KOŁO MATEMATYKÓW
STUDENTÓW UNIWERSYTETU
JAGIELLOŃSKIEGO
IM. PROF. STANISŁAWA ZAREMBY

ROZMAITOŚCI ABSURDALNE

WRAZ Z ELEMENTAMI LOGIKI NIEFORMALNEJ

DOROBEK INSTYTUTU
MATEMATYKI NAJWSPÓŁCZEŚNIEJSZEJ

Kraków 1978

$$\sum^{\infty} u_j$$

1894

Wydanie II, 1994

SPIS TREŚCI:

I. TEORIA VANITATIS PLURALIS 3

§ 1. Małe twierdzenie vanitatis pluralis (J. Piórek) 3

§ 2. Wielkie twierdzenie vanitatis pluralis (J. Stasica) 4

§ 3. Teoria miarki (J. Piórek) 5

II. ZBIÓR ABSURDALNY 7

§ 1. Definicja zbioru absurdalnego 7

§ 2. Podstawowe własności zbioru absurdalnego 7

§ 3. Inny dowód wielkiego twierdzenia vanitatis pluralis 8

§ 4. Twierdzenie o usuwaniu elementu niepożądanego 9

§ 5. Odwzorowania zbioru absurdalnego 9

§ 6. Odwzorowania w zbiór absurdalny 9

III. NIEZBIORY 1

§ 1. "Zbiór" wszystkich zbiorów 1

§ 2. Problem izomorfizmu rodzin 1

IV. ELEMENTY LOGIKI NIEFORMALNEJ 1

§ 1. Bezprawie podwójnej negacji (A. Grobler) 1

§ 2. Wartościowanie zdań (A. Grobler) 1

§ 3. Reguły wnioskowania. Metody dowodzenia twierdzeń. 1

§ 4. Zagadnienie prawdy 1

§ 5. Rachunek identyfikatorów (M. Has) 1

V. LICZBY KARDYNALNE 2

§ 1. Ułamki kardynalne 2

§ 2. Liczby kardynalne zespolone 2

§ 3. Porównanie konwencjonalnej i absurdalnej teorii mocy 2

§ 4. Podzbiory zbioru pustego 2

VI. ELEMENTY ANALIZY FIKCJONALNEJ 2

§ 1. Pojęcia podstawowe 2

§ 2. Twierdzenie półróżniczkowe (J. Adamus) 2

§ 3. Przykład bardzo fajnej funkcji, która rośnie i nie rośnie, a nie jest stała (J. Adamus) 2

VII. TEORIA ROZBÓJNIKA 2

§ 1. Rozbójnik w zbiorach uporządkowanych 2

§ 2. Rozbójnik a moc zbioru 2

§ 3. Rozbójnik w przestrzeniach topologicznych 2

§ 4. Inne zastosowanie teorii rozbójnika 2

§ 5. Problem definicji rozbójnika 29
§ 6. Wzajemne stosunki pojęć struktury, rozbójnika i deburdelizacji 30
§ 7. Znaczenie teorii rozbójnika 31
VIII. LICZBY PORZĄDKOWE 32
§ 1. Wprowadzenie pojęć 32
§ 2. Liczby ordynarne a teoria kolejek 32
§ 3. Liczby podporządkowe, a porządkowe 33
IX. WYBRANE ZAGADNIENIA Z HISTORII MATEMATYKI NAJWSPÓŁCZEŚNIEJSZEJ 34

Rozdział pierwszy

TEORIA VANITATIS PLURALIS

Nasze rozważania teoretyczne zaczniemy od zera. Od zera bowiem zaczynają ludzie ambitni.

Zero jest liczbą kardynalną zbioru pustego, a raczej zbiorów pustych. Wbrew temu, czego uczy matematyka konwencjonalna, zbiorów pustych jest wiele. Intuicja matematyka najwspółcześniejszego wzdryga się przed utożsamieniem takich zbiorów, jak zbiór kwadratowych kół i zbiór okrągłych kwadratów.

Utożsamienie takie prowadzi do błednego koła, które się zamyka z chwilą rozwiązania problemów kwadratury koła i kołowacizny kwadratu. Nasza intuicja została poparta autorytetem prof. St. Łojasiewicza, który na jednym ze swoich wykładów z podstaw analizy matematycznej dla studentów UJ w 1970 r. wyraził się następująco:

"Proszę Państwa. To jest zbiór pusty i to jest zbiór pusty. Ale to są różne zbiory puste."

Powstały w ten sposób

AKSJOMAT: *Istnieją co najmniej dwa różne zbiory puste.*

stanął u podstaw teorii vanitatis pluralis zapoczątkowanej przez J. Piórka i rozwijanej dalej przez W. Suchonia, J. Stasicę i A. Groblero.

§1. Małe twierdzenie vanitatis pluralis (J. Piórek)

TWIERDZENIE: *Istnieje przeliczalna rodzina zbiorów pustych.*

D o w ó d: Na podstawie aksjomatu istnieją dwa różne zbiory puste. Oznaczmy je przez $\varnothing_1$ i $\varnothing_2$. Suma mnogościowa zbiorów pustych jest zbiorem pustym.

$$\varnothing_1 \cup \varnothing_2 = \varnothing$$

Udowodnimy o zbiorze $\varnothing$, że jest różny od $\varnothing_1$, a tym bardziej od $\varnothing_2$ (ewentualnie odwrotnie).

Dla dowodu nie wprost przyjmijmy, że $\varnothing = \varnothing_1$. Wynika stąd

$$\varnothing_1 \cup \varnothing_2 = \varnothing_1$$

Ale $\varnothing_1$, jako zbiór pusty, jest modułem dodawania mnogościowego, a więc możemy go po lewej stronie opuścić. Zatem

$$\varnothing_2 = \varnothing_1$$

podczas gdy, zgodnie z przyjętym przez nas oznaczeniem, $\varnothing_1$ i $\varnothing_2$ to są RÓŻNE zbiory puste, istniejące na podstawie aksjomatu.

Dowód tego faktu, że $\varnothing \neq \varnothing_2$ pozostawiamy ewentualnemu czytelnikowi. Skonstruowaliśmy zatem trzeci zbiór pusty, różny od poprzednich. Prowadząc dalej rozumowanie indukcyjne, łatwo można wykazać, że dla każdej naturalnej liczby n istnieje n różnych zbiorów pustych. A to jak łatwo widać (jest to tzw. dowód przez ogląd), dowodzi tezy twierdzenia.

■

§2. Wielkie twierdzenie vanitatis pluralis (J. Stasica)

W związku z twierdzeniem Piórka nasuwają się dwa pytania:

1) Czy można założenia twierdzenia osłabić?
2) Czy można tezę twierdzenia wzmocnić?

Odpowiedzi na obydwa pytania są pozytywne.

Odpowiedź na pierwsze z nich dał W. Suchoń. Pomysł jego wywodzi się niewątpliwie od odkrytego w 1967 r. sposobu kontynuacji programu erlangeńskiego Kleina dotyczącego konstrukcji teorii geometrycznych przez zadanie grupy przekształceń.
Do coraz ogólniejszych teorii dochodzimy przechodząc od grupy izometrii przez grupę podobieństw, przekształceń afinicznych itd., aż do przekształceń topologicznych. I na tym program Kleina się kończy. Jednak grupa anonimowych matematyków, inspirowana przez znakomite wykłady prof. St. Gołąba z geometrii analitycznej, poszła dalej w tym uogólnianiu definiując geometrię bądź jaką, opartą na najogólniejszej grupie przekształceń tzw. bądź jakich, tzn. odwzorujących bądź co w bądź co (łatwo sprawdzić, że to rzeczywiście jest grupa).

Żeby jednak mówić o bądź czym, w sposób mający jakikolwiek sens, należy założyć, że cokolwiek istnieje. To właśnie naturalne założenie przyświeca konstrukcji W. Suchonia.

TWIERDZENIE: *Ilość zbiorów pustych jest dowolnie duża.*

D o w ó d: Weźmy pod uwagę dowolną populację przedmiotów (istnieją na mocy założenia istnienia czegokolwiek), które nazwiemy zero-elementami. Będzie to zerowy poziom abstrakcji V_0. Następnie indukcyjnie zdefiniujemy n-ty poziom abstrakcji V_n jako populację przedmiotów **X** dających się określić przez podanie funkcji zdaniowej "x należy do X", gdzie x jest przedmiotem $n-1$-ego poziomu abstrakcji V_{n-1}. Ponadto żądamy, aby poziomy abstrakcji $V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$ były parami rozłączne.

Dalej, do każdego poziomu abstrakcji $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ dołączymy przedmiot $\varnothing_n$ zdefiniowany jako obiekt taki, że zdanie "x należy do $\varnothing_n$" jest fałszywe dla każdego $n-1$ - elementu x.

Obiekty $\varnothing_1, \varnothing_2, \ldots$ są zbiorami pustymi. Są różne, ponieważ każdy należy do innego poziomu abstrakcji i, ponadto, dokładnie jednego, gdyż poziomy abstrakcji są rozłączne. Jest ich przeliczalna ilość, bo poziomów abstrakcji jest przeliczalna ilość.

Taką właśnie konstrukcję podał W. Suchoń. Dalszy ciąg dowodu podał A. Grobler. Oryginalny dowód J. Stasicy, opierający się o teorię zbioru absurdalnego, podamy później.

Weźmy pod uwagę przeliczalną rodzinę (jest to tzw. dowód familijny) $\varnothing_1, \varnothing_2, \ldots$ zbiorów pustych, skonstruowanych przez W. Suchonia. Wyznacza ona zerowy poziom abstrakcji nowej konstrukcji W. Suchonia. I nie trzeba długo szukać, bo już na pierwszym poziomie abstrakcji nowej konstrukcji znajdzie się zbiór pusty, powiedzmy $\varnothing_{1,1}$, który nie jest członkiem naszej rodziny.

Dowodzi to, że zbiorów pustych jest więcej niż przeliczalna ilość.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej hipotetycznej mocy zbiorów pustych, co ewentualny czytelnik sam łatwo sprawdzi (jest to tzw. dowód spychologiczny).

Zatem moc rodziny zbiorów pustych jest dowolnie duża. Jest to tzw.przemoc.

■

§3. Teoria miarki (J. Piórek)

J. Piórek w swojej pracy magisterskiej prawie wszędzie na temat jakikolwiek wykazał, że założenie istnienia czegokolwiek w teorii vanitatis (pustoty) jest założeniem nie tylko wielkiej wagi, ale i miary. W przedmowie pracy autor pisze:

"Na następnej kartce mieści się (z powodzeniem) praca magisterska prawie wszędzie względem miary dyskretnej (powiedziałbym, przesadnie dyskretnej) skupionej w czterech narożnych punktach kartki. Ze względów technicznych (ciężar pracy!, ale nie gatunkowy) bierzemy miarę skończoną i dystrybuujemy ją w wyżej wymienionych punktach równomiernie, dzięki czemu praca jest wyważona."

Po dokonaniu prostej operacji odwracania (strony) okazuje się, że następna kartka jest pusta. Praca na temat jakikolwiek jest pusta! Nowe odkrycie zastosowania czegokolwiek do teorii vanitatis jest na miarę..., czego? Autor wyjaśnia w posłowiu pracy:

"Jest mi nieZMIERnie przykro, ale mimo usilnych, przekraczających MIARĘ ludzkich możliwości (chyba nie jest ona trywialna) poszukiwań lub nawet MIERNYCH (gdzie zaś mówić o wybitnych) artykułów na miarę osiągnięć IMN. Najlepsze w tej MIERZE osiągnięcia wychodzą daleko poza (a może przed) zakres matematyki klasycznej. Oto niektóre z nich:

W. Shakespeare - "MIARKA za MIARKĘ"
Lud polski - "Ziarnko do ziarnka, a zbierze się MIARKA"
A. Mickiewicz - "Mierz siły na zaMIARY"
Nobiles Poloni - "MIARkuj się, waść!"

Otrzeźwiony tymże apelem kończę, aby przypadkiem nie przebrać MIARY (bo nie ma w co), albowiem wówczas, zapewne, żadną MIARĄ nie byłbym w stanie obronić swych racji i swej pracy.

Sądzę aliści zarazem, że w MIARĘ upływu czasu te ze wszech MIAR przydatne uwagi znajdą uznanie posteritatis (potomności) i żadną MIARĄ nie będzie ich można pominąć w braniu MIARY poziomu matematyki najwspółcześniejszej, walczącej z MIERnotą. Tu kończę już, nie znający MIARY w samochwalstwie (nad pracą na temat jakikolwiek)."

Rozdział drugi

ZBIÓR ABSURDALNY

Na jednym ze swoich wykładów z podstaw analizy matematycznej prof. St. Łojasiewicz użył sformułowania: "zbiór, który nie zawiera żadnego zbioru". Odkrycie to wywołało panikę w szeregach pracowników naukowych Instytutu Matematyki Najwspółcześniejszej, obawiających się pozostania w tyle za najnowszymi odkryciami matematycznymi. Opracowaniem problemu istnienia takiego zbioru, jego własności i podstawowych konsekwencji z nich wynikających, zajął się J. Stasica.

§1. Definicja zbioru absurdalnego

DEFINICJA: *Zbiór absurdalny jest to zbiór, który po dołączeniu do niego jednego (dowolnego) elementu jest zbiorem pustym.*

Oznaczamy go symbolem $\overset{\varnothing}{A}$.

"Ażeby symbolika była przejrzysta i sprzyjała rozwojowi danej teorii musi być w miarę zwięzła. Symbol oznaczający pewne pojęcie nie może być zbyt lakoniczny i stenograficzny, gdyż musi swym kształtem odzwierciedlać całą treść pojęcia, nie może być zbyt rozwlekły, gdyż zbyt długi zapis staje się mało przejrzysty." (St. Gołąb "Rachunek tensorowy" PWN Warszawa 1966).

Powyższy cytat, zdaniem J. Stasicy, uzasadnia przyjęty przez nas symbol zbioru absurdalnego, gdyż samo A nie odzwierciedla niezwykłej głębi pojęcia, zaś ewentualny $\underset{\text{IMN}}{\overset{\varnothing}{A}}$ byłby zbyt rozwlekły i kłopotliwy w użyciu.

Przyjmujemy, że

$$\operatorname{card} \overset{\varnothing}{A} = -1.$$

§2. Podstawowe własności zbioru absurdalnego

TWIERDZENIE (absurdalne twierdzenie minimalne J. Stasicy): *Zbiór $\overset{\varnothing}{A}$ nie zawiera żadnego zbioru.*

D o w ó d: przez ogląd - wystarczy popatrzeć. ■

TWIERDZENIE (kardynalne minimalne twierdzenie J. Stasicy): -1 *jest najmniejszą liczbą kardynalną.*

D o w ó d: Jest to wniosek z poprzedniego twierdzenia. Gdyby bowiem istniała liczba kardynalna mniejsza od -1, oznaczałoby to, że istnieje zbiór o mocy równej tej liczbie, taki, który zawierałby się w zbiorze absurdalnym. A to jest niemożliwe.

■

Dla tego samego powodu, a "powody dzielą się na takie, z których korzystamy w dowodzie i takie, dla których tak musi być (A. Lasota)", zachodzi następujące

TWIERDZENIE (o jednoznaczności absurdalnej): *Zbiór absurdalny jest jedynym zbiorem o liczbie kardynalnej* -1.

Co więcej, istnieje tylko jeden egzemplarz tego zbioru.

§3. Inny dowód wielkiego twierdzenia vanitatis pluralis

Podamy teraz oryginalny dowód J. Stasicy twierdzenia z rozdziału I, §2, str. 4.
Niech U będzie dowolnym zbiorem jednoelementowym. Wprost z definicji zbioru absurdalnego wynika:

$$\overset{\varnothing}{A} \cup U = \varnothing.$$

Wstawiając za U różne zbiory jednoelementowe otrzymamy po prawej stronie równania różne zbiory puste. W ten sposób każdemu zbiorowi jednoelementowemu przyporządkowaliśmy jednoznacznie pewien zbiór pusty. Ponieważ zbiorów jednoelementowych jest dowolnie wiele to również zbiorów pustych jest dowolna ilość.

■

Mamy dwie konstrukcje dowolnie licznej rodziny zbiorów pustych: abstrakcyjną Suchonia i absurdalną Stasicy. Powstaje naturalne pytanie, czy rodziny te są identyczne. Z pozytywnym rozwiązaniem przez A. Groblera tego tzw. problemu izomorfizmu rodzin cierpliwy czytelnik zapozna się w toku dalszej lektury skryptu. Okazuje się bowiem, że dowolna liczność zbioru oznacza jego przemoc. Obiekty posiadające przemoc nazywamy niezbiorami. Pojęcie to wprowadził M. Has. Tak więc rodzina zbiorów pustych jest niezbiorem.

§4. Twierdzenie o usuwaniu elementu niepożądanego

Weźmy pod uwagę zbiór X i niech x będzie niepożądanym elementem zbioru X. Dodajmy zbiór absurdalny do zbiory X.

$$\overset{\varnothing}{A} \cup X = \overset{\varnothing}{A} \cup \{x\} \cup (X \setminus \{x\}) = \varnothing \cup (X \setminus \{x\}) = X \setminus \{x\}.$$

W ten sposób usunęliśmy ze zbioru element niepożądany. Nie trzeba chyba mówić o olbrzymim znaczeniu społecznym twierdzenia J. Stasicy o usuwaniu elementu niepożądanego przy pomocy zbioru absurdalnego.

§5. Odwzorowania zbioru absurdalnego

Niech X będzie dowolnym skończonym zbiorem niepustym. Dalej, niech

$$X^{\overset{\varnothing}{A}} = \{f : \overset{\varnothing}{A} \to X\}.$$

Biorąc pod uwagę fakt, że $\operatorname{card} \overset{\varnothing}{A} = -1$ i korzystając ze znanych twierdzeń teorii mnogości, otrzymamy:

$$\operatorname{card} X^{\overset{\varnothing}{A}} = \frac{1}{\operatorname{card} X}.$$

Zatem zbiór $X^{\overset{\varnothing}{A}}$ ma moc ułamkową. Udowodniliśmy w ten sposób

TWIERDZENIE (o zbiorach ułomnych): *Istnieją zbiory o mocy ułamkowej.*

Ważnym przykładem zbioru ułamkowego jest odkryty przez M. Łuczyńskiego przedział półpusty (półpunkt), tj. przedział $[x,x)$ lub $(x,x]$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wobec faktu, że $[x,x) \cup (x,x] = \{x\}$ przedział półpusty ma moc $\frac{1}{2}$.

Dalszym konsekwencjom teorii zbioru absurdalnego dla teorii liczb kardynalnych zajmiemy się w oddzielnym rozdziale.

§6. Odwzorowania w zbiór absurdalny

Autor teorii zbioru absurdalnego, J. Stasica sądził, że w zbiór absurdalny nie można odwzorowywać żadnych zbiorów. Przytoczył na to następujące argumenty:

1) Gdy X jest zbiorem nieskończonym, to $\operatorname{card} \overset{\varnothing}{A}{}^{X} = (-1)^{\infty}$, a to jest symbol nieoznaczony. Ilość odwzorowań zbioru absurdalnego w zbiór nieskończony byłaby nieokreślona.

2) Niech $\operatorname{card} X = 2p$, $\operatorname{card} Y = 2p+1$. Zatem $\operatorname{card} \underset{A}{\varnothing}^{X} = 1$, $\operatorname{card} \underset{A}{\varnothing}^{Y} = -1$. $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$, $\operatorname{card} \underset{A}{\varnothing}^{X} > \operatorname{card} \underset{A}{\varnothing}^{Y}$ co jest sprzeczne ze znanym twierdzeniem z teorii mnogości.

3) Zbiór absurdalny jest tak ubogi, że nie może istnieć żadne odwzorowanie $f: X \to \underset{A}{\varnothing}$, gdyż elementom zbioru X po prostu nie ma co przyporządkować.

Jednak błędy znajdują się nawet w znanych pracach znanych (z tych prac) matematyków. Na szczęście, przypuszczenia J. Stasicy okazały się błędne. Na szczęście, gdyż odrzucenie możliwości odwzorowywania choćby tylko niektórych zbiorów w zbiór absurdalny ograniczałoby poważnie dalszy rozwój matematyki najwspółcześniejszej, co mogłoby doprowadzić znanych jej przedstawicieli do stanu frustracji.

Jeżeli bowiem nie istnieje żadne odwzorowanie $f: X \to \underset{A}{\varnothing}$, to

$$\underset{A}{\varnothing}^{X} = \varnothing$$

czyli

$$0 = \operatorname{card} \underset{A}{\varnothing}^{X} = (-1)^{\operatorname{card} X}$$

ostatnia równość jest w sposób jawny sprzeczna dla każdego X. Dowodzi to, że zbiór $\underset{A}{\varnothing}^{X}$ jest niepusty.

Gdy zbiór X jest nieskończony, to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $f: X \to \underset{A}{\varnothing}$. Jest to wniosek z następującego ważnego twierdzenia A. Groblera.

TWIERDZENIE (o charakterze nieskończoności): *Nieskończoność jest liczbą parzystą.*

D o w ó d: Nieskończoność jest liczbą całkowitą jako granica rosnącego ciągu liczb całkowitych. Jeżeli to nie wystarcza, to łatwo stwierdzić, że sformułowanie "nieskończoność jest ułamkiem" stanowi curiosum semantyczne.

Wobec tego nieskończoność jest liczbą parzystą lub nieparzystą. Jednak skoro

$$2 \cdot \infty = \infty$$

to nieskończoność jest oczywiście parzysta. ■

Wydać by się mogło, że w związku z równością

$$\infty + 1 = \infty$$

z parzystością liczby nieskończoność coś jest nie w porządku. Gdy do przeciętnej liczby parzystej dodamy jedynkę na ogół otrzymamy liczbę nieparzystą. Tu jednak tak nie jest. Dodanie jedynki do nieskończoności nie psuje jej parzystości. Dlaczego? Nieskończoność jest bowiem parzysta nie tylko w sensie jej

podzielności przez dwa. Nieskończoność jest podzielna ponadto przez każdą potęgę dwójki, co więcej, przez dowolną wielokrotność liczby 2. Jest to więc liczba parzysta w stopniu większym, niż jakakolwiek inna liczba - nieskończoność jest liczbą DOSKONALE parzystą. Jako taka nie zmienia swojego charakteru po dodaniu do niej dowolnej liczby, a cóż dopiero jedynki.

Rozdział trzeci

NIEZBIORY

Jeżeli weźmiemy balon i będziemy go nadmuchiwać, to po pewnym czasie balon pęknie, stając się wówczas niebalonem.

Analogiczną sytuację mamy w wypadku zbioru. Zbiór ma pewną moc. Gdy będziemy ją powiększać ("nadmuchiwać" zbiór), to wreszcie stanie się ona tak duża (tzw. przemoc), że zbiór już jej nie może znieść. Toteż "pęka" i staje się niezbiorem.

§1. "Zbiór" wszystkich zbiorów

Dla zbioru absurdalnego, tj. "zbioru, który nie zawiera żadnego zbioru", utwórzmy twór dualny, a więc "zbiór, który zawiera każdy zbiór". Jest to "zbiór" wszystkich zbiorów, oznaczany symbolem ♀. Jest on niezbiorem, gdyż traktowanie go jako zbiór prowadzi do antynomii z powodu jego dowolnie wielkiej mocy (przemocy).

Według słów prof. Z. Opiala istnieją trzy wersje pochodzenia symbolu ♀:

1) Symbol ♀ jest uproszczonym rysunkiem trupiej czaszki, ostrzegającym przed używaniem pojęcia zbioru wszystkich zbiorów w teorii mnogości, jako prowadzącego (co udowodnił G. Cantor) do antynomii.

2) Symbol ♀ jest uproszczonym rysunkiem ♀ przedstawiającym Cantora łapiącego się za głowę w chwili, gdy uzyskał sprzeczność.

3) Jest to skrót rysunku  , z którego pozostawiono jedynie głowę Cantora i jego szelki. Bowiem odkrycie sprzeczności pojęcia zbioru wszystkich zbiorów bynajmniej nie służy do ukrycia faktu, że Cantor nosił spodnie.

§2. Problem izomorfizmu rodzin

Oznaczmy abstrakcyjną rodzinę zbiorów pustych przez θ, absurdalną rodzinę zbiorów pustych przez $\boldsymbol{\theta}$.

W celu przeprowadzenia konstrukcji izomorfizmu tych rodzin należy przede wszystkim ustalić tożsamość każdego zbioru pustego. Po wnikliwej analizie konstrukcji Suchonia można zauważyć, że każdy zbiór pusty jest wyznaczony

jednoznacznie przez ROZMAITE elementy, które doń należą. Tworzą one poziom abstrakcji bezpośrednio poprzedzający poziom abstrakcji rozpatrywanego zbioru pustego. Oczywiście do zbioru pustego nie należą również żadne INNE elementy, ale chodzi tutaj o elementy nie należące do zbioru przede wszystkim.

Wyrazy "rozmaite" i "inne" nazywamy identyfikatorami. Ważny w logice rachunek identyfikatorów został zapoczątkowany przez M. Hasa.

Każdemu zbiorowi pustemu jest jednoznacznie przyporządkowany zbiór rozmaitych elementów, które doń nie należą. Z drugiej strony dowolny zbiór może posłużyć za podstawę konstrukcji Suchonia dającej nam na następnym poziomie abstrakcji dokładnie jeden zbiór pusty. W ten sposób zostaje ustalona wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między elementami ♀ i θ.

Oznaczamy przez ǂ rodzinę zbiorów jednoelementowych. Dowolnie długi układ równań mnogościowych

$$\overset{\varnothing}{A} \cup ǂ = \boldsymbol{\theta}$$

ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między elementami ǂ i $\boldsymbol{\theta}$.

Udowodnimy teraz następujące

TWIERDZENIE (o niezbiorze ǂ, A. Grobler): *Rodzina zbiorów jednoelementowych ǂ jest równoliczna z ♀.*

D o w ó d: Rodzina ǂ zawiera się w ♀. Z drugiej strony, korzystając z pewnika wyboru, wybierzemy z każdego zbioru ♀ po jednym elemencie. Uzyskamy w ten sposób pewną podrodzinę rodziny ǂ, równoliczną z ♀. Z powyższego wynika teza.

■

WNIOSEK: *Abstrakcyjna rodzina zbiorów pustych θ i absurdalna rodzina zbiorów pustych $\boldsymbol{\theta}$ są równoliczne.*

Ponieważ w wyniku wszelkich działań mnogościowych na zbiorach pustych otrzymujemy również zbiory puste, powyższy wniosek pociąga za sobą izomorfizm tych rodzin. A więc mamy

TWIERDZENIE (o izomorfizmie rodzin A. Groblera): *Rodziny Suchonia i Stasica (tj. abstrakcyjna i absurdalna rodzina zbiorów pustych) są izomorficzne.*

Z powyższych rozważań, ustalających równoliczność obiektów: ♀, ǂ, θ, $\boldsymbol{\theta}$ wynika

TWIERDZENIE (o niezbiorze Θ A. Groblera): *Rodzina zbiorów pustych jest niezbiorem.*

DEFINICJA (niezbioru charakterystycznego): *Niezbiorem charakterystycznym zbioru S nazywamy najmniejszy niezbiór zawierający zbiór S.*

Jest to niezbiór, który otrzymujemy natychmiast po "pęknięciu" zbioru przy powiększaniu jego mocy.

Jest problemem otwartym zagadnienie, czy każdy zbiór ma swój niezbiór charakterystyczny i czy każdy niezbiór jest niezbiorem charakterystycznym pewnego zbioru. Autor teorii, M. Has, przypuszcza, że rozstrzygnięcie pierwszego problemu jest pozytywne, drugiego negatywne.

Istnieją pewne przesłanki metodologiczne przemawiające za hipotezą Hasa. Mianowicie, wziąwszy pod uwagę olbrzymią moc, tj. przemoc niezbiorów, należy przypuszczać, że rodzina niezbiorów nie jest zbiorem. A więc jest niezbiorem. Skoro tak, to jest co najmniej tak samo liczna, jak $\overset{0}{\times}$. Ale $\overset{0}{\times}$ jest też niezbiorem, a rodzina musi być liczniejsza od swojego członka.

W tym miejscu powstają jednak pewne wątpliwości. Jeżeli rodzina niezbiorów ma moc większą niż przemoc, to jest czymś więcej, jak niezbiorem, jakimś nieniezbiorem.

Teoria Hasa usuwa antynomię Russela z klasycznej teorii mnogości, wprowadzając w zamian nowe. Można rzec, że teoria Hasa sobie hasa.

Rozdział czwarty

ELEMENTY LOGIKI NIEFORMALNEJ

Czytelnik, który zdołał dotrzeć aż do tego miejsca w skrypcie, zauważył zapewne, że konstrukcja teorii matematyki najwspółcześniejszej wymaga zupełnie innego aparatu logicznego niż matematyka konwencjonalna. Najwyższy czas zatem ten aparat naszkicować.

Następny paragraf uspokoi trochę nerwy czytelnika zszargane perspektywą uwikłania się w sprzeczności zbiorów, niezbiorów, nieniezbiorów i ewentualnych dalszych iteracji negacji.

§1. Bezprawie podwójnej negacji (A. Grobler)

Jak wykazuje nieustanna praktyka St. Ostoi - Łojasiewicza jr. i J. Malczaka konsekwentnie stosujących negację uniwersalną, prawo podwójnej negacji w logice nieformalnej jest fałszywe. Bowiem weryfikacja tego prawa spowodowałaby, że Negacja Uniwersalna zanegowałaby samą siebie, co prowadziłoby do wniosku, że istnieje wszystko, podczas gdy nie ma nic.

Bezprawie podwójnej negacji ma również uzasadnienie fizyczne, wynikające z niemożności konstrukcji perpertuum mobile. Mianowicie, jeżeli pewien obiekt *X* poddamy operacji negacji i wynik tej operacji powtórnie zanegujemy, to niemożliwością jest uzyskanie obiektu wyjściowego wskutek nieuniknionych strat energii.

§2. Wartościowanie zdań (A. Grobler)

Analiza treści teorii matematyki najwspółcześniejszej wykazuje, że zwykła metoda 0-1 weryfikacji zdań zawodzi. Bowiem oprócz zdań prawdziwych i fałszywych, a właściwie przede wszystkim, występują tu zdania, które nazwiemy absurdalnymi i przypiszemy im umownie wartość −1. Wartość ta będzie wartością wyróżnioną logiki nieformalnej, tzn. zdania absurdalne będą tymi zdaniami, z których zbudowane są teorie matematyki najwspółcześniejszej. Tabelka implikacji wygląda następująco:

	Poprzednik		
Następnik	-1	0	1
-1	-1	1	-1
0	0	1	0
1	1	1	1

§3. Reguły wnioskowania. Metody dowodzenia twierdzeń.

Obowiązujące w logice klasycznej reguły odrywania i podstawiania są niewystarczające. W logice nieformalnej obowiązują następujące reguły wnioskowania, podane przez A. Groblera:

REGUŁA ODKRYWANIA. Uzasadnia ona wnioskowanie prowadzące do nowych odkryć. Jednak wnioski uzyskane przy pomocy tej reguły muszą być jeszcze zgodne z następną regułą, którą jest

REGUŁA ODSTAWIANIA. Odstawia ona te z wnioskowań, które są za mało dowcipne.

Dla ilustracji powyższych reguł podamy przykłady różnych metod dowodzenia twierdzeń, zebranych przez J. Piórka. Z niektórymi z tych metod czytelnik zetknął się już przy lekturze tego skryptu. Są to metody:

- przez zaprzeczenie założenia
- przez założenie tezy
- przez analogię
- przez odpowiednie twierdzenia
- przez ogląd ("wystarczy popatrzyć")
- przez opowiadanie
- przez sprowadzanie na manowce
- przez presję moralną
- przez sugestię ("Państwo widzicie")
- przez kalendarz ("to wynika z zeszłego roku")
- przez sakramenty ("ochrzcijmy to sobie")
- przez sztuciec ("a nuż wyjdzie");
- przez polechtanie ambicji słuchaczy ("to dla Państwa jest proste")
- przez nadużycie symboli
- przez ciągłość oznaczeń (ciągle oznaczamy)
- iluzjonistyczny ("zrobimy teraz taką sztuczkę")
- harcerskie (podchody dookoła dowodu)
- suflerski ("proszę mi podpowiedzieć")
- cybernetyczny ("to automatycznie wynika z...")
- spychologiczny ("Państwo sami sprawdzą")
- plenarny ("czy Państwo się zgadzają?")
- dogmatyczno-autorytatywny ("tak jest w podręczniku")
- familijny (bierzemy rodzinę zbiorów)
- samowystarczalny ("Państwo sobie sprawdzą we własnym zakresie")

§4. Zagadnienie prawdy

TWIERDZENIE (o istnieniu prawdy): *Istnieje twierdzenie prawdziwe.*

Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia. Przytoczymy kilka najciekawszych.

D o w ó d 1: nie wprost (standardowy). Jeżeli nie istnieje twierdzenie prawdziwe, to każde twierdzenie jest fałszywe. Zatem fałszywe jest twierdzenie, że nie istnieje twierdzenie prawdziwe. Toteż twierdzenie prawdziwe istnieje.

D o w ó d 2: teoriomnogościowy W. Forysia. Niech D oznacza zbiór twierdzeń prawdziwych. Jeżeli $D \neq \varnothing$, to twierdzenie jest udowodnione. Jeżeli zaś $D = \varnothing$ to co z tego? Zbiór pusty też jest zbiorem.

D o w ó d 3: negatywny M. Bieleckiej. Nie istnieje żaden kontrprzykład.

D o w o d y przez podanie przykładu twierdzenia prawdziwego:

a) Twierdzenie Tylko-Woźniaka

Definicja. D jest zbiorem potraw liniowo niezależnych wtedy i tylko wtedy, gdy da się jednorazowo skonsumować bez obawy o zdrowie żołądka.

Twierdzenie. Jeżeli D jest zbiorem potraw liniowo niezależnych, to zbiór D + jedno piwo jest zbiorem potraw liniowo niezależnych.

b) Twierdzenie o bezmyślności P. Borówko. Non cogito ergo sum. Dowód przez obejrzenie P. Borówko w godzinach 5^{30} - 5^{35} rano, Lublin, ul. Weteranów 17/24.[1]

c) Twierdzenie patriotyczne M. Bieleckiej. Rzetelną i twórczą pracą zapewniamy jasną przyszłość Ojczyźnie.

Zajmiemy się teraz zagadnieniem prawdy w bardziej konkretnych warunkach.

Następujące twierdzenie znane przedtem jako hipoteza kwantinuum, a odkryte przez St. Ostoję - Łojasiewicza jr. ma na celu wyjaśnić, dlaczego dr F. H. Szafraniec nie używa kwantyfikatorów na swoim wykładzie.

HIPOTEZA KWANTINUUM (St. Ostoja - Łojasiewicza jr.): *Dla każdego twierdzenia istnieje taki układ kwantyfikatorów, przy którym to twierdzenie jest prawdziwe.*

Spośród licznych prób dowodu hipotezy kwantinuum najbardziej na uwagę zasługuje dowód (przeprowadzony przez J. Piórka), będący pod wyraźnym wpływem metody twórczej doc. A. Lasoty.

---

[1] dane z roku 1971

D o w ó d: Weźmy twierdzenie T. Dobierzemy do niego pewien układ kwantyfikatorów K_1, który przybliża nam twierdzenie T do prawdy z prawdopodobieństwem większym, niż $\frac{1}{2}$. "Wprawdzie ja nie definiowałem" co oznacza, że układ kwantyfikatorów przybliża twierdzenie do prawdy z pewnym prawdopodobieństwem, "ale to nie szkodzi. Wykłada się przecież rachunek różniczkowy i całkowy bez podawania definicji rachunku" (A. Lasota). Dalej, weźmy układ kwantyfikatorów K_2, który nam będzie przybliżał nasze twierdzenie do prawdy z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$, itd. układ kwantyfikatorów K_n przybliża twierdzenie T do prawdy z prawdopodobieństwem $2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-n}$. W granicy otrzymamy układ kwantyfikatorów K, który przybliża twierdzenie T do prawdy z prawdopodobieństwem 1. Korzystając z ciągłej zależności prawdziwości twierdzenia od kwantyfikatorów otrzymujemy tezę hipotezy.

■

W pewnym sensie uogólnieniem hipotezy kwantinuum jest następujące

TWIERDZENIE (B. Żeber): *Przy odpowiednich założeniach zachodzi odpowiednia teza.*

D o w ó d: Twierdzenie jest tak oczywiste, że nie trzeba do dowodzić. Wystarczy tu zresztą zwykły dowód przez założenie tezy. (na tym czasem polega dobór odpowiednich założeń).

■

To ostatnie twierdzenie jest również wdzięcznym przykładem dowodzącym twierdzenie o istnieniu prawdy.

§5. Rachunek identyfikatorów (M. Has)

W związku z hipotezą kwantinuum dalsze zajmowanie się rachunkiem kwantyfikatorów jest nieciekawe. Nowe perspektywy otwiera rachunek identyfikatorów. Z pojęciem identyfikatorów spotykaliśmy się już przy omawianiu problemu izomorfizmu rodzin. Mamy dwa identyfikatory:

- identyfikator immanentny	-	ROZMAITY	- oznaczenie: Var
- identyfikator transcendentny	-	INNY	- oznaczenie: Oth

Opatrzenie pojęcia identyfikatorem Var oznacza, że jakkolwiek chodzi nam o jednostkowy okaz tego pojęcia, jeden jego egzemplarz, konkretny i ustalony, to jednocześnie wskazujemy [redacted] *na*

... i tu, Drogi Czytelniku, do tekstu naszej rozprawy naukowej wkradł się ROZBÓJNIK (jego teoria rozwinięta jest w niniejszej pracy) który uniemożliwił Ci przestudiowanie strony 19.

Rozdział piąty

LICZBY KARDYNALNE

§1. Ułamki kardynalne

W rozdziale II, §5 poznaliśmy przykłady zbiorów o mocy $\frac{1}{n}$, gdzie n jest dowolną naturalną liczbą kardynalną. Na drodze odpowiedniego dodawani mnogościowego odpowiednich zbiorów o odpowiednich liczbach kardynalnych uzyskujemy, i to nawet przez sumowanie skończone, zbiory o dowolnej liczbie kardynalnej wymiernej dodatniej.

Ponieważ zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych, to przez odpowiednie nieskończone dodawanie mnogościowe odpowiednich zbiorów o odpowiednich liczbach kardynalnych otrzymamy zbiory o dowolnej liczbie kardynalnej rzeczywistej dodatniej. Udowodniliśmy w ten sposób:

TWIERDZENIE (o rzeczywistości kardynalnej A. Groblera): *Liczby rzeczywiste dodatnie są kardynalne.*

W podanym wyżej dowodzie tego twierdzenia implicite tkwi pojęcie zbioru absurdalnego, przy pomocy którego zostały skonstruowane ułamki kardynalne postaci $\frac{1}{n}$. Można z łatwością podać inny dowód, nie odwołujący się do aparatu absurdalnego (zbioru). Dla naszego celu w zupełności wystarczy nam przedział półpusty $[x,x)$. Jest to zbiór o mocy $\frac{1}{2}$. Przez n-krotne mnożenie kartezjańskie przedziałów półpustych i mnogościowe dodawanie odpowiednich produktów otrzymamy liczby kardynalne postaci $\frac{m}{2^n}$ (m, n naturalne).
Zbiór tej postaci jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, co kończy dowód.

Przykład: zbioru o liczbie kardynalnej niewymiernej.

$$\operatorname{card}\{f\colon [x,x) \to \{a,b\}\} = \sqrt{2} \qquad (a \neq b)$$

§2. Liczby kardynalne zespolone

TWIERDZENIE (o urojeniach kardynalnych A. Groblera): *Istnieje zbiór o mocy i (jednostka urojona).*

Dowód: Weźmy pod uwagę zbiór

$$I = \{f\colon [x,x) \to \overset{\varnothing}{A}\}$$

Moc zbioru I wynosi: $\sqrt{-1}$.
Zachodzą dwie możliwości: a) $\operatorname{card} I = i$
b) $\operatorname{card} I = -i$.
Teza twierdzenia głosi, że istnieje zbiór o mocy i. Weźmy więc zbiór $\operatorname{Oth} I$ (zastosowanie rachunku identyfikatorów!) taki, że $\operatorname{card}\operatorname{Oth} I = i$.

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $\operatorname{card} I = -i$. Otrzymamy:

$$\operatorname{card}(\overset{\varnothing}{A} \cup I) \cup (\overset{\varnothing}{A} \cup \operatorname{Oth} I) = -2$$

co jest sprzeczne z kardynalnym twierdzeniem minimalny (r. II, §2).
Zatem $\operatorname{card} I = i$.
Należy wyjaśnić jeszcze, dlaczego w dowodzie twierdzenia założyliśmy, że $\operatorname{card}\operatorname{Oth} I = i$, a nie, np. $-i$. Wynika to stąd, że z powyższego rozumowania wynika, iż zbiór o mocy $-i$ nie istnieje, a zbiorowi z identyfikatorem transcendentnym (por. rozdz. IV, §5) nie przysługuje atrybut nieistnienia.
Twierdzenie o urojeniach kardynalnych można udowodnić bez odwoływania się do rachunku identyfikatorów przez zwykłe założenie tezy.
Z tezy twierdzenia wynika, że istnieje zbiór J o mocy i.

$$\operatorname{card}(\overset{\varnothing}{A} \cup I) \cup (\overset{\varnothing}{A} \cup J) \quad \text{byłby równy} \quad -2$$

(gdyby $\operatorname{card} I = -i$)
i dochodzimy do tej samej sprzeczności co w powyższym dowodzie.
I dostarcza na przykładu na zbiór o mocy i, co kończy dowód przez założenie tezy.
■

TWIERDZENIE (antykartezjańskie A. Groblera - J. Stasicy): *Zbiorów mocy zespolonej nie wolno mnożyć po kartezjańsku.*

Dowód: $\operatorname{card}(I \times I \times I) = i^3 = -i$, co jest sprzeczne z wnioskami wynikającymi z poprzedniego twierdzenia.
■

LEMAT: *Zbiór liczb zespolonych o części rzeczywistej nieujemnej i części urojonej naturalnej zawiera się w zbiorze liczb kardynalnych.*

Dowód cybernetyczny: Teza lematu automatycznie wynika z sumowania mnogościowego zbiorów o mocy rzeczywistej nieujemnej oraz mocy i.

■

LEMAT: *Prawa górna ćwiartka koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej jest kardynalna.*

Dowód: Niech X będzie zbiorem o dowolnej nieujemnej mocy rzeczywistej r. Wówczas

$$\operatorname{card}\{f: X \to \{F: (x,x) \to {}^{\varnothing}_{A}\}\} = i^r.$$

Otrzymujemy w ten sposób dowolną liczbę z koła jednostkowego. Restrykcję do prawej górnej ćwiartki uzyskujemy stosując podobne rozumowanie, jak w dowodzie twierdzenia o urojeniach kardynalnych.

■

TWIERDZENIE (o pierwszej ćwiartce A. Groblera): *Pierwsza ćwiartka zbioru liczb zespolonych jest kardynalna.*

Dowód: Pierwszą ćwiartkę napełnimy dodając do siebie mnogościowo odpowiednie zbiory odpowiednich mocy, których istnienie gwarantują nam powyższe dwa lematy.

■

"Matematycy mają mocne głowy i na pierwszej ćwiartce nie poprzestają" (Z. Opial).

Dodając do pierwszej ćwiartki zbiór absurdalny otrzymamy liczby kardynalne z pasa (a raczej półpasa)

$$P = \{z : \operatorname{Re} z \in [-1, 0), \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Dalsze dodawanie zbioru absurdalnego jest niemożliwe, co wynika z jego jednoegzemplaryczności (por. rozdz. II, §2). W ten sposób doszliśmy do centralnego twierdzenia absurdalnej teorii mocy, mówiącego o zbiorze liczb kardynalnych różnych od pozaskończonych:

TWIERDZENIE (A. Groblera): *Po pierwszej ćwiartce mamy pas P, a za pasem broń (Boże nic innego).*

Są jeszcze liczby kardynalne pozaskończone, a wśród nich "alefy sakramencko dalekie" (E. Tutaj). Ponadto istnieje przemoc.

§3. Porównanie konwencjonalnej i absurdalnej teorii mocy

Matematyka konwencjonalna przypisuje zbiorom moc naturalną, ewentualnie pozaskończoną. My ponadto odkryliśmy:

- moce ułomne (tj. ułamkowe)
- moce niewymierne, ogólniej
- moce rzeczywiste
- moce urojone, a także
- moce zespolone
- moce ujemne (tzw. złe moce).

Istnieją też obiekty, tzw. niezbiory, o których powiadamy, że cechuje je

- przemoc.

§4. Podzbiory zbioru pustego

Z chwilą odkrycia zbioru absurdalnego pojawiła się możliwość rozpatrywania właściwych podzbiorów zbioru pustego. Pierwotna koncepcja A. Janika była następująca:

DEFINICJA: *Zbiorem n-pustym $\varnothing^n$ nazywamy największy właściwy podzbiór zbioru $n-1$-pustego $\varnothing^{n-1}$. Ponadto $\varnothing^0 = \varnothing$.*

HIPOTEZA (n-pustości): $\lim_{n\to\infty} \varnothing^n = {}^{\varnothing}_{A}$.

Hipotezę tę można było jednak zweryfikować (a raczej zabsurdalizować - por. rozdz. III, §2) dopiero z chwilą udowodnienia centralnego twierdzenia absurdalnej teorii mocy. Okazało się wówczas, że podzbiory zbioru pustego trzeba indeksować w sposób ciągły (a nie dyskretny), co wynika z ciągłości przedziału kardynalnego $(-1, 0)$. W świetle tego naturalna będzie następująca

DEFINICJA: *Dla dowolnej nieujemnej liczby rzeczywistej r określamy zbiór r-pusty $\varnothing^r$ jako podzbiór zbioru pustego, taki że*

$$\operatorname{card} \varnothing^r = e^{-r} - 1.$$

U podstaw naturalności tej definicji tkwi podstawa logarytmu naturalnego e. Z definicji tej wprost wynika

TWIERDZENIE (Adamów Brodaczy, tj. A. Janika i A. Groblera):

$$\lim_{r\to\infty} \varnothing^r = {}^{\varnothing}_{A}.$$

Rozdział szósty

ELEMENTY ANALIZY FIKCJONALNEJ

§1. Pojęcia podstawowe

OZNACZENIA:

$[x, x) = {}_{+}x$ (prawy półpunkt)
$(x, x] = {}_{-}x$ (lewy półpunkt)
Gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą.

DEFINICJA (półfunkcji): *Półfunkcją nazywamy odwzorowanie zbioru półpunktów w zbiór liczb rzeczywistych.*

Dla oznaczenia półfunkcji używamy symboli "*f*", "*g*", "*h*" itd. Pojęcie półfunkcji wprowadził J. Adamus.

DEFINICJA (półchodnej): *Mówimy, że półfunkcja "f" ma półchodną prawą w półpunkcie ${}_{+}x$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje*

$$\lim_{h\to 0}\frac{"f"({}_{+}x+h)-"f"({}_{+}x)}{h}$$

Analogicznie definiujemy półchodną lewą półfunkcji "*f*" w półpunkcie ${}_{-}x$.

§2. Twierdzenie półróżniczkowe (J. Adamus)

TWIERDZENIE: *Jeżeli prawa półchodna półfunkcji "f" w półpunkcie ${}_{+}x$ istnieje i jest równa lewej półchodnej tej półfunkcji w półpunkcie ${}_{-}x$, to półfunkcja "f" ma w punkcie x półchodną.*

D o w ó d: przez ciągłość oznaczeń (ciągle oznaczamy).

$$\lim_{h\to 0}\frac{"f"({}_{+}x+h)-"f"({}_{+}x)}{h}=P_p("f"({}_{+}x))$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{"f"({}_{-}x+h)-"f"({}_{-}x)}{h}=P_l("f"({}_{-}x))$$

$$P_p("f"({}_{+}x))+P_l("f"({}_{-}x))=\tilde{S}("f",({}_{+}x,{}_{-}x))$$

$$P_p("f"({}_{+}x))-P_l("f"({}_{-}x))=\underset{\sim}{S}("f",({}_{+}x,{}_{-}x))$$

"Mamy już szóstą literę. Pomaluśku dowód się rozwija" (A. Lasota)

$$\tilde{S}("f",({}_{+}x,{}_{-}x))+("f")(x)=\overset{\approx}{T}("f",x,({}_{+}x,{}_{-}x))$$

$$\underset{\sim}{S}("f",({}_{+}x,{}_{-}x))+("f")(x)=\underset{\approx}{T}("f",x,({}_{+}x,{}_{-}x))$$

$$\tilde{S}("f",({}_{+}x,{}_{-}x))+("f")(x)=\tilde{T}("f",x,({}_{+}x,{}_{-}x))$$

$$\underset{\sim}{S}("f",({}_{+}x,{}_{-}x))-("f")(x)=\underset{\sim}{T}("f",x,({}_{+}x,{}_{-}x))$$

itd. stosując metodę kolejnego oznaczania wszystkiego co możliwe kończymy dowód i czytelników.

■

Należy zwrócić uwagę na istotność założenia istnienia obu półchodnych. Bowiem "bez tego założenia nie tylko twierdzenie byłoby fałszywe, ale i dowód by się nie udał" (Z. Opial).

§3. Przykład bardzo fajnej funkcji, która rośnie i nie rośnie, a nie jest stała (J. Adamus)

DEFINICJA: *Mówimy, że półfunkcja "f" prawo rośnie, wtedy i tylko wtedy, gdy*

$${}_{+}x < {}_{+}y \Rightarrow "f"({}_{+}x) < "f"({}_{+}y)$$

lewo maleje wtedy i tylko wtedy, gdy

$${}_{-}x < {}_{-}y \Rightarrow "f"({}_{-}x) > "f"({}_{-}y).$$

Analogicznie definiujemy półfunkcję prawo malejącą i lewo rosnącą.

Przykład: funkcji podanej w tytule, którego nie udało się skonstruować dr hab. F. H. Szafrańcowi na wykładzie z funkcji rzeczywistych w 1970, podał J. Adamus tak:

Niech "*g*" będzie półfunkcją prawo i lewo malejącą (ewentualnie prawomalejąca i lewo rosnąca). To jest właśnie nasza "bardzo fajna funkcja, która rośnie i nie rośnie, a nie jest stała" (F. H. Szafraniec).

Przykład ten pokazuje nam "zastosowanie tego mądrego znaleziska" (F. H. Szafraniec), jakim jest zbiór ułomny, a w szczególności półpunkt.

Rozdział siódmy

TEORIA ROZBÓJNIKA

Teoria rozbójnika wyrosła z zastosowań matematyki i matematyków, a w szczególności z zastosowań St. Ostoi - Łojasiewicza jr do robienia rozbójnika. Zanim będziemy dokonywać prób definicji tego pojęcia powiemy, że w intuicji robienie rozbójnika odpowiada mniej więcej robieniu bałaganu. Termin ten pochodzi z gry w "kierki", której jedna z rozgrywek zwana jest popularnie "rozbójnikiem".

Rozgrywkę tę, w przeciwieństwie do innych elementów gry w "kierki" cechuje nieopisany chaos i bałagan, wynikający z reguły "wszystko się liczy". Dla tej cechy przyjęto działalność St. Ostoi - Łojasiewicza jr nazywać robieniem rozbójnika, bowiem pojęcie robienia bałaganu jest tu zupełnie nieadekwatne.

Drugim ważnym pojęciem w tej teorii jest pojęcie DEBURDELIZACJI, które oznacza usuwanie rozbójnika.

Nie będziemy tutaj omawiać zastosowań matematyki i matematyków do robienia rozbójnika, czego teorię zapoczątkował W. Szymański a praktyka jest stale rozwijana przez St. Ostoję - Łojasiewicza jr i Jego sojuszników, ale omówimy pokrótce zastosowania rozbójnika w matematyce.

§1. Rozbójnik w zbiorach uporządkowanych

Działanie rozbójnika w zbiorze polega, na ogół, na przestawieniu elementów. Toteż nic dziwnego, że wprowadzenie rozbójnika do zbioru uporządkowanego zmienia porządek liniowy w co najwyżej częściowy. W celu deburdelizacji takiego zbioru zaleca się następujące postępowanie:

Zbiór należy podzielić na łańcuchy (ze względu na relację częściowego porządku). Następnie tymi łańcuchami skrępować rozbójnika, żeby zahamować jego działalność. Dalej, jeżeli każdy łańcuch ma majorantę, to na mocy lematu Kuratowskiego - Zorna znajdziemy w zbiorze element maksymalny. Ten zaś, korzystając ze swojej przewagi nad innymi elementami, bez trudu przywróci w zbiorze porządek całkowity.

Jeżeli zbiór nie jest induktywny, to jego deburdelizacji należy dokonać innym sposobem, którego istnienie gwarantuje twierdzenie Zermelo.

W zbiorze częściowo uporządkowanym rozbójnik może pozrywać niektóre łańcuchy. Nie należy się tym jednak specjalnie przejmować, gdyż zerwane łańcuchy łatwo dają się zastąpić innymi, zbudowanymi z elementów tego zbioru.

Jeżeli zbiór nie jest wyposażony w strukturę porządkową, ani też żadną inną (topologiczną, algebraiczną itp.), czyli jest to tzw. goły zbiór, to działanie rozbójnika nic w nim nie zmienia.

Dowodzi to następującego twierdzenia A. Groblera:

TWIERDZENIE: *Goły zbiór nie wymaga deburdelizacji.*

§2. Rozbójnik a moc zbioru

Zbiór stawia opór przed wprowadzeniem doń rozbójnika. Opór ten jest funkcją mocy zbioru. Ma to niebagatelne znaczenie, gdyż inaczej zastosowanie rozbójnika do zbiorów nieprzeliczalnych mogłoby mieć skutki nieobliczalne.

Z drugiej strony mała moc zbioru niekoniecznie jest źródłem niemocy względem rozbójnika. Mamy na to kilka przykładów.

1) Zbiór jednoelementowy.

Mogłoby się wydawać, że tu rozbójnik jest szczególnie niebezpieczny. Ze względu na to bowiem, że w zbiorze jednoelementowym nie ma czego przestawić, rozwścieczony tym faktem rozbójnik mógłby, korzystając ze swojego pokrewieństwa (etymologicznego) ze słowem "rozbijać", usiłować rozbić zbiór jednoelementowy na zbiory ułomne.

Nic wówczas nie może nam gwarantować możliwości przeprowadzenia deburdelizacji.

Nie zapominajmy jednak, że moc zbioru jednoelementowego jest jednością, a w jedności siła.

2) Zbiór pusty.

Ten jest zupełnie bezpieczny. Rozbójnik mógłby go (w najgorszym wypadku) napełnić, a na to musiałby być Robin Hoodem.

3) Zbiór absurdalny.

Z uwagi na własności zbioru absurdalnego (twierdzenie o usuwaniu elementu niepożądanego) rozbójnik nie może nań działać, gdyż stawszy się wówczas elementem niepożądanym, zostałby usunięty.

Nie mogąc być przedmiotem działań rozbójnika, zbiór absurdalny może za to być narzędziem, przy pomocy którego rozbójnik może usuwać elementy niepożądane dla się.

Rozbójnik nie działa również na zbiory o mocy zespolonej. Gdyby bowiem z wrodzonego niechlujstwa czy też zwyczajnej nieuwagi, zaczął działać na część urojoną zbioru, w myśl trzeciej zasady dynamiki Newtona sam znalazłby się pod jej działaniem. Mógłby wówczas, wskutek tego uroić sobie, że jest nie rozbójnikiem, a na przykład deburdelizatorem. To zaś doprowadziłoby do jego samozagłady. Nic więc dziwnego, że z mocami zespolonymi rozbójnik woli nie zadzierać.

§3. Rozbójnik w przestrzeniach topologicznych

Jasne jest, że rozbójnik znajdujący się w przestrzeni topologicznej, wywiera zły wpływ na otoczenie (punktu, w którym się znajduje). Jak dotąd znamy jedną tylko metodę deburdelizacji przestrzeni topologicznych, wskazaną przez J. Uruszczaka. Odnosi się ona do przestrzeni ośrodkowych.

Na przestrzeń ośrodkową narzucamy epsilon - sieć, przy czym epsilon dobieramy wystarczająco małe, aby rozbójnik nie mógł się przez oczka sieci przecisnąć.

§4. Inne zastosowanie teorii rozbójnika

1) Zastosowanie rozbójnika w praktyce metod numerycznych (Z. Denkowski)

Poruszone niżej problemy wiążą się z prowadzonym przez dr Z. Denkowskiego wykładu z praktyki metod numerycznych dla studentów III r. matematyki UJ.

Wprowadźmy następującą funkcję:

$$D_w = \text{card } T_wV \setminus T_wF$$

gdzie T_wV oznacza zbiór twierdzeń T prawdziwych podanych na wykładzie w, a T_wF zbiór twierdzeń fałszywych, podanych na tym samym wykładzie. Funkcja D_w ma następujące własności:

A) $D_w < 0 \Leftrightarrow T_wV \setminus T_wF =^{\varnothing}_{A}$ (absurdalny zbiór twierdzeń)

B) $R_1 \leq R_2 \Rightarrow D_w(R_1) \geq D_w(R_2)$, gdzie R_1 i R_2 są rozbójnikami

Zamiast dowodów tych twierdzeń cytujemy za doc. A. Lasotą:

"Tak bez żadnych założeń, to ja tego nie umiem udowodnić. Ale twierdzenie jest prawdziwe. Za to daję głowę. Nawet więcej!".

Sprzymierzeńcami rozbójnika na wykładzie są wczesne godziny wykładu oraz Bartek (dwuletni wówczas syn dr Z. Denkowskiego).

2) Zastosowanie teorii rozbójnika w rachunku nieprawdopodobieństwa (A. Lasota)

Rozbójnik działając na przedział $[0,1]$ przekształca go w przedział $[0,-1]$. W ten sposób rachunek prawdopodobieństwa został przetworzony w rachunek nieprawdopodobieństwa. Pojęciu nieprawdopodobieństwa odpowiada zbiór absurdalny.

Praktyczne zastosowanie rachunku nieprawdopodobieństwa jest następujące:

W dniu, w którym doc. A. Lasota ma wykład o godz. 10 - tej, budzi się On o 11 - tej, przez co wykład regularnie rozpoczyna się z półgodzinnym opóźnieniem.

3) Rozbójnik a archanioł Gabriel (Z. Opial)

Prof. Z. Opial usiłował sam kiedyś wprowadzić rozbójnika do wykładu. Czynił to następująco: kiedy narysował przezeń uprzednio układ współrzędnych prawie prostokątnych okazał się za krótki dla celów wykładu, przedłużył kreskę przedstawiającą oś OX. Wypadło to jednak krzywo, co starał się ukryć mocno pogrubiając osie. Kiedy po skończonym wykładzie opuścił salę, na klatce schodowej spotkał osobę ubraną w długą, białą szatę. Postać ta upominała go, aby już więcej rozbójnika na wykładzie nie wprowadzał, po czym znikła. I wtedy dopiero prof. Z. Opial uświadomił sobie, że postacią ową był archanioł Gabriel.

W ten sposób odkryto związki teorii rozbójnika z angelologią (por. K. I. Gałczyński "Teatrzyk Zielona Gęś").

4) Rozbójnik w analizie różniczkowej (St. Łojasiewicz)

Prof. St. Łojasiewicz poproszony o wygłoszenie referatu z zastosowania teorii rozbójnika usprawiedliwił się, że niestety, z największą przykrością stwierdza, iż nie może wygłosić referatu. Kiedy bowiem usiłował zastosować rozbójnika do rozmaitości różniczkowej, otrzymał przestrzeń mało urozmaiconą. Próba uratowania sytuacji przy pomocy twierdzenia przygotowawczego Weierstrassa zawiodła, gdyż okazał się on (referent) za mało przygotowany.

5) Ideały trywialne w ciałach nietrywialnych (B. Grell)

Temat poruszony przez dr B. Grella w referacie wygłoszonym na seminarium teorii rozbójnika nie wiąże się wprawdzie z tytułem seminarium, niemniej wzbudził on duże zainteresowanie słuchaczy z chwilą, kiedy referent zdefiniował ciało nietrywialne jako ciało posiadające co najmniej trzy elementy. Niestety, rozbudzona ciekawość słuchaczy nie została zaspokojona, gdyż dr B. Grell nie powiedział, o jakie elementy właściwie chodzi.

§5. Problem definicji rozbójnika

Czytelnik zdołał już dobrze zaznajomić się z treścią pojęcia rozbójnika dzięki licznym przykładom w treści skryptu, a niekiedy i w jego formie[2]. Pojęcie to jest intuicyjnie łatwe do zrozumienia, niemniej przy próbach jego definiowania napotykamy duże trudności.

W. Szymański usiłował te trudności rozwiązać uznając rozbójnika za pojęcie pierwotne. Jednak takie ujęcie zagadnienia wywołuje rozbójnika w teorii rozbójnika, co w efekcie czyni rozbójnika do kwadratu, a w dalszej konsekwencji (rozumując indukcyjnie) rozbójnika w dowolnej potędze. W naszym interesie zaś jest, by potęga rozbójnika nie była zbyt wielka.

Trudności z definicją rozbójnika mają podobny charakter, co kłopoty z definicją materii. Wśród licznych w filozofii definicji materii najprostszą, a

---

[2] zwróćmy uwagę na brak 19 strony maszynopisu

zarazem najmniej użyteczną, jest określenie materii jako "wszystkiego co jest". Podobnie i w naszej sytuacji, definicja rozbójnika jako "tego, co gdyby było, to nie wiadomo byłoby, co by było" jest jałowa. Najlepsza w tej mierze (jak dotąd jedyna) jest definicja abstrakcyjna, podana przez A. Groblera:

DEFINICJA (rozbójnika): *Rozbójnikiem nazywamy obiekt wywołujący degenerację (burdelizację) struktury.*

§6. Wzajemne stosunki pojęć struktury, rozbójnika i deburdelizacji

Błędem byłoby uważać, na podstawie podanej definicji rozbójnika, że pojęcie rozbójnika jest przeciwstawne pojęciu struktury. Przeciwstawne do rozbójnika jest bowiem pojęcie deburdelizacji. Przy bliższej analizie semantycznej dostrzec można tu analogie do trójki pojęć: funkcja potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna. Wzajemne stosunki tych pojęć ujmuje następująca proporcja:

struktura	: funkcja potęgowa
rozbójnik	: funkcja wykładnicza
deburdelizacja	: funkcja logarytmiczna

Uzasadnienie:

Funkcja potęgowa odpowiada strukturze, gdyż zmiennej, interpretowanej jako obiekt struktury (por. R. C. Lyndon "O logice matematycznej", Warszawa PWN 1968), przypisuje pewną, ustaloną przez wykładnik, wartość. Mamy tu klasyczną sytuację bez rozbójnika.

Gdy wykładnik zaczyna się ruszać, to ustalonemu obiektowi struktury zaczynają być przypisywane różne wartości. (Obiekt struktury zawiera się w podstawie potęgi, gdyż pojęcie struktury tkwi u podstaw matematyki). Mamy więc rozbójnika.

Interpretacja ta zgadza się z twierdzeniem W. Szymańskiego:

TWIERDZENIE (o ograniczoności rozbójnika): *Rozbójnik jest ograniczony od dołu przez zero, a od góry przez rozmiary pomieszczenia.*

D o w ó d: przez ogląd (pomieszczenia po rozbójniku). ■

Rzeczywiście. Funkcja wykładnicza jest ograniczona od dołu przez 0, jest również ograniczona od góry na zbiorze ograniczonym, a takim jest przecież pomieszczenie. Ponadto stała ograniczająca zależy od wielkości pomieszczenia i podstawy potęgi rozbójnika. Zdolności w tej mierze nie są bowiem jednakowe

Najzdolniejszym w tym kierunku, ze znanych nam matematyków, jest St. Ostoja - Łojasiewicz jr.

Innym argumentem na rzecz przyjętej przez nas interpretacji jest fakt, iż entropia rośnie wykładniczo. Entropię zaś można uważać za miarę rozbójnika zastosowanego do kosmosu.

Interpretacja deburdelizacji jako funkcji logarytmicznej, będącej odwrotnością do wykładniczej, w naturalny sposób tłumaczy się swoją opozycją do pojęcia rozbójnika. Ponadto, jak wiedzą wszyscy wojskowi, karabin można czyścić również logarytmem (chociaż wyciorem lepiej), co dostarcza nam przykładu deburdelizacyjnej funkcji logarytmu. Dalej jeszcze daje się zauważyć, że logaRYTM zawiera rytm, który niewątpliwie jest przejawem pewnej organizacji, a więc porządku. Daje to nam dodatkowe uzasadnienie powyższej interpretacji.

§7. Znaczenie teorii rozbójnika

O pracy "Zastosowanie rozbójnika do teorii mnogości" pisze M. Dzielski następująco:
"(...) Zasadnicze novum, które praca Groblera wnosi do matematyki najwspółcześniejszej, to dynamizm.

Dotychczasowa matematyka była, można by użyć chyba tego określenia - statyczna. Grobler wprowadzając rozbójnika wnosi wraz z nim element życia do matematyki i tym samym odkrywa się przed nią nowe, nieprawdopodobne możliwości. Po raz pierwszy w historii zarysowuje się możliwość stworzenia matematyki dynamicznej w przeciwieństwie do współczesnej matematyki statycznej, która miała charakter platoński, czyli opisywała byty, które same w sobie są niezmienne na kształt idei platońskich. Żeby w matematyce coś się działo potrzebna była ingerencja (oddziaływanie) zewnętrzna. Grobler wprowadził oddziaływanie wewnątrz matematyki. Jego rozbójnik nawet bez pomocy matematyka oddziaływa na zbiory, przez co możliwe jest wyobrażenie sobie zmiennego w czasie świata matematyki, a w dalszej perspektywie być może udowodnienie nawet, że poza matematyką w ogóle nie istnieje, skoro czas, który odpowiedzialny jest za życie i ewolucję świata włączony został za pośrednictwem oddziaływania do wnętrza matematyki. (...)"

Należy zwrócić uwagę, że pewne idee ewolucji obiektów matematycznych w czasie zawiera również teoria niezbiorów. Jest to zrozumiałe, bowiem pojęcie przemocy kojarzy nam się często z rozbójnikiem.

Rozdział ósmy

LICZBY PORZĄDKOWE

Opracowana przez J. Piórka najwspółcześniejsza teoria liczb porządkowych jest naturalną konsekwencją absurdalnej teorii mocy (patrz rozdz. V). Matematyka konwencjonalna ustala wzajemnie jednoznaczny związek między liczbami kardynalnymi a porządkowymi. Ponieważ absurdalna teoria mocy rozszerza pojęcie liczby kardynalnej stało się koniecznością odpowiednie rozszerzenie teorii liczb porządkowych.

§1. Wprowadzenie pojęć

Liczby porządkowe w klasycznym sensie, a więc odpowiadające liczbom kardynalnym, naturalnym, nazywać będziemy ordynalnymi, albo ORDYNAŁAMI.

Liczby kardynalne z przedziału $[-1, 1)$ wiążą się ściśle z pojęciem rozbójnika, reprezentując jego skutki lub przyczyny. Stąd też liczby porządkowe im odpowiadające nazywamy liczbami nieporządkowymi, albo ordynarnymi (ORDYNUSAMI).

Liczby kardynalne zespolone (istotnie zespolone) uzyskuje się jako moce potęg kartezjańskich przez PODnoszenie do potęgi liczb kardynalnych rzeczywistych. Z tego względu liczby porządkowe im odpowiadające nazywamy podporządkowymi, czyli ORDYNANSAMI.

Wreszcie przemocom kardynalnym odpowiadać będą tzw. liczby rozporządzające, zwane inaczej ORDYNATAMI.

A więc liczby porządkowe dzielą się na: ordynały, ordynusy, ordynanse i ordynaty.

§2. Liczby ordynarne a teoria kolejek

Pojęcia kolejki (do czegoś, po coś, za kimś) tłumaczyć nie trzeba. W kolejce powinien być porządek. Doświadczenie jednak nas uczy, że porządek w kolejkach pozostawia wiele do życzenia. Ten fakt empiryczny teoretycznie uzasadnia teoria liczb ordynarnych, których nazwa w świetle faktów jest w zupełności usprawiedliwiona.

Dajmy "kolejce" "numerki" rzeczywiste z przedziału $(0, 1)$. Wówczas między dwie dowolne osoby kolejki zawsze będzie mogła wejść, zgodnie z prawem (gęstości liczb wymiernych), inna osoba. Otworzą się możliwości ciągłych (zbiór

liczb rzeczywistych jest ciągły) nadużyć wskutek trudności w przestrzeganiu właściwej kolejności wynikłych z niemożności kontrolowania cyfr na dalekich miejscach po przecinku.

Jeżeli wprowadzimy do gry 0, to na szpic kolejki pchać się będzie mnóstwo zer, twierdząc, że tu stały. Na marginesie warto zauważyć, że teoria vanitatis pluralis tłumaczy nam, dlaczego po świecie chodzi tak wiele zer.

Wprowadzenie liczby ordynarnej -1 (odpowiadającej zbiorowi absurdalnemu) objawi się wręcz usuwaniem z kolejki osób słabszych i mniej doświadczonych.

§3. Liczby podporządkowe, a porządkowe

Istnienie ordynansów tłumaczy niepowodzenia wszelkich prób likwidowania porządku ujemnego (nieporządku) przez stosowanie "na potęgę" porządków ułamkowych (ułomnych). Każda taka próba jest częściowo urojona i, jako taka, skazana na niepowodzenie.

W szczególnym przypadku, gdy nieporządek dochodzi do rozmiarów absurdu, wszelkie ułomne próby potęgowania porządku są czystym urojeniem (por. rozdz. V, §2).

Rozdział dziewiąty

WYBRANE ZAGADNIENIA Z HISTORII MATEMATYKI NAJWSPÓŁCZEŚNIEJSZEJ

W zimie 1970 r. poczyniono pierwsze odkrycie matematyki najwspółcześniejszej. Odkryto na wykładzie dr M. Łuczyńskiego z rachunku prawdopodobieństwa przedział półpusty. Mniej więcej w tym samym czasie Stanisław Ostoja - Łojasiewicz jr sformułował hipotezę kwantinuum, mającą wyjaśnić metody dydaktyczne dr F. H. Szafrańca, wykładającego funkcje rzeczywiste. Korzystając głownie z tego wykładu Józef Piórek zebrał najwspółcześniejsze metody dowodzenia twierdzeń.

Te odkrycia stały się przyczyną powołania do życia 24 kwietnia 1970 r. Instytutu Matematyki Najwspółcześniejszej, którego pierwszym Prezesem został Józef Piórek. IMN liczył wówczas 11 członków, którymi byli studenci sekcji teoretycznej ówczesnego III roku matematyki UJ.

W październiku 1970 r. ukazała się praca paramagisterska Józefa Piórka pt. "Prolegomena do teorii vanitatis pluralis", która zapoczątkowała tę teorię małym twierdzeniem vanitatis pluralis. Wkrótce później Wojciech Suchoń, sympatyk IMN, wówczas student V roku matematyki, osłabił założenia małego twierdzenia vanitatis pluralis.

Nieco później Jacek Stasica, późniejszy Prezes IMN, opublikował pracę paramagisterską "O zbiorze absurdalnym i jego wstrząsających (matematyką) właściwościach". Praca ta doprowadziła teorię zbioru absurdalnego prawie że do obecnej jej postaci i przyniosła, w oparciu o tę teorię, dowód wielkiego twierdzenia vanitatis pluralis.

Miesiąc później praca paramagisterska Józefa Adamusa, kierownika Katedry Symboliki Zawikłanej im. doc. A. Zajtza, przyniosła "przykład bardzo fajnej funkcji, która rośnie i nie rośnie, a nie jest stała" wraz z podstawami analizy fikcjonalnej, zwanej wówczas przez autora "teorią wariacji".

W styczniu 1971 r. na Balu Matematyków ówczesny student V roku matematyki, sympatyk IMN, Adam Janik sformułował swoją hipotezę *n* - pustości. W ówczesnym stanie matematyki najwspółcześniejszej hipoteza ta nie miała szans weryfikacji. Hipoteza ta, w przeredagowanej postaci, została udowodniona dopiero w maju 1972 r.

Zbliżająca się druga semirocznica (historię IMN liczy się na półrocza) powstania IMN wywołała nowy szczyt działalności naukowej, niezależnie od systematycznie prowadzonych prac kronikarskich w dziedzinie cytatologii. Przeprowadzono wówczas reorganizację IMN, który liczył w owej chwili 17 członków zwyczajnych i 7 honorowych. Po Adamie Groblerze funkcję Prezesa objął Jacek Stasica i pełni ją do dziś. W miejsce 11 katedr utworzono 9 zakładów.

Historyczne znaczenie ma utworzenie Zakładu Zastosowań Matematyki i Matematyków pod kierownictwem Krystyny Wachty, doktorantki prof. Stanisława Łojasiewicza, przy współpracy Zofii Denkowskiej, wówczas studentki V roku matematyki. Zakład ten energicznie przystąpił do pracy, w wyniku której, oprócz rozwiązania drobnych problemów typu "zastosowanie matematyki do rozwiązywania łamigłówek" (Z. Denkowska), powstała cała, stale rozwijająca się, teoria prezentu.

W marcu 1971 r. kierownik Zakładu Kombinatoryki Pojętej Najogólniej im. dr Z. Furdzika, Adam Grobler, uzupełnił nieco teorię zbioru absurdalnego i wystąpił ze swoją absurdalną teorią mocy (za co przyznano mu tytuł paramagistra). W pracy tej centralne twierdzenie absurdalnej teorii mocy było opublikowane w błędnej wersji, co zauważono i poprawiono dopiero w maju 1972 r. Niedługo później Adam Grobler udowodnił twierdzenie o charakterze nieskończoności.

Wkrótce Józef Piórek opublikował pracę magisterską prawie wszędzie na temat jakikolwiek, a Wacław Szymański poczynił pierwsze próby stworzenia teorii rozbójnika.

W kwietniu 1971 r. na uroczystości poświęconej obchodom drugiej semirocznicy powstania IMN podsumowano roczną działalność Pracowni Cytatologii Zakładu Przetwarzania Danych im. C. Northcote Parkinsona wręczeniem następujących oznaczeń:

Złotego Cudzysłowu ze wstęgą Möbiusa doc. dr hab. Andrzejowi Lasocie,
Srebrnego Cudzysłowu prof. dr hab. Stanisławowi Łojasiewiczowi,
Brązowego Cudzysłowu prof. dr hab. Zdzisławowi Opialowi
i prof. dr hab. Jackowi Szarskiemu.

Przeprowadzono też dla Członków Honorowych IMN egzamin ze wstępu do matematyki najwspółcześniejszej, na którym wyróżnił się Andrzej Lasota. Bardzo dobrze wypadli również Stanisław Gołąb i Jacek Szarski. Na egzaminie tym należało się wykazać znajomością cytatologii i podstaw matematyki, gdzie egzaminowani mieli rozstrzygnąć problem, czy matematyka opiera się na grzbietach trzech słoni.

Czerwiec 1971 r. przyniósł pracę magisterską prawie wszędzie Adama Groblera "Zastosowanie teorii rozbójnika do teorii mnogości", o pierwszorzędnym znaczeniu dla teorii rozbójnika.

Jesień i zima 1971/1972 upłynęła pod znakiem ożywionej działalności Zakładu Kombinatoryki Pojętej Najogólniej. Rozwinięto logikę nieformalną pracami Adama Groblera na temat wartościowania zdań, reguł wnioskowania i bezprawia podwójnej negacji oraz sformuowanym przez Marka Hasa, studenta III r. matematyki i I r. filozofii, rachunkiem identyfikatorów i twierdzeniem o samosądzie. Ponadto Marek Has stworzył teorię niezbiorów, a Adam Grobler, dla potrzeb Zakładu Zastosowań Matematyki i Matematyków, opracował pewne problemy teorii inteligentnych krasnoludków. Przy pomocy współpracy

Jolanty Cepury, sympatyczki IMN, studentki IV r. metodami matematyki najwspółcześniejszej udowodniono twierdzenie znane w matematyce konwencjonalnej (funkcje rzeczywiste) pod nazwą twierdzenia o nierówności Jensena (dla funkcji wypukłych). Poczyniono też próby stworzenia brydża abstrakcyjnego przez zastosowanie do reguł gry w brydża metod lingwistyki matematycznej.

W styczniu 1972 r. powołano do życia Studium Matematyki Najwspółcześniejszej pod kierownictwem Adama Groblera przy wydatnej współpracy Józefa Piórka. Pewne znaczenie teoretyczne posiada egzamin wstępny na SMN, na którym dano do rozwiązania studentom problemy jak dotąd częściowo lub całkowicie nie rozwiązane. Były to , sformułowane przez Adama Groblera, problem istnienia twierdzenia prawdziwego, konsekwencji dla matematyki upadku abecadła z pieca i problem "jasne, jak dwa i dwa jest cztery" oraz sformułowany przez Jacka Stasicę problem kołowacizny kwadratu Odpowiedzi kandydatów rzuciły pewne światło na te zagadnienia.

Wiosna 1972 r. upłynęła na działalności dydaktycznej SMN, która początkowa zahamowała rozwój naukowy matematyki najwspółcześniejszej, by później popchnąć do dalej dzięki wątpliwościom wynikłym na wykładach. Wtedy to poprawiono centralne twierdzenie o absurdalnej teorii mocy, co pozwoliło sformułować twierdzenie Adamów Brodaczy o r - pustości. Rozwinięto w dalszym ciągu teorię rozbójnika.

Wybijający się studenci SMN, Marek Czarzyński i Jerzy Wojtasiewicz wpłynęli na rozwój cytatologii, a Łukasz Kamykowski opracował zagadnienie mamutów ogólnych w aspekcie problemu kołowacizny kwadratu.

Ukonorowaniem wiosennej działalności IMN była praca magisterska z dokładnością do izomorfizmu Józefa Piórka, która przyniosła teorię liczb ordynarnych. Przy tym wybitnym dziele przeszła prawie zupełnie niezauważona praca paramagisterska Jacka Uruszczaka na temat operacji argument.

Na przełomie maja i czerwca 1972 r. uruchomiono filię SMN w Lublinie. Egzamin wstępny na filię lubelską, stojący na wysokim poziomie, przyniósł kilka interesujących rozwiązań problemów egzaminacyjnych.

Spośród studentów lubelskich na szczególne wyróżnienie zasługuje Student Zbiorowy Trzyosobowy z Piotrem Borówką na czele, który podał najlepsze ze znanych rozwiązań problemu kołowacizny kwadratu. Ponadto, nadobowiązkowo, sformułował podstawy algebry studentowej. Wyróżnić należy także Martę Ziemnicką, Adama Bieleckiego i Małgorzatę Bielecką.

Nie można pominąć wpływu Członków Honorowych IMN na rozwój matematyki najwspółcześniejszej. Na zorganizowanym dla uczczenia trzeciej semirocznicy powstania IMN seminarium poświęconemu zastosowaniom teorii rozbójnika wyróżniły się referaty Andrzeja Lasoty i Zdzisława Opiała. Wysoko oceniono też wypowiedzi Zdzisława Denkowskiego, Bohdana Grella i Stanisława Łojasiewicza. Seminarium to wniosło istotny wkład do teorii rozbójnika.

Jeszcze jedną hipotezę tłumaczącą wynik eksperymentu inteligentnych krasnoludków sformułował Adam Bielecki, prof. UMCS w Lublinie.

Zorganizowany na uroczystości poświęconej czwartej semirocznicy powstania IMN konkurs na referat z zastosowań matematyki i matematyków wygrał znajdujący się, jak zwykle, w doskonałej formie Andrzej Lasota. Podczas tej imprezy podsumowano znowu działalność pracowni Cytatologii, wręczając odznaczenia: Gwiazdę do Złotego Cudzysłowu doc. dr hab. Andrzejowi Lasocie, Złoty Cudzysłów prof. dr hab. Stanisławowi Łojasiewiczowi, Srebrny Cudzysłów prof. dr hab. Włodzimierzowi Mlakowi i prof. dr hab. Zdzisławowi Opialowi, Brązowy Cudzysłów doc. dr hab. Józefowi Siciakowi.

Ponadto, na wniosek prof. dr hab. Adama Bieleckiego dokonano uroczystego odsłonięcia "Cudzysłowu Nieznanego Autora".

Po raz pierwszy w historii IMN w czerwcu 1972 r. przyznano Brązowy Cudzysłów członkowi zwyczajnemu IMN, mgr Edwardowi Tutajowi, pracownikowi Zakładu Funkcji Rzeczywistych IM UJ i Zakładu Głębokiego Wywiadu i Wojsk Galaktycznych IMN.

Omawiając historię matematyki najwspółcześniejszej nie sposób pominąć jeszcze jednej osoby, która wprawdzie nie wniosła nic do dorobku naukowego IMN, ale ma olbrzymie zasługi organizacyjne. Jest to jeden (jedna) z członków - założycieli IMN, mgr Roma Powiłajtis, pełniąca funkcję skarbnika IMN i kierownika Zakładu z Państwowym Przedsiębiorstwem Totalizator Sportowy. Nie chodzi tu o zasługi tego zakładu (nota bene mizerne), ale o liczne imprezy ku czci, których strona organizacyjna, gospodarcza i wręcz gastronomiczna była niemal całkowicie uzależniona od niej.

Tak oto przedstawia się nieco ponad dwuletnia historia IMN, miejmy nadzieję, że niezakończona.

Adam Grobler
Kraków, lipiec 1972 r.