Macierze i układy równań w pigułce

Example 1 $\left\{\begin{array}{l} 9x_1 - 8x_2 = 4 \\ 7x_1 + 2x_2 = 3 \end{array}\right.$,

$A = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Rozważmy układ równań

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ 0x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 - 5x_3 + 0x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_4 = 1/4 \end{array}\right.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \text{ b=} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \text{ X=} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

A=(a_{ij}) macierz współczynników układu równań,. b= $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$ macierz wyrazów wolnych.

Example 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -2 \end{bmatrix}$, *to*

$A\text{-}B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 9 & 11 & 9 \end{bmatrix}$

Example 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$, *to czy da się obliczyć* $A - B$, $A + B$? *wierszy=2, kolumn=3*

Definition 4 *2 macierze są równe, gdy mają tyle samo wierszy i kolumn oraz ich elementy są identyczne.*

Example 5 $A = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1 - 8x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$

Example 6

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 13 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 13 & 9 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Example 7 *Czy w ten sam sposób da się obliczyć iloczyn macierzy:*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Example 8 *Zapiszmy układ równań*

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

w postaci macierzowej AX=b,
gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{bmatrix}$$

$$AX = b$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Szukamy X.

0.0.1 Wyznaczniki

Example 9 *1) Wyznacznik stopnia 1-go:*

$$\begin{aligned} det\,[3] &= 3 \\ det\,[a_{11}] &= a_{11} \end{aligned}$$

2)Wyznacznik stopnia 2-go:

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1$$

3)Wyznaczniki stopnia 3-go

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

Reguła Sarrusa: dopisujemy z prawej strony dwie pierwsze kolumny i mnożymy wzdłuż przekątnych wyniki mnożymy przez odpowiedni zanak i dodajemy:

$$\begin{bmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{+}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \underset{-}{a_{31}} & \underset{-}{a_{32}} & \underset{-}{a_{33}} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Example 10 $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{matrix} \begin{aligned} &= 1*2*\frac{1}{4}+3*(-1)*(-2)+2*0*0 \\ &\quad -\left[(-2)*2*2+0*(-1)*1+\frac{1}{4}*0*3\right] \\ &= \frac{1}{2}+6+8=14.5 \end{aligned}$$

Definition 11 *Minorem M_{ik} macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy otrzymanej z A przez skreślenie i-tego wiersza i k-tej kolumny*

Example 12 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$, $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1/4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

$M_{32} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1$

Definition 13 *dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ik} macierzy A nazywamy liczbę:*

$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$

Example 14 $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 1$ *(z poprzedniego przykładu)*

Definition 15 *Macierz dopełnień algebraicznych*

$$A^d = [A_{ij}]$$

Theorem 16 *Laplace'a (inaczej rozwinięcie Laplace'a)*

Wyznacznik macierzy A równa się sumie elementów danego wiersza (kolumny) pomnożonych przez ich dopełnienia algebraiczne:

$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$ *(rozwinięcie wzg. i-tego wiersza)*

a także

$detA = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + ... + a_{kn}A_{kn}$ *(rozwinięcie wzg. k-tej kolumny)*

Example 17 $det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{w3}{=} 0+0+(-5)(-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + 10(-1)^{3+4} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\overset{w2}{=} -5(0+2(-1)^{2+2} det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 0) - 10(-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -20 - 10(-9-12)$

Example 18

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} &= -5\,(-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
&\overset{k3}{=} -5\,(-1)\,(-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \\
+-20\,(-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} &= \\
5\left(-\frac{1}{2}\right) - 140 &= -142,5
\end{aligned}$$

Example 19 $det\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix} = (-6) * 1 * 2 * 4$

0.0.2 Układy liniowe n równań o n niewiadomych

Wzory Cramera

Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ 0x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0x_4 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 - 5x_3 + 0x_4 = 0 \\ -2x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 4x_4 = 1/4 \end{cases}$$

było bardzo podobne powyżej, że

$$\det A = \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = -20$$

Wzory Cramera:

$$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}, x_2 = \frac{\det B_3}{\det A}, x_2 = \frac{\det B_4}{\det A}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 1/4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\
B_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1/4 & 4 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det B_1 &= -142,5 \text{ (było)} \\
\det B_2 &= -5\,(-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1/4 & 4 \end{bmatrix} = \\
& \quad -5\,(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\
&= 5\,(4-2) = 10 \\
\det B_3 &= 0 \\
\det B_4 &= \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \\
& \quad -5\,(-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \overset{byo}{=} -5 * 14.5 \\
&= -72.5
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-142,5}{-20},\ x_2 = \frac{10}{-20}, x_3 = \frac{0}{-20}, x_4 = \frac{-72.5}{-20}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{14.25}{2} \\ -0.5 \\ 0 \\ \frac{7.25}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ -1.0 \\ 0 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

0.0.3 Macierz odwrotna

Example 20 *Motywacja.*

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = b$$

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{A} b \\
X &= A^{-1} b
\end{aligned}$$

Definition 21 *Macierz transponowaną A^T macierzy A otrzymujemy z macierzy A przez zastąpienie kolejnych wierszy kolejnymi kolumnami.*

Example 22 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

Definition 23 *Macierz kwadratową A nazywamy macierzą nieosobliwą jeśli $detA \neq 0$*

Theorem 24 *A jest macierzą nieosobliwą $\Leftrightarrow$ A posiada odwrotną tzn.* $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^d\right)^T$

Example 25 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

krok1:

$$detA = 3 - 8 = -5 \neq 0$$

krok2:$A^d = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

krok3: $\left(A^d\right)^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Ogólny wzór

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Example 26

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = b$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{A}b \\ X &= A^{-1}b \end{aligned}$$

krok1: $detA=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$

krok2: budujemy macierz dopełnień

$$A^d = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{bmatrix}$$

krok3:

$$\left(A^d\right)^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{bmatrix}$$

krok4:

$$A^{-1} = \frac{\left(A^d\right)^T}{\det A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}b \\ X &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -58 \\ 41 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sprawdzenia

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ -58 \\ 41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Example 27 *Rozwiązać równania:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X = 4X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X - 4X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 4I\right) X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AX=B, mnożymy z lewej przez A^{-1}

$A^{-1}(AX)$=$A^{-1}B$

$\left(A^{-1}A\right)X$=$A^{-1}B$

X=$A^{-1}B$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie $X=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$