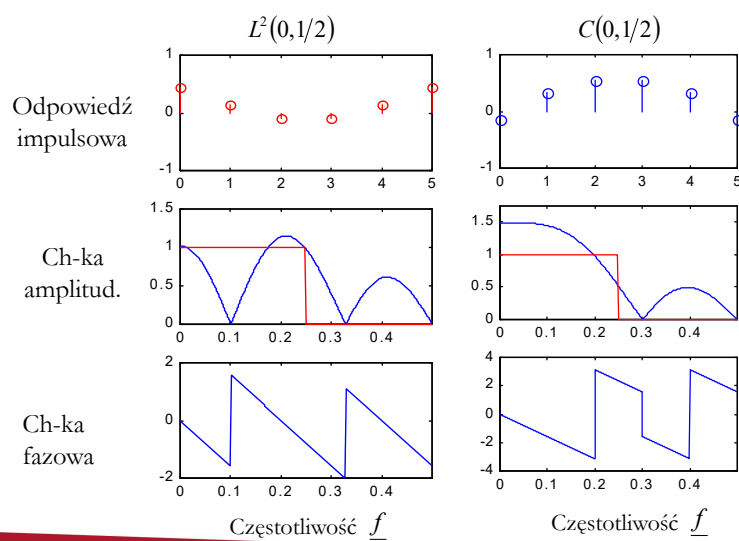
Przykład – FIR metodą Remeza



Filtr pasmowy zaprojektowany metodą Remeza



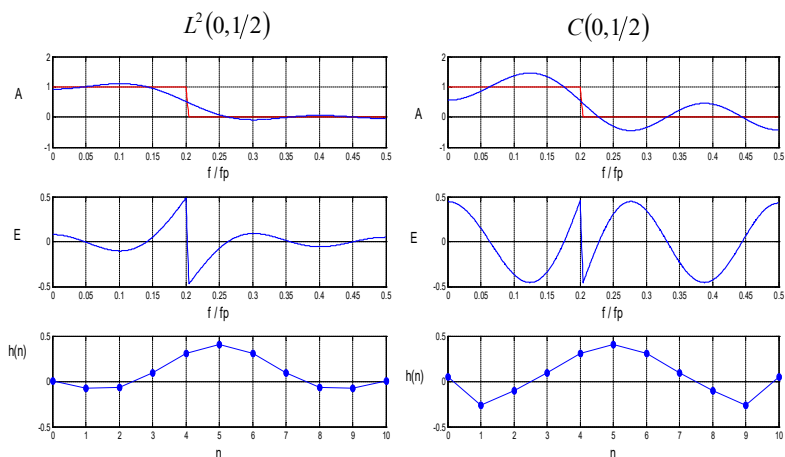
Optimalizacja w przestrzeni



Optymalizacja w przestrzeni



$$E(\underline{f}) = A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f})$$



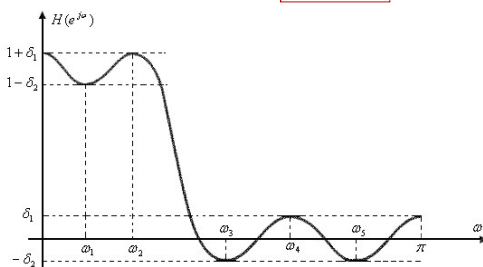
Projektowanie metodą programowania liniowego



$$A^{zad}(\underline{f}) - \delta \leq A(\underline{f}) \leq A^{zad}(\underline{f}) + \delta$$

$$\begin{aligned} Ax &\geq b \\ Q &= c^T x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A(\underline{f}) + \delta \geq A^{zad}(\underline{f}) \\ -A(\underline{f}) + \delta \geq -A^{zad}(\underline{f}) \end{cases}$$



$$\underline{f}_k \in [0 \quad 0,5] \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, K$$

Macierzowy zapis programowania liniowego



$$\begin{cases} A(\underline{f}) + \delta \geq A^{zad}(\underline{f}) \\ -A(\underline{f}) + \delta \geq -A^{zad}(\underline{f}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Ax &\geq b \\ Q &= c^T x \end{aligned}$$

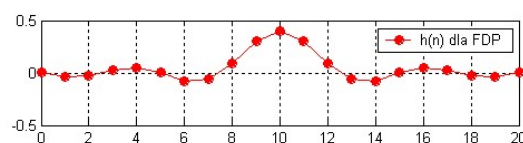
$$2 \begin{bmatrix} \cos(\pi \underline{f}_1) & \cos(3\pi \underline{f}_1) & \cdots & \cos(N\pi \underline{f}_1) & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\pi \underline{f}_K) & \cos(3\pi \underline{f}_K) & \cdots & \cos(N\pi \underline{f}_K) & 1/2 \\ -\cos(\pi \underline{f}_1) & -\cos(3\pi \underline{f}_1) & \cdots & -\cos(N\pi \underline{f}_1) & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\cos(\pi \underline{f}_K) & -\cos(3\pi \underline{f}_K) & \cdots & -\cos(N\pi \underline{f}_K) & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{\frac{N-1}{2}} \\ \delta \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} A^{zad}(\underline{f}_1) \\ \vdots \\ A^{zad}(\underline{f}_K) \\ -A^{zad}(\underline{f}_1) \\ \vdots \\ -A^{zad}(\underline{f}_K) \end{bmatrix}$$

$$Q = \delta$$

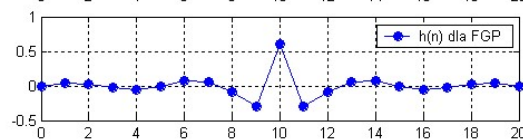
Przykładowe odpowiedzi impulsowe filtrów



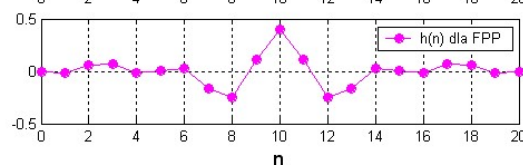
Dolnoprzepustowy
(DP)



Górnoprzepustowy
(GP)



Pasmowoprzepustowy
(PP)



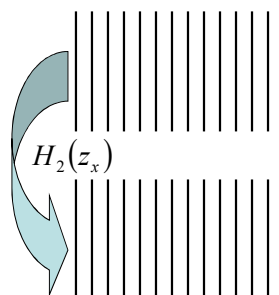
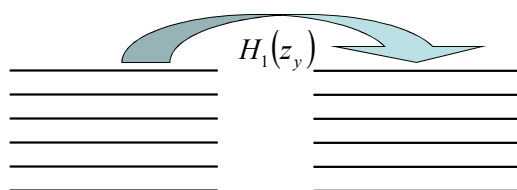
Filtracja 2-D FIR



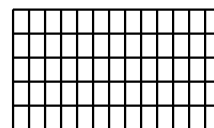
FILTR



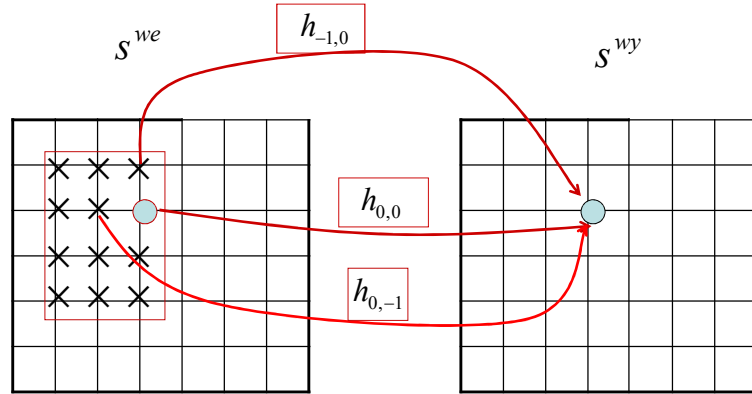
Praktyka filtracji 2-D



Dwa filtry
jednowymiarowe
zastępują filtr
dwuwymiarowy



Graficzna prezentacja filtru 2-D FIR



Definicja filtru 2-D FIR



$$s^{wy}(k, l) = \sum_m \sum_n h_{m,n} s^{we}(k-m, l-n)$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = \sum_k \sum_l s^{wy}(k, l) z_x^{-k} z_y^{-l}$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = \sum_{(m,n) \in R_h} h_{m,n} \sum_k \sum_l s^{we}(k-m, l-n) z_x^{-k} z_y^{-l}$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = \sum_{(m,n) \in R_h} h_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n} \bar{s}^{we}(z_x, z_y)$$

$$H(z_x, z_y) = \sum_{(m,n) \in M^{we}} h_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n}$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = H(z_x, z_y) \bar{s}^{we}(z_x, z_y)$$

Charakterystyki częstotliwościowe filtru 2-D FIR



$$z_x = e^{2\pi j \underline{f}_x}$$

oraz

$$z_y = e^{2\pi j \underline{f}_y}$$

$$H(z_x, z_y) = \sum_{(m,n) \in M^{he}} h_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n}$$

$$H(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = \sum_{(m,n) \in R_h} h_{m,n} e^{-2\pi j (\underline{f}_x m + \underline{f}_y n)} = A(\underline{f}_x, \underline{f}_y) e^{j\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y)}$$

$$\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = \arctg \left(\frac{\operatorname{Im}(H(\underline{f}_x, \underline{f}_y))}{\operatorname{Re}(H(\underline{f}_x, \underline{f}_y))} \right)$$

$$A(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}^2(H(\underline{f}_x, \underline{f}_y)) + \operatorname{Im}^2(H(\underline{f}_x, \underline{f}_y))}{\operatorname{Im}(H(\underline{f}_x, \underline{f}_y))} \sin(\theta) & \text{dla } \theta \neq 0 \\ \operatorname{Re}(H(\underline{f}_x, \underline{f}_y)) & \text{dla } \theta = 0 \end{cases}$$

Filtry 2-D FIR z liniową charakterystyką fazową



$$\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = -2\pi(\underline{f}_x \tau_x + \underline{f}_y \tau_y)$$

$$\operatorname{tg}(-2\pi(\underline{f}_x \tau_x + \underline{f}_y \tau_y)) = \frac{\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N h_{m,n} \sin(2\pi(\underline{f}_x m + \underline{f}_y n))}{\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N h_{m,n} \cos(2\pi(\underline{f}_x m + \underline{f}_y n))}$$

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N h_{m,n} \sin(2\pi[\underline{f}_x (\tau_x - m) + \underline{f}_y (\tau_y - n)]) = 0 \quad \forall \underline{f}_x, \underline{f}_y \in [0, 1/2]$$

$$\tau_y = N/2$$

$$\tau_x = M/2$$

$$h_{m,n} = h_{M-m, N-n}$$

Filtry 2-D FIR z afiniczną charakterystyką fazową



$$\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = -2\pi(\underline{f}_x \tau_x + \underline{f}_y \tau_y) \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N h_{m,n} \cos(2\pi[\underline{f}_x(\tau_x - m) + \underline{f}_y(\tau_y - n)]) = 0$$

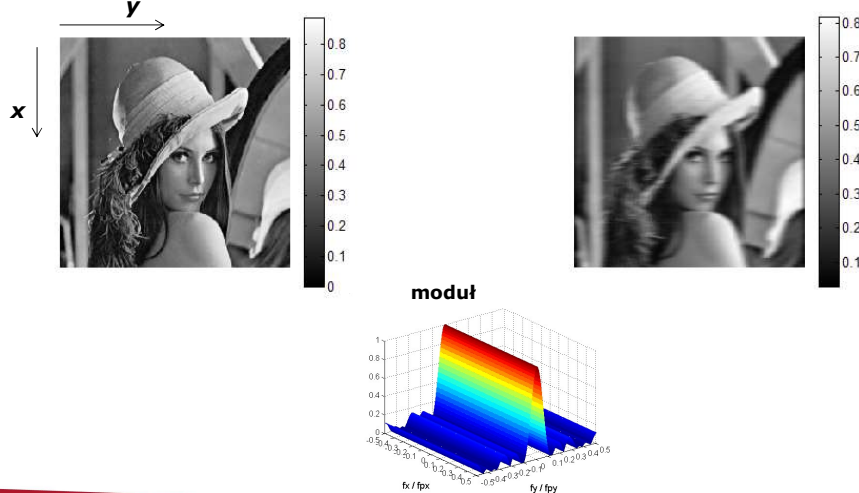
$$\tau_x = M/2$$

$$\tau_y = N/2$$

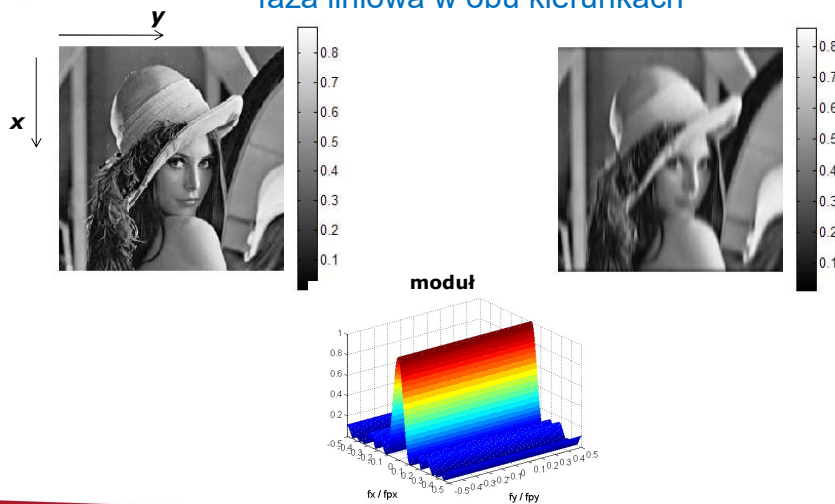
$$\forall \underline{f}_x, \underline{f}_y \in [0, 1/2]$$

$$h_{m,n} = -h_{M-m, N-n}$$

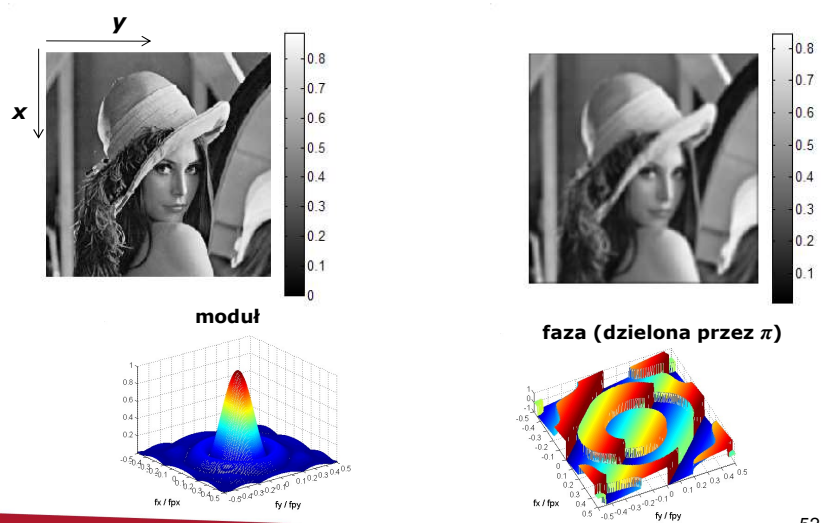
Filtr dolnoprzepustowy w kierunku y wszechprzepustowy w kierunku x faza liniowa w obu kierunkach



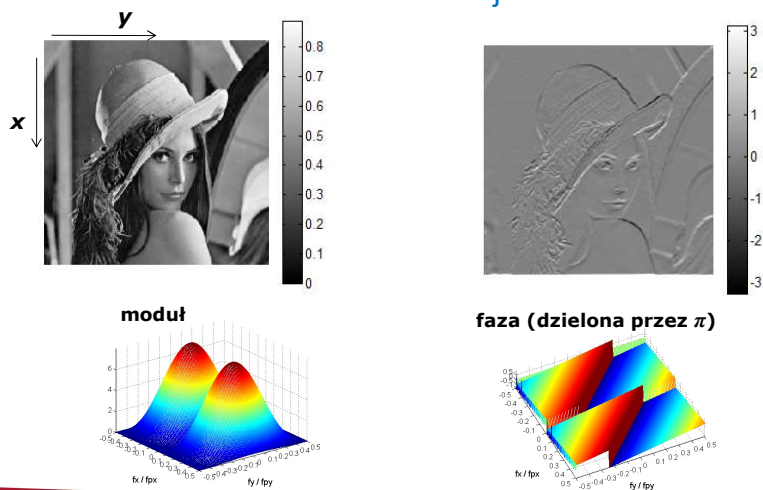
Filtr dolnoprzepustowy w kierunku x wszechprzepustowy w kierunku y faza liniowa w obu kierunkach



Filtr dolnoprzepustowy w obu kierunkach faza liniowa w obu kierunkach



Filtr pasmowo-przepustowy w kierunku x dolnoprzepustowy w kierunku y w kierunku x faza jest afiniczna



Filtr pasmowo-przepustowy w kierunku y dolnoprzepustowy w kierunku x w kierunku y faza jest afiniczna

