



**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

# **Wykład II**

## **Mechanika Gruntów - repetytorium**

**Marek Cała, Jerzy Flisiak**

**Katedra Geomechaniki, Budownictwa i Geotechniki  
Wydział Górnictwa i Geoinżynierii**

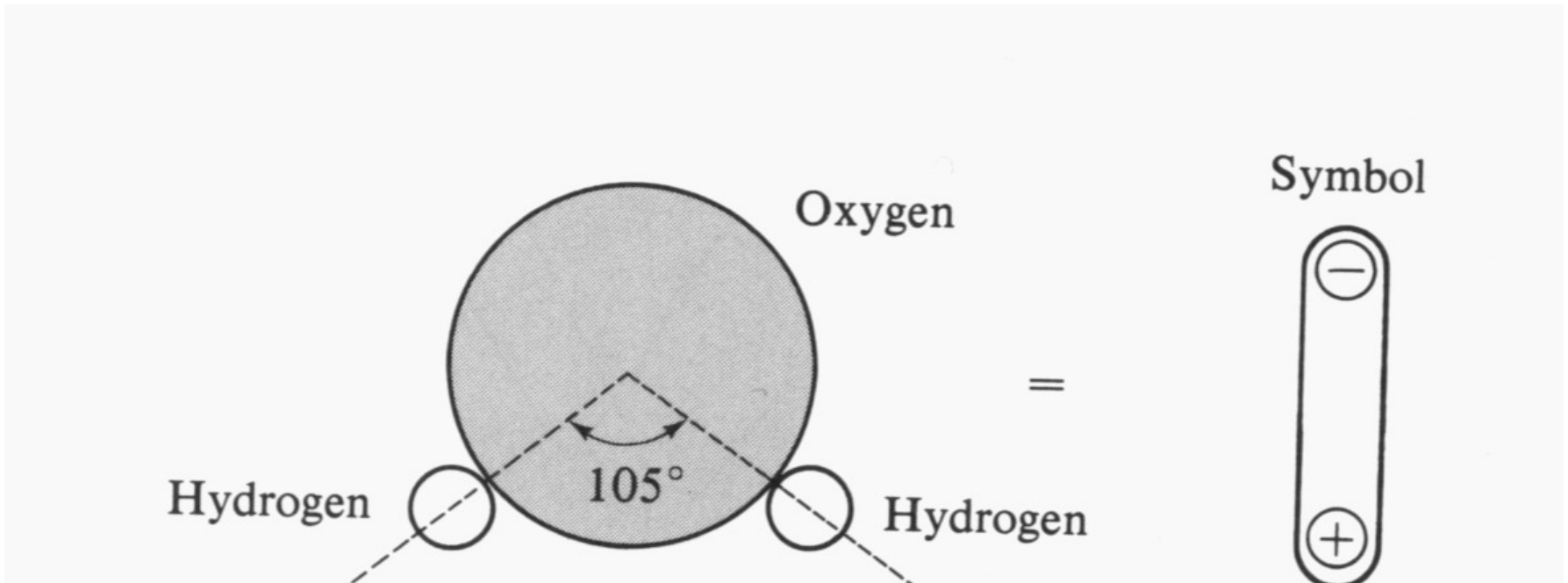
# Rodzaje Wód Występujących w Gruncie

Rodzaje wody w gruncie klasyfikuje się na podstawie jej stanu skupienia (**stały, ciekły, gazowy**), ruchliwości i wzajemnego oddziaływania na cząstki gruntowe. Przyjmuje się, że w podłożu gruntowym występuje woda:

- **w postaci pary**
- **związana:**
  - **silnie związana – higroskopijna**
  - **słabo związana – błonkowata**
- **wolna:**
  - **gruntowa**
  - **wsiąkowa**
- **kapilarna (włoskowata)**
- **w stanie stałym**
- **krystalizacyjna i chemicznie związana**

# Wody związane

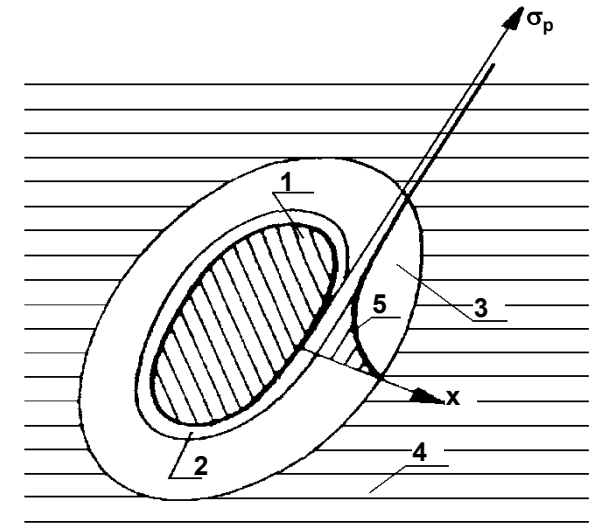
## Dlaczego woda jest związana z gruntem?



**Woda związana otacza cząstki gruntu w postaci warstw, które są przyciągane przez grunt z różną siłą. Dzieli się na silnie związaną i słabo związaną.**

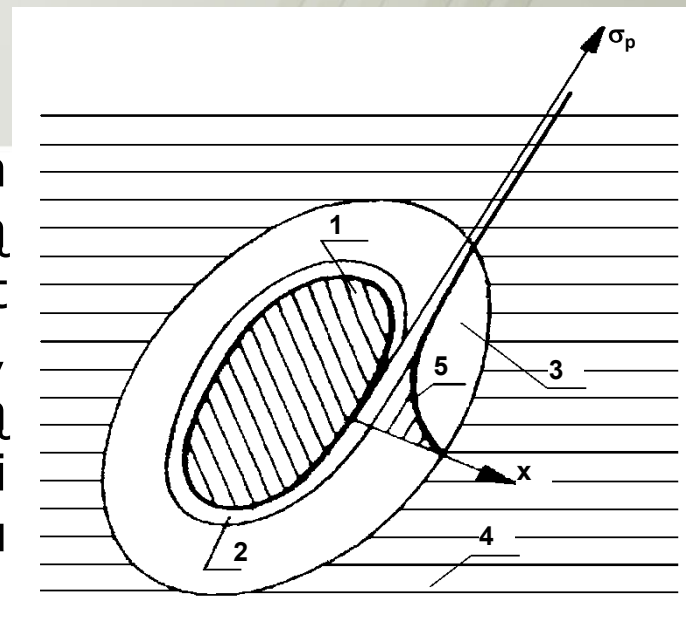
## **Rozkład sił jednostkowych przyciągających wodę związaną:**

- 1 – cząstka stała,
- 2 – woda adsorpcyjna (higroskopijna),
- 3 – woda błonkowata, 4 – woda wolna,
- 5 – wykres sił przyciągania molekularnego



➤ **Woda silnie związana – higroskopowa (adhezyjna, adsorbowana)** jest silnie połączona z powierzchnią cząstek gruntowych. Tworzy powłokę – warstwę **kationów** trwale związanych z powierzchnią cząstki gruntu na skutek przyciągania molekuł wodnych. Nie może działać rozpuszczająco, przechodzić z jednej cząstki na drugą oraz przekazywać ciśnienia hydrostatycznego. Woda adhezyjna przyciągana jest z ciśnieniem dochodzącym do **2500 MPa**. Ma własności ciała stałego. Jej gęstość dochodzić może do  $2400 \text{ kg/m}^3$ , a temperatura zamarzania do  $-78^\circ \text{C}$ . Grubość warstwy wód adsorbowanych od 2 do 10 drobin wody. Do ich całkowitego usunięcia potrzebna jest temperatura **350° C**.

➤ **woda błonkowata** - woda słabo związana – błonkowata dzieli się na wodę błonkową utwardzoną i wodę błonkową luźną. Jest słabiej związana z powierzchnią cząstki, przesuwa się z jednej cząstki na drugą niezależnie od siły ciężkości do chwili wyrównania grubości wodnej na obu cząstkach.



Woda błonkowa stanowi warstwę o grubości od 20 do 200 drobin wody. Grubość powłoki wody błonkowej wokół ziarn kwarcu o średnicy od 0.1 – 0.05 mm wynosi ok.  $34 \cdot 10^{-6}$  mm, a dla cząstek 0.01 do 0.005 mm -  $5 \cdot 10^{-5}$  mm. Zamarza w temperaturze nieco poniżej  $0^{\circ}$  C. Nie przenosi ciśnienia hydrostatycznego. Łączna grubość wód związanych na powierzchni cząstek ilowych może dochodzić do **0.001 mm**, a więc może przekraczać wymiar samej cząstki, a tym samym wszystkie wolne przestrzenie. Wpływ wody związanej na własności fizyczne i mechaniczne, a głównie na przepuszczalność, ściśliwość, kapilarność jest tym większy, im drobniejsze są cząstki gruntu.

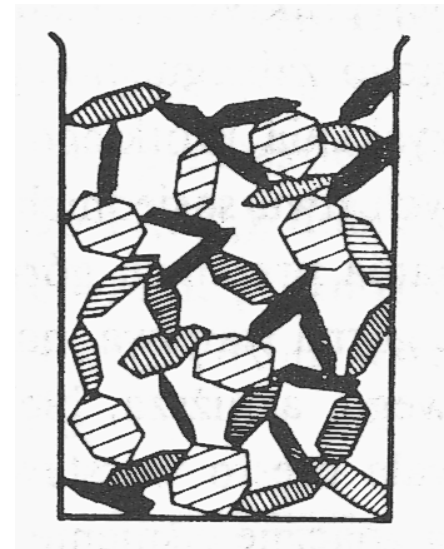


AGH

**ZJAWISKO TIKSOTROPII** polega na przechodzenia żelu w zol i odwrotnie, wskutek mechanicznych oddziaływań (wibracji, wstrząsów, mieszania, działania ultradźwięków itp.) W tworzeniu się żelu udział biorą wszystkie cząstki zawiesiny, z których po pewnym czasie powstaje ciągła struktura komórkowa.

**Właściwości tiksotropowe mają grunty zawierające cząstki iłowe o rozmiarach koloidów  $< 0,0002$  mm.**

Cząstki iłowe i koloidalne tworzą pomiędzy większymi ziarnami tiksotropowe spoiwo w postaci ciągłej siatki przestrzennej, nadają gruntowi spoistość i wytrzymałość. Naruszenie struktury tiksotropowej spoiwa gruntu wskutek drgań i wibracji powoduje uplastycznienie gruntu, a nawet jego upłynnienie.





# Upłynnienie gruntów (Soil Liquefaction)

Jest to utrata nośności (wytrzymałości) gruntów piaszczystych lub pylastych pod wpływem obciążeń dynamicznych (drgań).

Czynniki sprzyjające upłynnianiu:

- drobnoziarnistość,
- równoziarnistość,
- stopień zagęszczenia (luźne lub średniozagęszczone),
- zawodnienie.

# Osiadanie zapadowe

**Osiadaniem zapadowym** nazywamy zdolność gruntu, znajdującego się pod określonym obciążeniem, do szybkiej zmiany objętości pod wpływem nasycenia wodą.

Cechę tę wykazują niektóre lessy. Czynniki warunkujące osiadanie zapadowe:

- skład granulometryczny (przewagę frakcji pyłowej z małą ilością części koloidalnych),
- skład mineralny,
- wapnistość,
- zasolenie powyżej 0,3%,
- wilgotność naturalną niższą od granicy plastyczności,
- dobrze widoczną makroporowatość,
- porowatość powyżej 45%.

**Lessy o niewielkiej wilgotności naturalnej** charakteryzują się niewielką ściśliwością oraz zazwyczaj zdolnością do osiadania zapadowego.

**Natomiast lessy o wysokiej wilgotności** wykazują stosunkowo dużą ściśliwość i brak zdolności do osiadania zapadowego (E. Myślińska, 1984).



# Osiadanie zapadowe

- Najprostsze wyjaśnienie mechanizmu zjawiska osiadania zapadowego sprowadza się do uznania, że w wyniku zetknięcia się z wodą zostają przerwane wiązania istniejące między elementami szkieletu (pierwotnymi cząstkami i ziarnami oraz agregatami), a wobec dużej porowatości następuje załamaniem się całej struktury szkieletowej lessów.
- Według niektórych autorów (B. Grabowska-Olszewska, 1988) przyczyną załamania struktury „są tzw. mostki ilaste dające wiązania typu punktowo-koagulacyjnego między elementami strukturalnymi, które są uwarunkowane siłami o charakterze jonowo-elektrostatycznym”.
- Niewykluczone jest również, że istniejące mostki ilaste pod wpływem wody, powodującej zmniejszenie tarcia wewnętrznego ułatwiają przesuwanie się cząstek i zmianę trwałości struktury. Nie znaleziono jednak wyraźnej zależności między zawartością frakcji iłowej a osiadaniem zapadowym.

# Występowanie lessów



# Osiadanie zapadowe

Miarą intensywności zjawiska jest wskaźnik osiadania zapadowego  $i_{mp}$  (PN-88/B-04481) oznaczany w warunkach jednoosiowego (edometrycznego) odkształcenia i obliczany wg wzoru:

$$i_{mp} = \frac{h' - h''}{h_0}$$

gdzie:

$h'$  – wysokość próbki nienaruszonej w mm po stabilizacji odkształceń przy naprężeniu całkowitym  $\sigma_{zt}$ , odpowiadającym **ciężarowi gruntu i budowli** przed nasyceniem wodą ,

$h''$  – wysokość tej próbki w mm przy tym samym naprężeniu, ale po **całkowitym nasyceniu wodą**,

$h_0$  – wysokość próbki w mm po stabilizacji odkształceń przy naprężeniu pierwotnym  $\sigma_z$  odpowiadającym **ciężarowi gruntu** na rozpatrywanej głębokości.

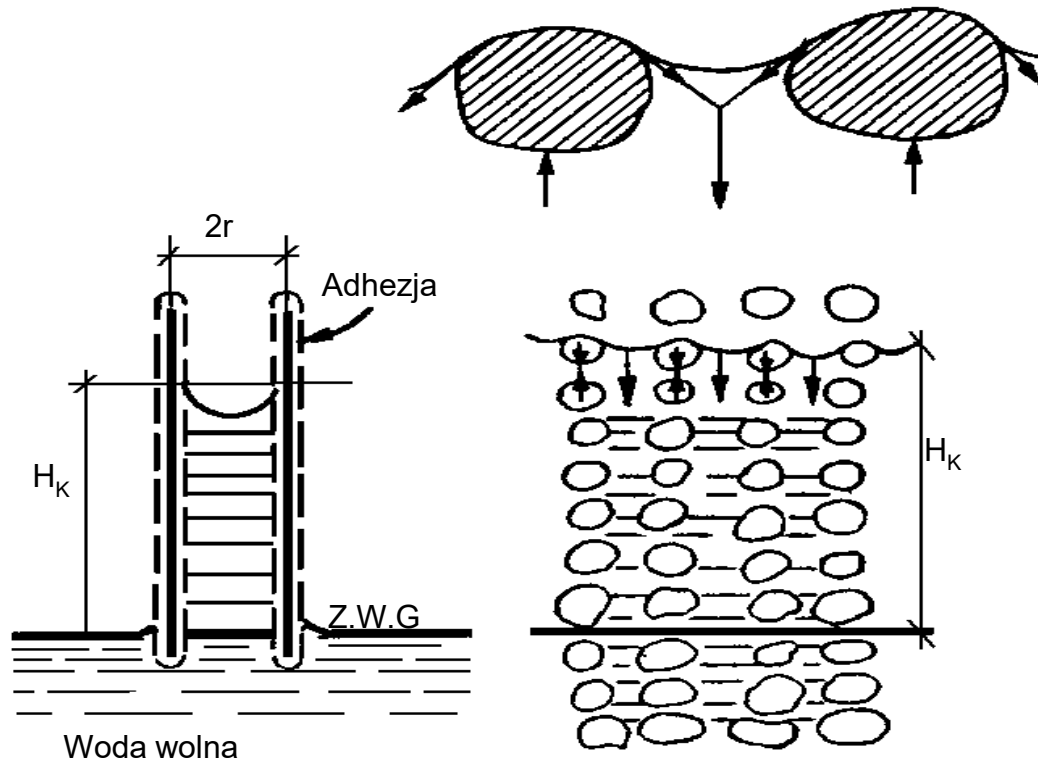
W zależności od wartości, jaką wykazują, lessy sklasyfikowano jako:

- **zapadowe:** o  $i_{mp} > 0,02$  [-]; o strukturze nietrwałej, wrażliwej na działanie wody;
- **niezapadowe:** o  $i_{mp} < 0,02$  [-]; o strukturze trwałej, niewrażliwej na działanie wody.

# Kapilarność

Kapilarność jest wynikiem działania dwu zjawisk:

- przyczepności (adhezji) wody do ścianek rurki
- napięcia powierzchniowego wody



# Kapilarność

**Woda włoskowata – kapilarna** przenosi ciśnienie hydrostatyczne, zamarza w temperaturze poniżej 0°C.

## Wodę kapilarną dzieli się na trzy typy:

- 1. Woda naroży porów** tworzy się w miejscach styku cząstek w postaci oddzielnych kropli.
- 2. Woda zawieszona** nie ma bezpośredniej łączności z poziomem wód gruntowych, stąd nie może być przez nie zasilana.
- 3. Właściwa woda kapilarna** podnosi się w górę do poziomu wód gruntowych.

# Kapilarność

Wysokość kapilarnego podciągania  $H_k$  wody ponad swobodne jej zwierciadło można wyznaczyć w sposób następujący:

Ciężar słupa wody w rurce wynosi:

$$G = H_k \pi r^2 \rho_w g$$

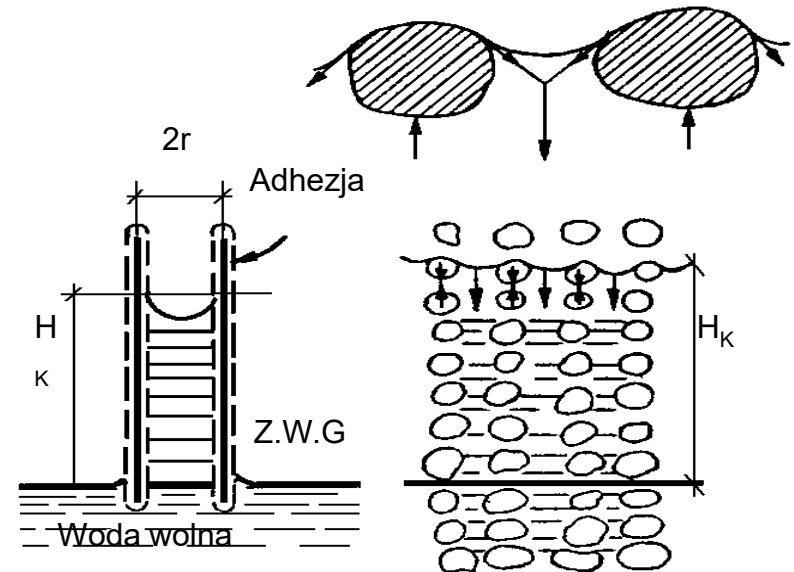
gdzie:

$H_k$  - wysokość kapilarnego podciągania wody

$r$  - promień kapilary

$\rho_w$  - gęstość właściwa wody,

$g$  - przyspieszenie ziemskie.



# Kapilarność

Siła napięcia powierzchniowego przy kącie zwilżania  $\alpha = 0$  (kąt styku menisku wody z powierzchnią ścianki kapilary szklanej, dla czystego szkła  $\alpha = 0$ ) wynosi:

$$Q_p = 2\pi r \sigma_{np}$$

gdzie:  $\sigma_{np}$  - napięcie powierzchniowe wody.

Porównując prawe strony obu równań otrzymujemy:

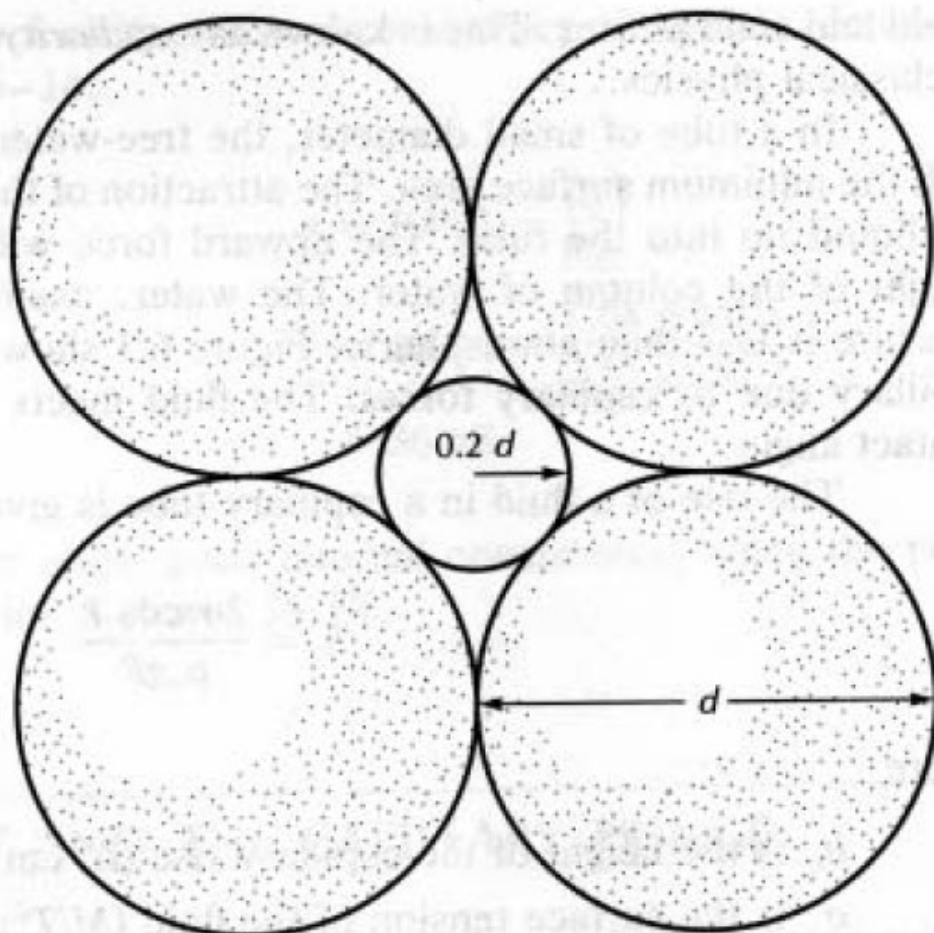
$$H_k = \frac{2\sigma_{np}}{r\rho_w g}$$

Przyjmując, że siła napięcia powierzchniowego wody w temperaturze  $10^0$  C wynosi  $0.0727$  N/m otrzymujemy przybliżony wzór na wysokość podnoszenia kapilarnego:

$$H_k = \frac{0.15}{r} [cm]$$



# Jak określać średnicę porów w gruntach?



W gruntach drobnoziarnistych ekwiwalentny promień porów równy jest w przybliżeniu 0.2 średnicy ziarn. Do wstępnych obliczeń wysokości podnoszenia kapilarnego można więc przyjąć, że:

$$r = 0.2 d$$

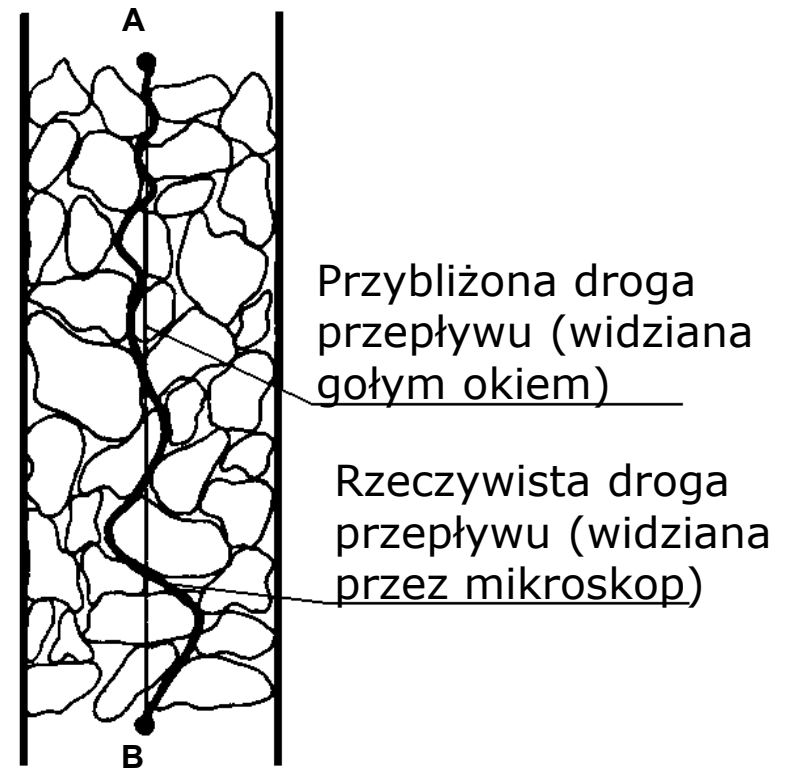


- **Istota Przepływu Cieczy w Gruncie**
- **Filtracja**
- **Prawo Darcy'ego**
- **Ograniczenia Prawa Darcy'ego**
- **Podstawowe Równanie Przepływu w Gruncie**
- **Siatka Filtracyjna**

# Istota Przepływu Cieczy w Gruncie

Pory w gruncie są połączone, więc przepływ wody możliwy jest nawet w najbardziej zagęszczonych gruntach naturalnych.

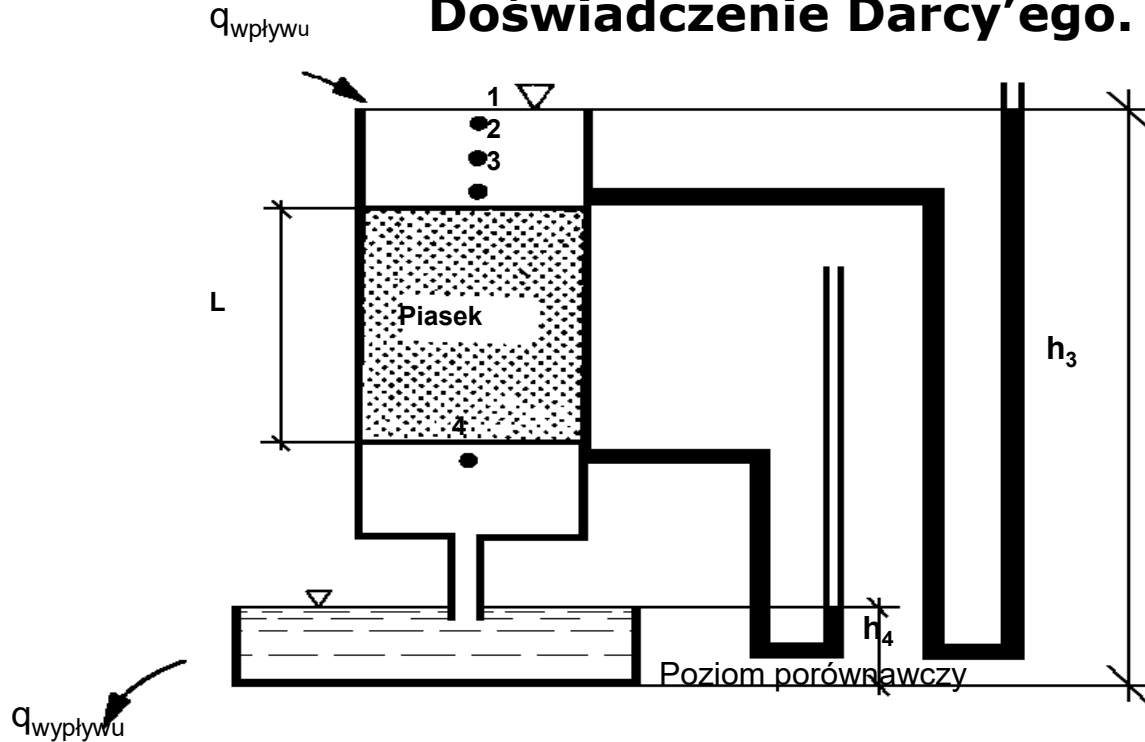
W próbce gruntu woda może przepływać z punktu A do punktu B, jednakże nie po linii prostej i ze stałą prędkością, lecz od poru do poru po krzywej.



Droga przepływu w gruncie.

# Prawo Darcy'ego. Filtracja.

## Doświadczenie Darcy'ego.



$$q = k \frac{h_3 - h_4}{L} A = kiA$$

$$i = \frac{h_3 - h_4}{L}$$

$$q = kiA$$

$q$  - wydatek przepływu,

$k$  - stała, współczynnik proporcjonalności, zwany **współczynnikiem filtracji**,

$h_3$  - wysokość ponad poziomem porównawczym, do której nastąpiło podniesienie wody w piezometrze umieszczonym powyżej próbki,

$h_4$  - wysokość jak  $h_3$  lecz w piezometrze poniżej próbki,

$L$  - długość próbki,  $A$  - pole całkowite poprzecznego przekroju.

# Prawo Darcy'ego. Filtracja.

$$\frac{q}{A} = ki = v$$

Stosując zasadę ciągłości można powiązać prędkość dopływu  $v$  ze średnią rzeczywistą prędkością przepływu przez grunt  $v_s$

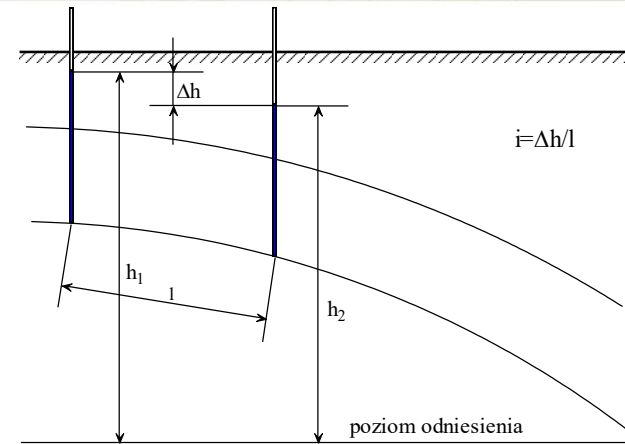
$$q = vA = v_s A_p, \quad v_s = v \frac{A}{A_p} = v \frac{AL}{A_p L} = v \frac{V}{V_p} = \frac{v}{n}$$

**Prędkość filtracji** to **średnia rzeczywista prędkość przepływu w gruncie**  $v_s$  jest ona równa prędkości dopływu podzielonej przez porowatość:

$$v_s = \frac{v}{n} = \frac{ki}{n}$$

**Filtracja** to ruch wody gruntowej, zależy od:

- **ośrodka gruntowego w którym przepływ się odbywa**
- **uziarnienia ośrodka gruntowego** (im drobniejsze jest uziarnienie gruntu tym większe są opory ruchu wody)
- **struktury i porowatości**



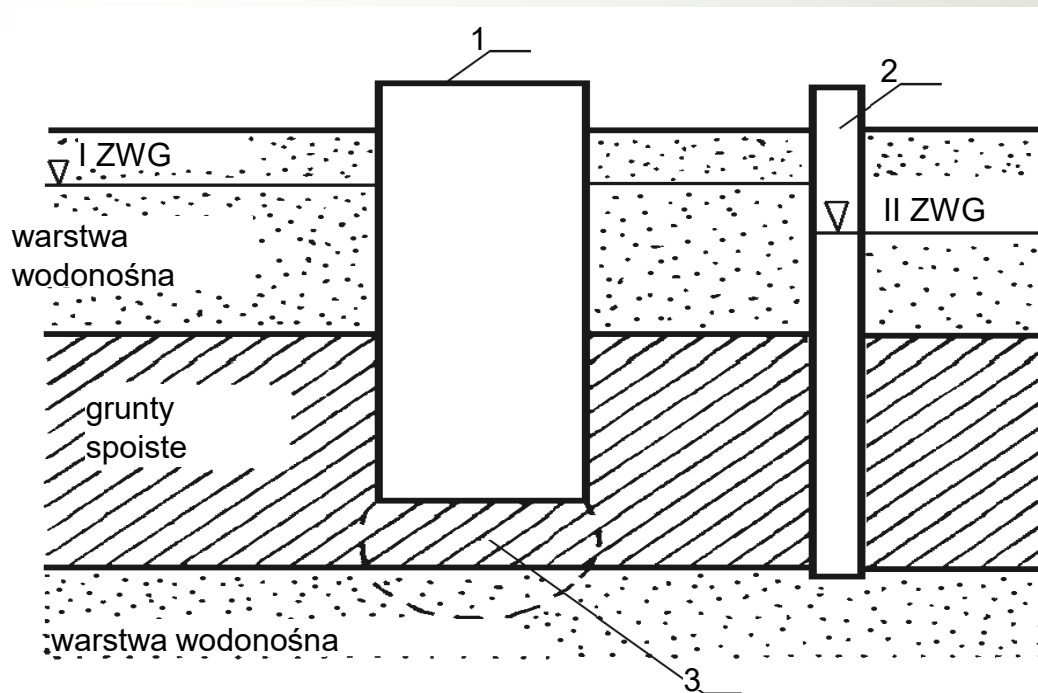
# Orientacyjne wartości współczynnika filtracji

Nazwa gruntu	Współczynnik filtracji, k, m/s
Drobny żwir	$10^{-2}$ - $10^{-3}$
Piasek gruboziarnisty	$10^{-3}$ - $10^{-4}$
Piasek dronoziarnisty	$10^{-4}$ - $10^{-5}$
Piasek pylasty	$10^{-5}$ - $10^{-6}$
Less o strukturze nienaruszonej	$10^{-5}$ - $10^{-6}$
Less o strukturze przerobionej	$10^{-7}$ - $10^{-9}$
Pył	$10^{-6}$ - $10^{-8}$
Gliny	$10^{-8}$ - $10^{-10}$
Gliny zwięzłe	$10^{-9}$ - $10^{-11}$
Iły	$10^{-10}$ - $10^{-12}$

- **Kurzawka**
- **Wyparcie gruntu**
- **Przebiecie hydrauliczne**
- **Sufozja**
- **Kolmatacja**

**Kurzawka** najczęściej występuje w piaskach drobnych. W gruntach o grubym uziarnieniu, np. w żwirach, zjawisko to występuje niezmiernie rzadko. Jest to spowodowane niewielkimi gradientami  $i \ll 1$ , jakie na ogół występują w gruntach o dużej przepuszczalności (gruboziarnistych).

# Zmiany w Gruncie Wywołane Filtracją



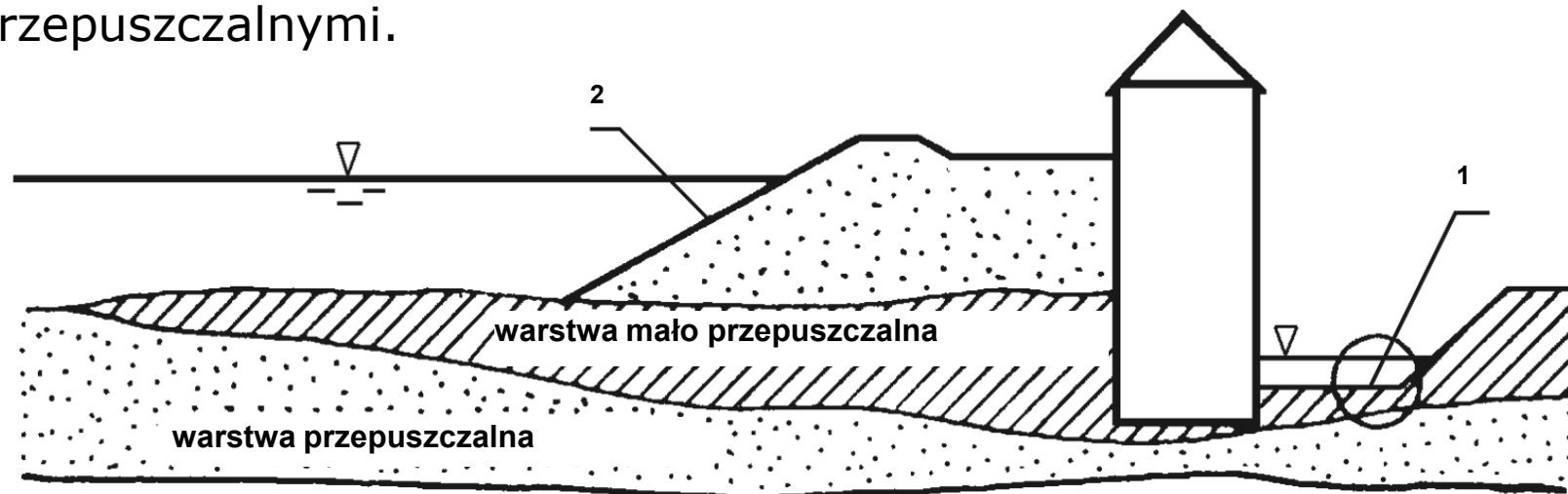
**Przykład warunków gruntowo – wodnych, w których może nastąpić przebicie:**

- 1 – studnia opuszczona,
- 2 – piezometr,
- 3 – strefa zagrożenia wyparciem.

**Wyparciem gruntu** nazywa się zjawisko polegające na przesunięciu pewnej objętości gruntu (często wraz z obciążającymi ją elementami ubezpieczeń). Wyparta masa powiększa swoją objętość i porowatość. Zjawisko wyparcia może występować nie tylko w kierunku pionowym do góry, lecz również poziomo w podłożu budowli piętrzących wodę, a niekiedy również w kierunku do dołu.

# Zmiany w Gruncie Wywołane Filtracją

**Przebieciem hydraulicznym** nazywa się zjawisko tworzenia się kanału (przewodu) w masie gruntowej, wypełnionego gruntem o naruszonej strukturze (w końcowej fazie zjawiska – zawiesiną), łączącego miejsca o wyższym i niższym ciśnieniu wody w porach. Na powierzchni terenu przebiecie hydrauliczne jest widoczne w postaci źródła. Zjawisko przebicia występuje przeważnie w gruntach mało spoistych podścielonych gruntami przepuszczalnymi.



Przykład warunków geologicznych, w których może nastąpić przebiecie:  
1 – miejsce zagrożenia przebieciem.



**Sufozja** to zjawisko polegające na wynoszeniu przez filtrującą wodę drobnych cząstek gruntu (przesunięcie ich na inne miejsce lub wyniesione poza obręb gruntu). W rezultacie sufozji powiększają się pory, wzrasta współczynnik filtracji i prędkość wody. Woda o większej prędkości może poruszać coraz większe ziarna gruntu i powodować dalszy rozwój procesu sufozji aż do utworzenia się kawern lub kanałów w gruncie. Zjawisko przybiera wtedy cechy przebicia hydraulicznego.

Sufozja występuje wtedy, gdy zostanie przekroczony  $i_{kr}$  lub prędkość krytyczna  $v_{kr}$ .

$$v_{kr} = \frac{\sqrt{k}}{15}$$

gdzie:  $k$  - współczynnik filtracji [m/s].

Sufozja występuje w gruntach sypkich, (przede wszystkim różnoziarnistych). W zależności od miejsca występowania sufozji w zaporze rozróżnia się:

- **sufozję wewnętrzną** (występuje wewnątrz danego rodzaju gruntu)
- **zewnątrzną i kontaktową** (w strefie przypowierzchniowej zapory lub podłoża a także na styku różnych warstw gruntu, gdy kierunek ruchu wody jest prostopadły do styku).
  
- **Sufozja mechaniczna**
- **Sufozja chemiczna**

# Zasady Zabezpieczania Gruntów Przed Szkodliwym Działaniem Filtracji

Środki, którymi zabezpiecza się grunty przed szkodliwym działaniem filtracji można podzielić na trzy grupy.

- 1. Sposoby zabezpieczeń zmniejszających spadek hydrauliczny** (wydłużenie drogi filtracji – np. ścianki szczelne, przesłony etc.).
- 2. Konstrukcje gruntowe zwane filtrami odwrotnymi.**
- 3. Odwodnienie.**

# Zasady Zabezpieczania Gruntów Przed Szkodliwym Działaniem Filtracji

Działanie filtrów odwrotnych polega na następującej zasadzie: jeśli woda przepływa kolejno przez np. trzy warstwy gruntu o coraz większym współczynniku filtracji, to przy założeniu ciągłości przepływu można napisać zależność:

$$v = k_1 i_1 = k_2 i_2 = k_3 i_3$$

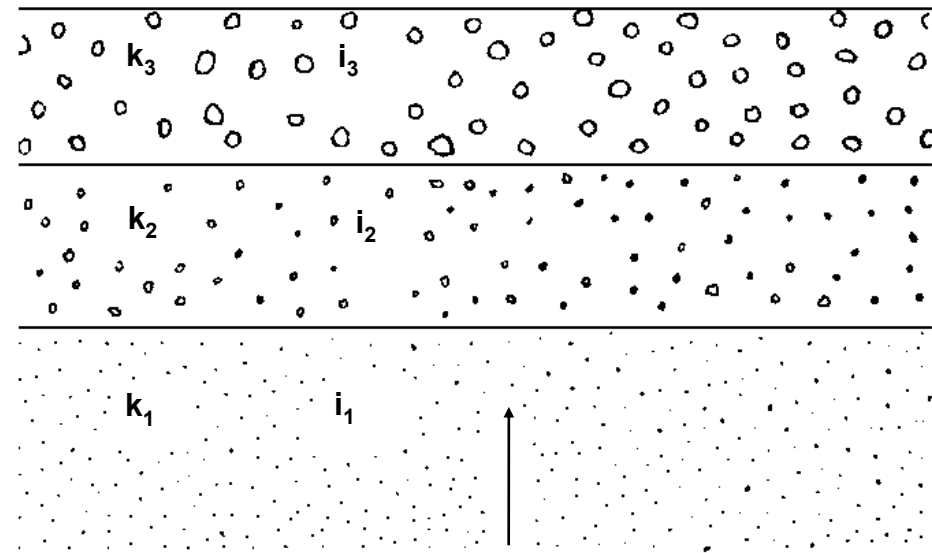
gdzie:

$v$  - prędkość [m/s],

$k_1, k_2, k_3$  - współczynnik filtracji w poszczególnych warstwach [m/s],

$i_1, i_2, i_3$  - spadki hydrauliczne w poszczególnych warstwach

## Schemat filtru odwrotnego.





# Zasady Zabezpieczania Gruntów Przed Szkodliwym Działaniem Filtracji

Ponieważ

$$k_1 < k_2 < k_3$$

uwzględniając równanie będzie

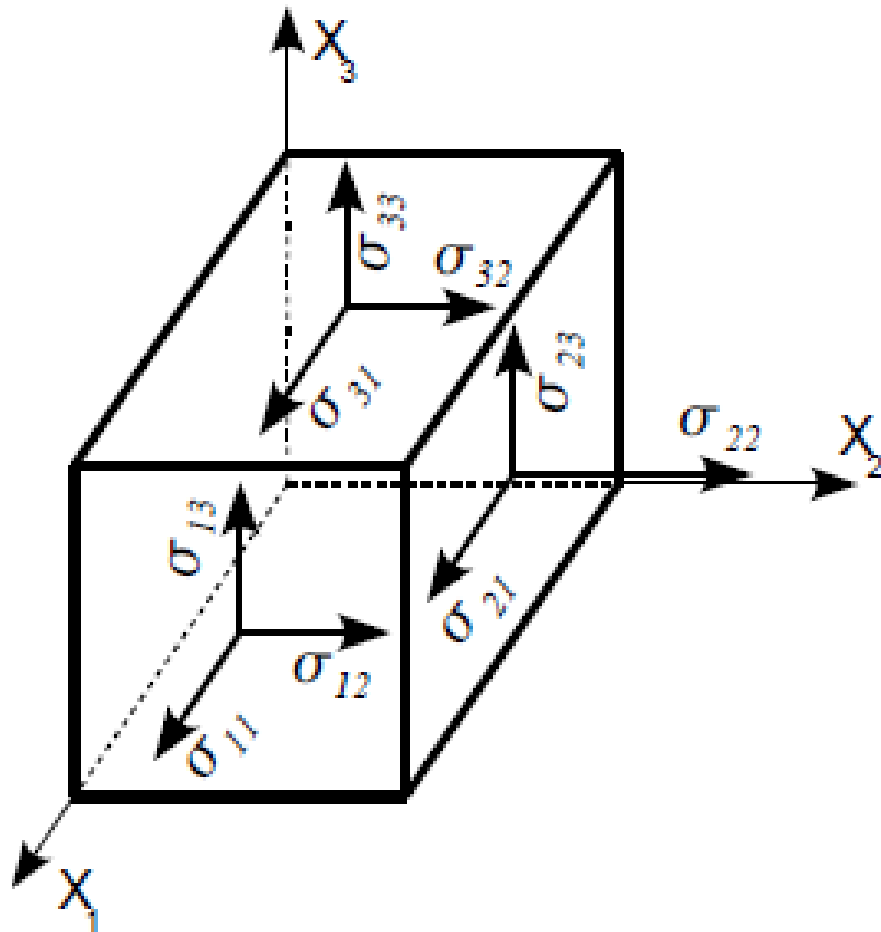
$i_1 > i_2 > i_3$  z otrzymanej zależności wynika, że jeśli na warstwie 1 gruntu drobniejszego, zagrożonego działaniem filtracji, ułożona zostanie warstwa 2 gruntu grubszego, to będzie w niej mniejszy spadek hydrauliczny, a zatem mniejsze ciśnienie sphywowe. Na skutek obciążenia warstwami wyżej leżącymi poprawią się warunki warstwy dolnej.

Podczas ruchu wody możliwe jest wypłukiwanie ziaren drobnych, co prowadzi do „zamulenia filtrów” i utraty ich funkcji (kolmatacja). Aby temu zapobiec wymiary ziaren materiału filtracyjnego muszą spełniać określone kryteria. W praktyce najczęściej stosuje się następujące kryteria doboru uziarnienia materiału filtra.

# Naprężenie w Gruncie

- **Stan naprężenia w gruncie**
- **Naprężenie geostatyczne (pierwotne)**
- **Naprężenia efektywne**
- **Naprężenie powstałe wskutek działania obciążeń zewnętrznych**
- **Graficzna interpretacja naprężenia**

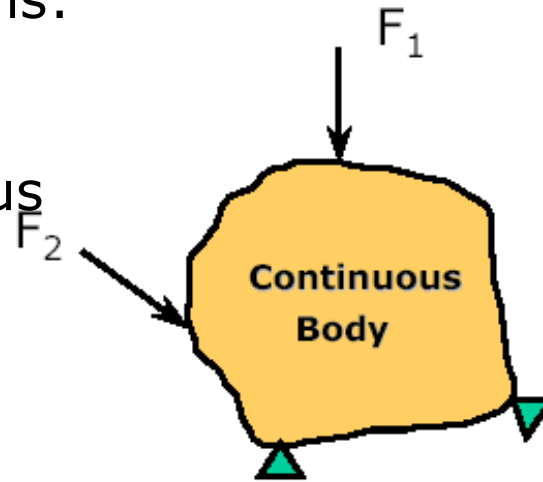
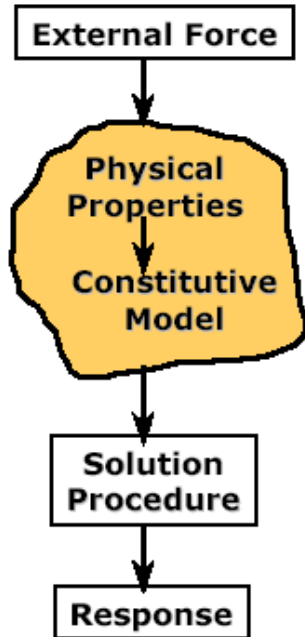
# Stan Naprężenia w Gruncie



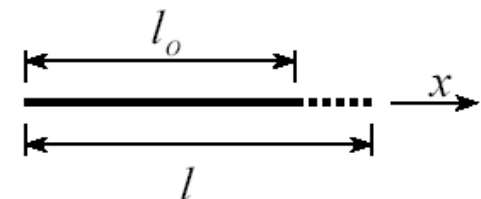
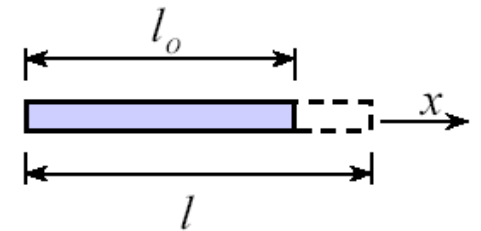
$$\sigma_{\bar{ij}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Simplifying assumptions:

1. Soil is continuous
2. Soil is homogeneous
3. Soil is isotropic

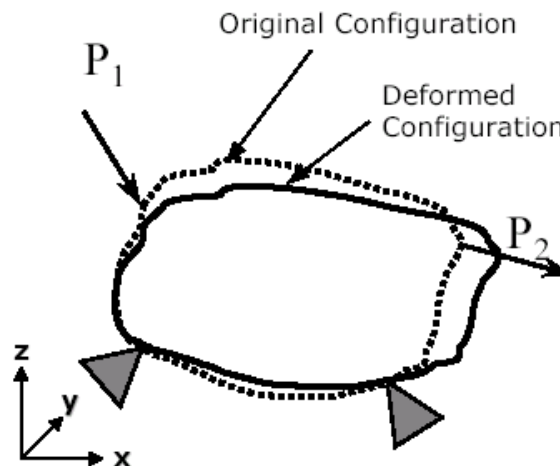


A continuous body subjected to a system of external forces



Normal strain definition

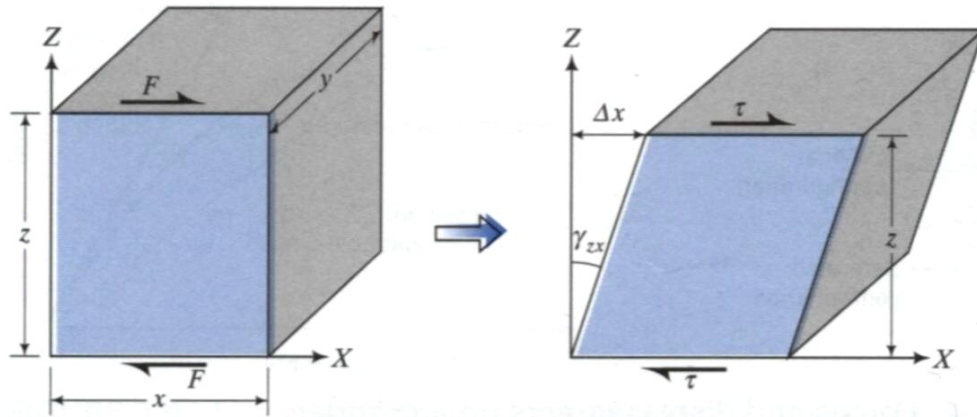
$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$





## Poisson's ratio definition

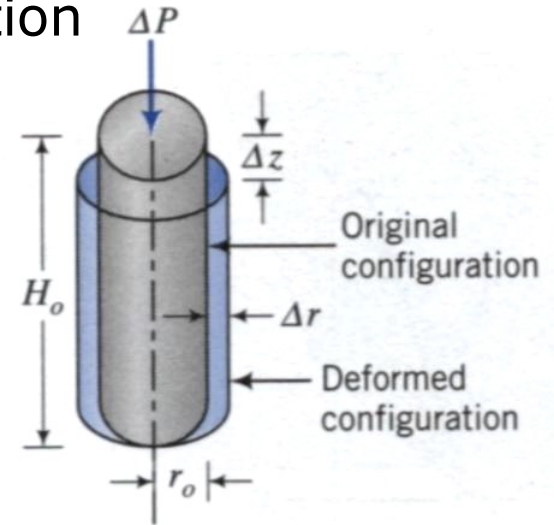
## Shear strain definition



Shear stresses and shear strains.

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

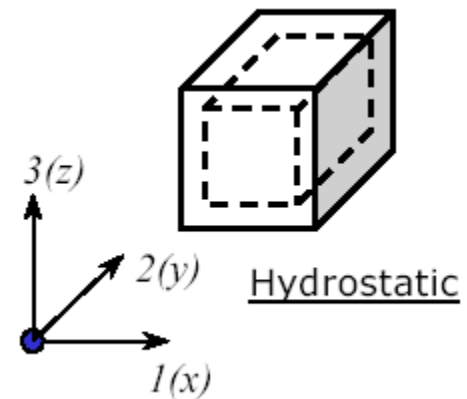
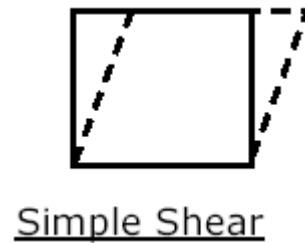
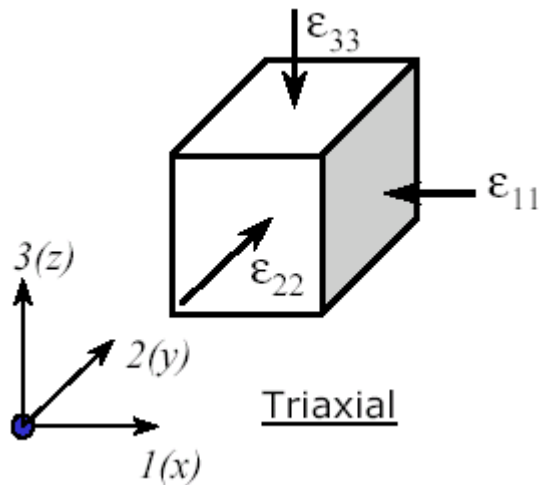
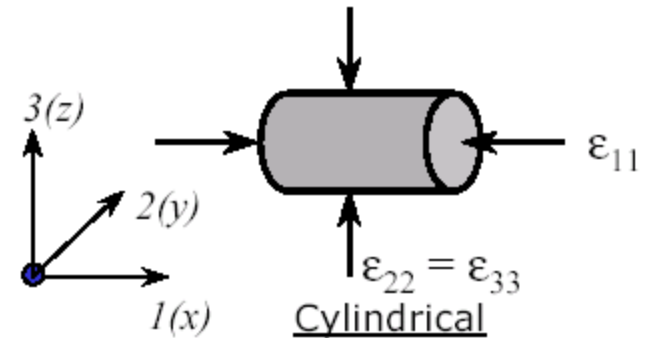
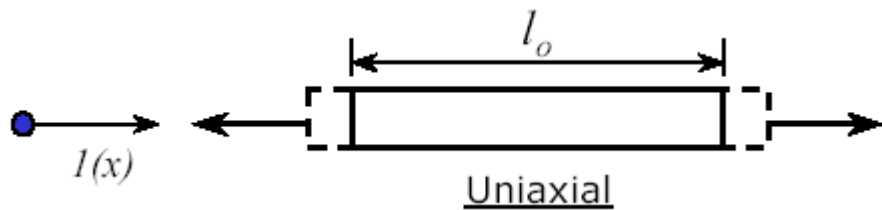
$$\nu = -\frac{\epsilon_r}{\epsilon_z}$$



**TABLE 3.1 Typical Values of Poisson's Ratio**

Soil type	Description	$\nu^a$
Clay	Soft	0.35–0.40
	Medium	0.30–0.35
	Stiff	0.20–0.30
Sand	Loose	0.15–0.25
	Medium	0.25–0.30
	Dense	0.25–0.35

## States of strains

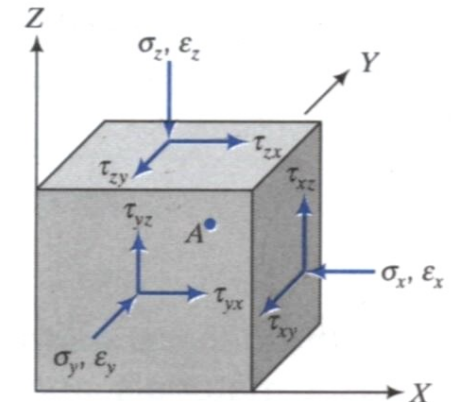
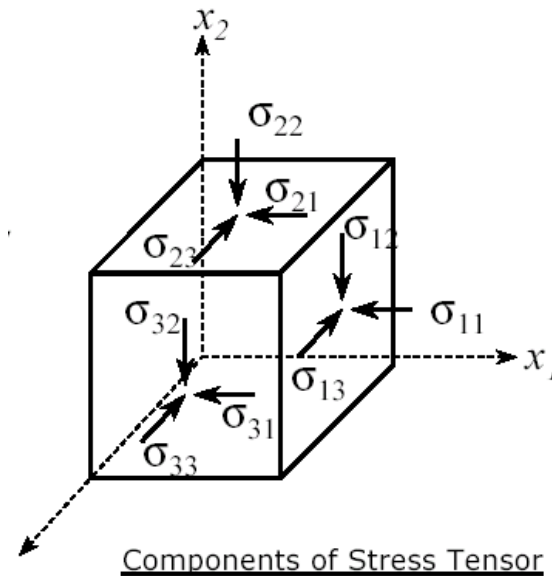
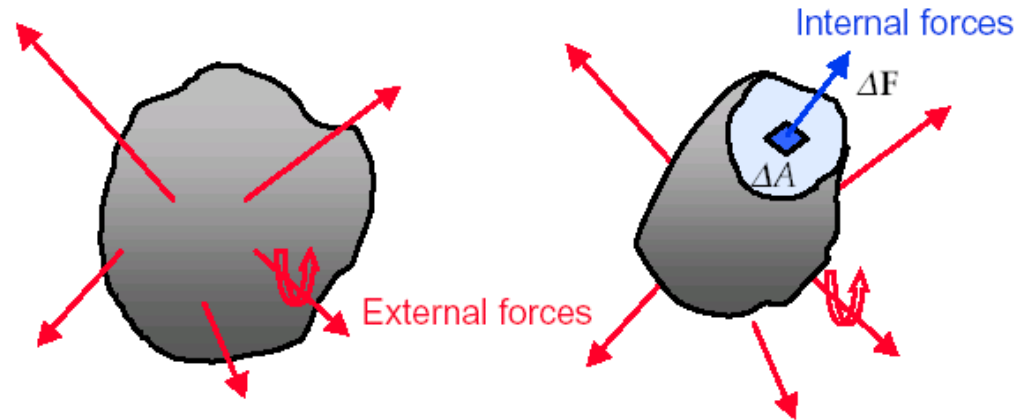


Stress definition

$$\sigma_{ij} = \lim_{A_i \rightarrow 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta A_i}$$

Stress tensor

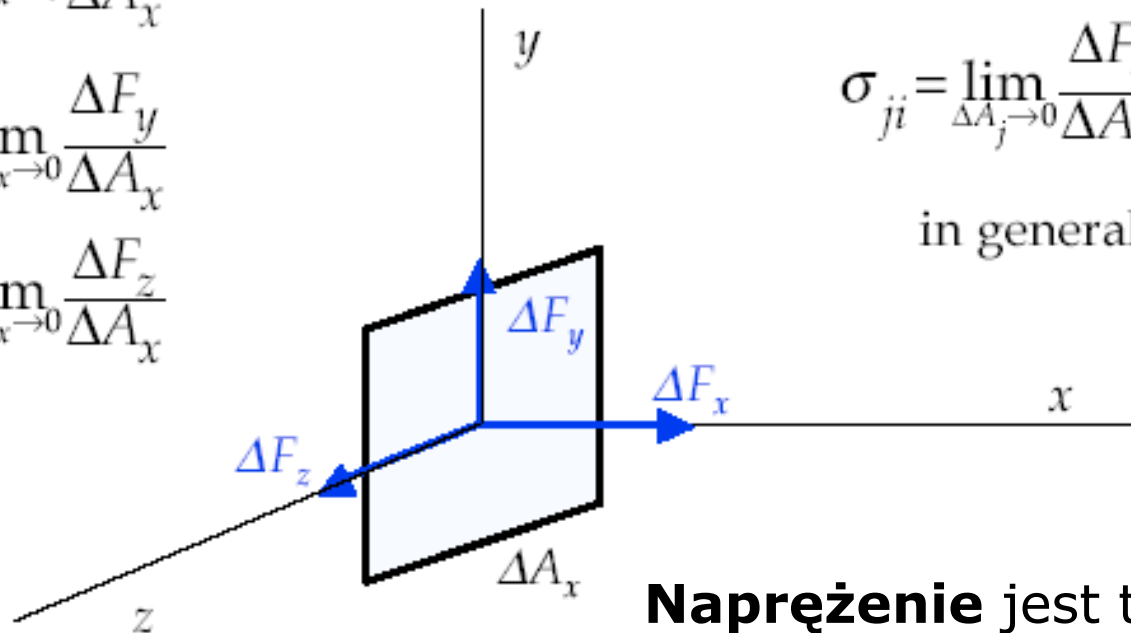
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x}$$

$$\sigma_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_x}$$

$$\sigma_{xz} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_x}$$



$$\sigma_{ji} = \lim_{\Delta A_j \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A_j}$$

in general

$$\sigma_{ij} = \lim_{A_i \rightarrow 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta A_i}$$

**Naprężenie** jest to graniczna wartość stosunku siły działającej na nieskończenie mały element pola przekroju ciała do wymiaru tego pola.

The state of stress at a point according to a "reference coordinate" is (9 components)

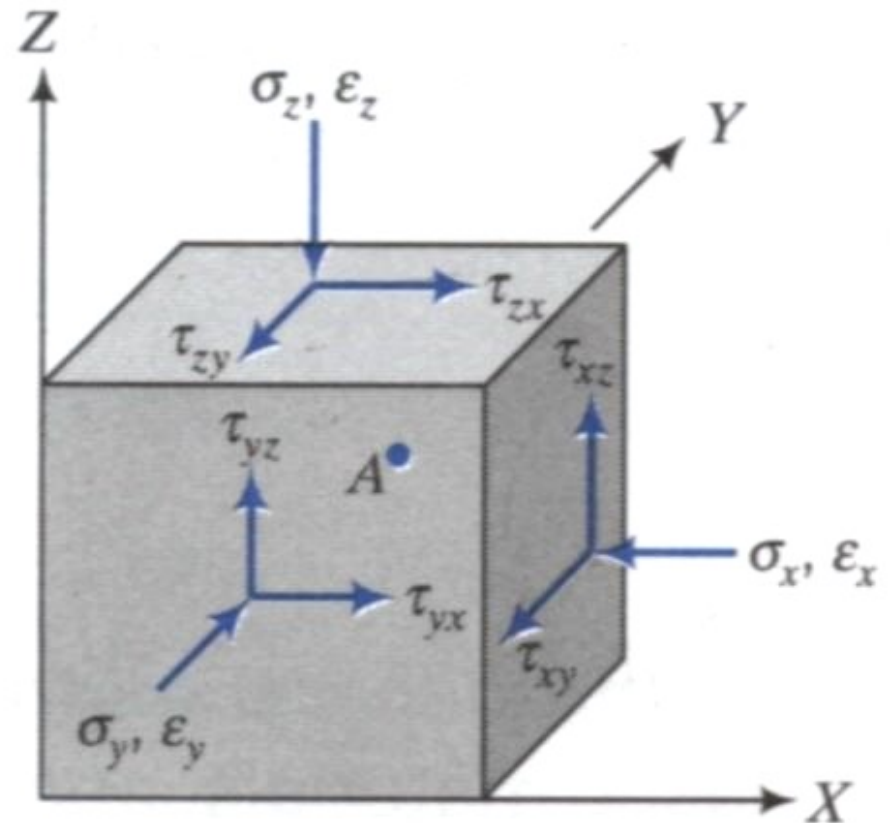
$$\sigma_{11} = \sigma_{xx} = \sigma_x$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{yy} = \sigma_y$$

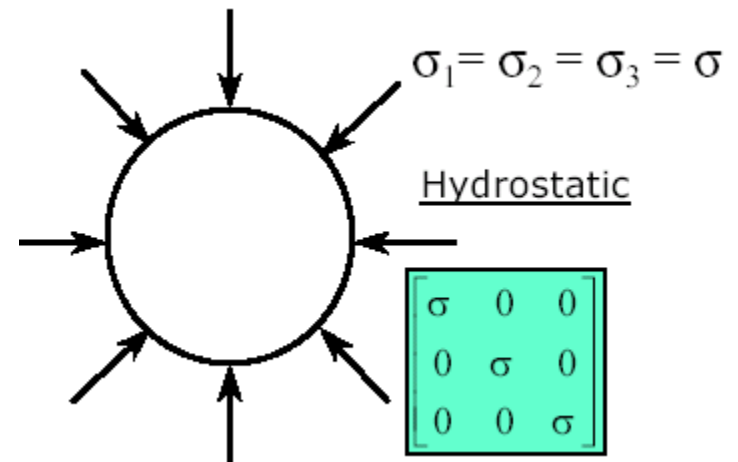
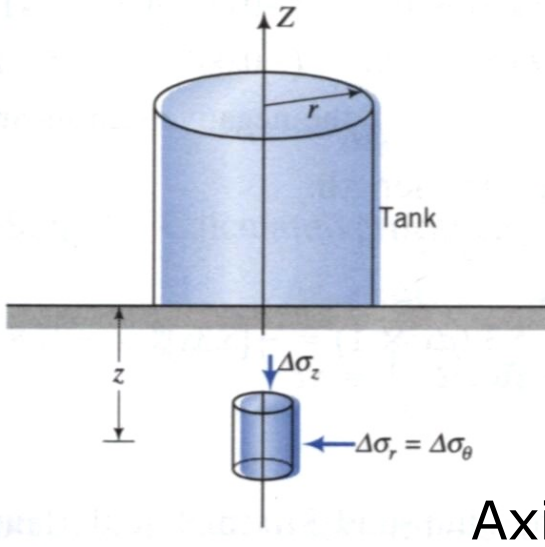
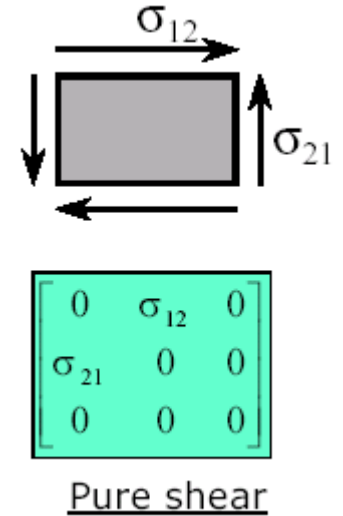
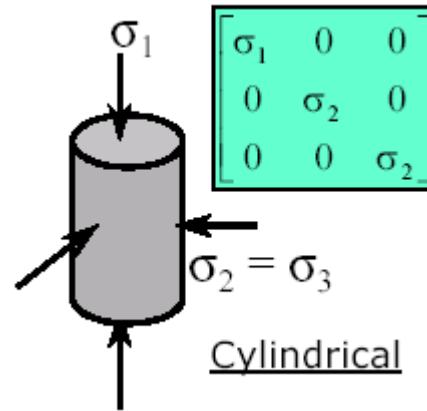
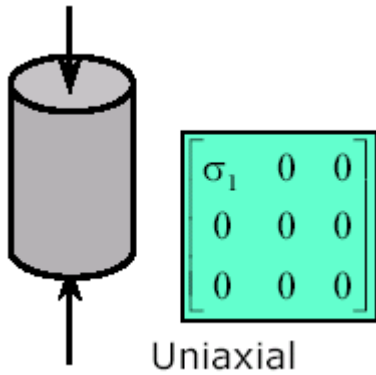
$$\sigma_{12} = \sigma_{xy} = \tau_{xy} = -\tau_{yx}$$

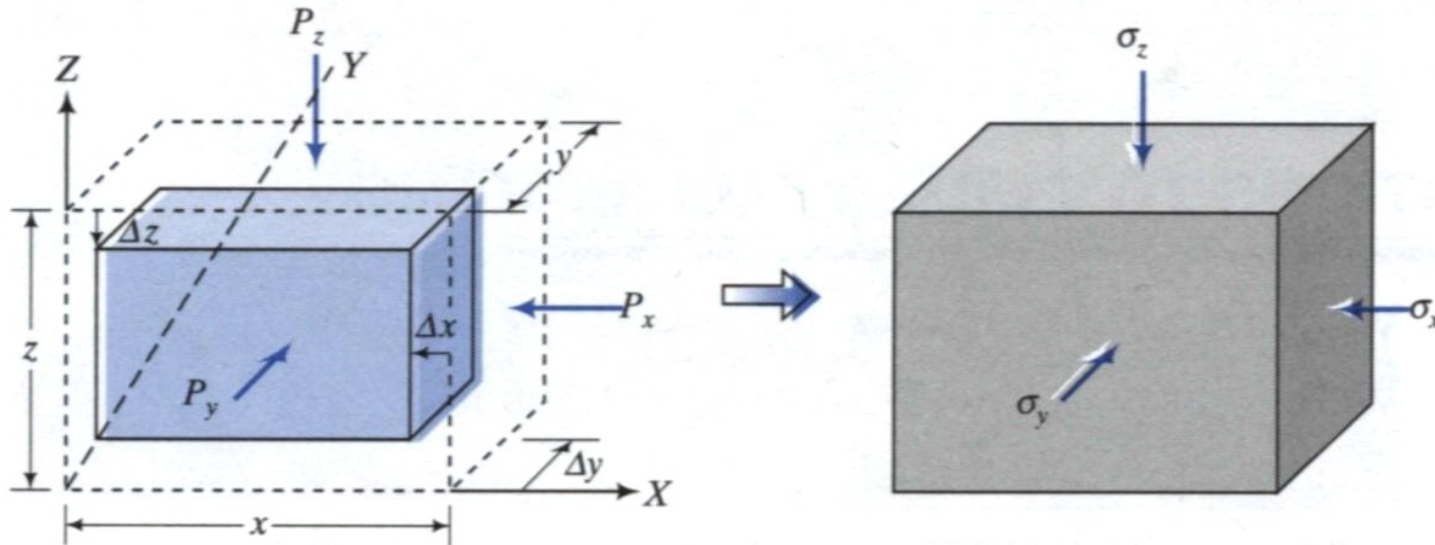
$$\sigma_{13} = \sigma_{xz} = \tau_{xz} = -\tau_{zx}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{yz} = \tau_{yz} = -\tau_{zy}$$



## States of stress





Stresses and displacements due to applied loads.

## Normal stresses and strains

$$\sigma_z = \frac{P_z}{xy}, \quad \sigma_x = \frac{P_x}{yz}, \quad \sigma_y = \frac{P_y}{xz}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\Delta z}{z}, \quad \varepsilon_x = -\frac{\Delta x}{x}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\Delta y}{y}$$

## Volumetric strain

Assume the initial volume is  $V_0 = 1$ , so the final volume is:

$$V_f = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_f - V_0}{V_0} = \frac{V_f}{V_0} - 1$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z \\ &\approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \text{ (small strains)}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$



## Hooke's law

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

## Shear modulus

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

## Bulk modulus

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2G + 6K}$$

## Typical Values of $E$ and $G$

Soil type	Description	$E^*$ (MPa)	$G^*$ (MPa)
Clay	Soft	1–15	0.5–5
	Medium	15–30	5–15
	Stiff	30–100	15–40
Sand	Loose	10–20	5–10
	Medium	20–40	10–15
	Dense	40–80	15–35

## Hooke's law in 3D

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

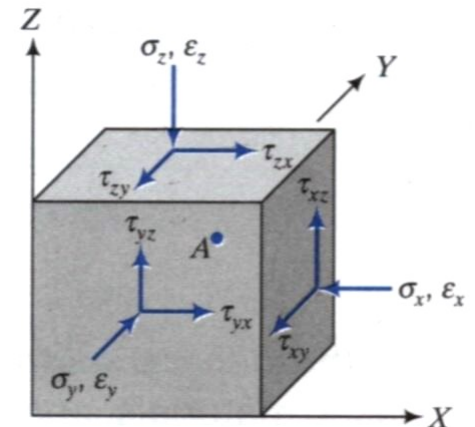
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

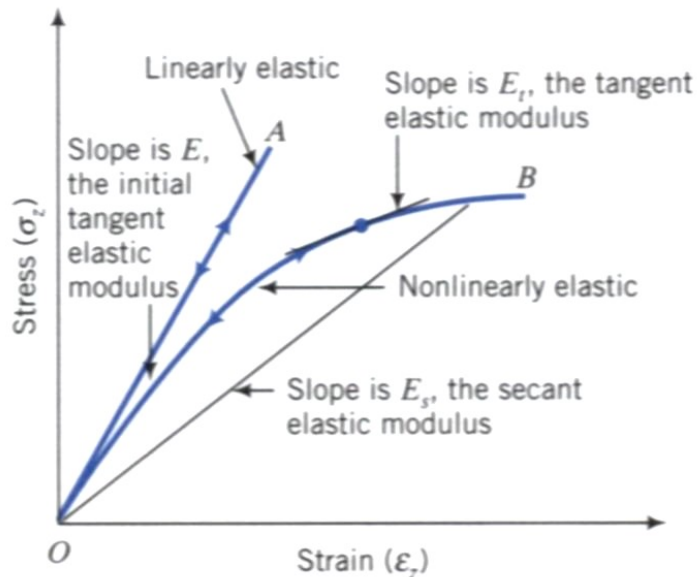
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x))$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

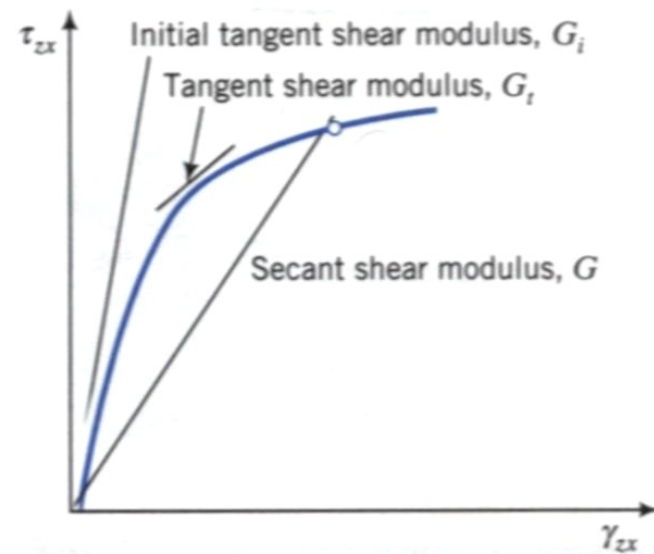


Elastic materials obey the principle of superposition.

The applied loading order is not important and the equilibrium strain is the same.

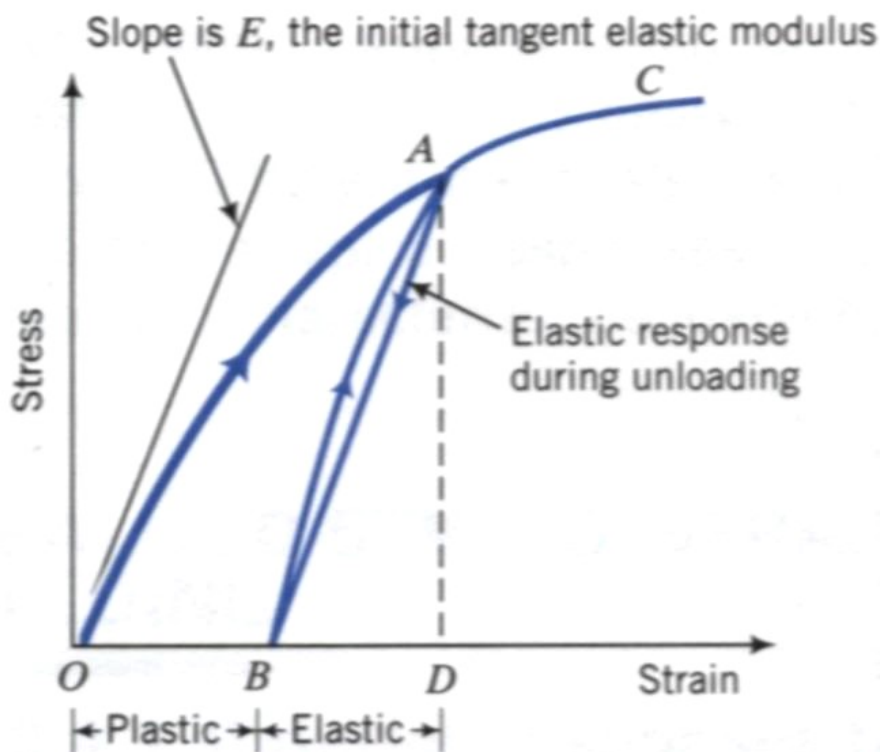


$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$



$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

Soils are elasto-plastic materials actually,  
(elastic deformation + plastic deformation)



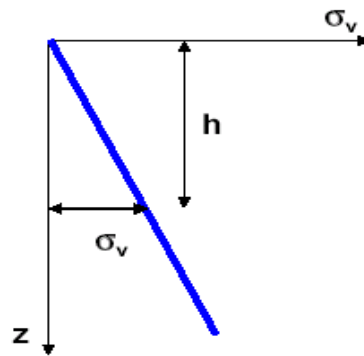
## Vertical stress

### Vertical stress in soil

- Vertical stress,  $\sigma_v$  in assembly of particles

$$\sigma_v = \rho_{soil} gh = \gamma_{soil} h$$

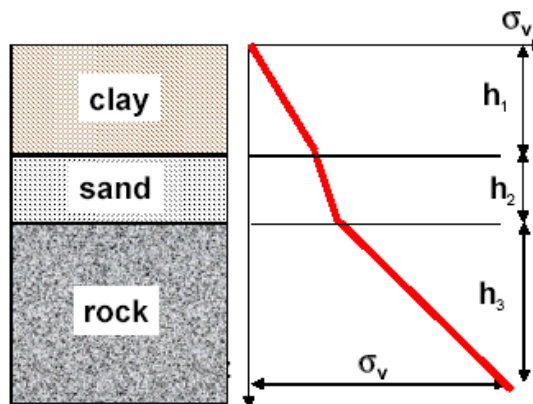
$$\sigma_v = \gamma_i h_i$$



### Vertical stress in layered system

- Vertical overburden stress,  $\sigma_v$

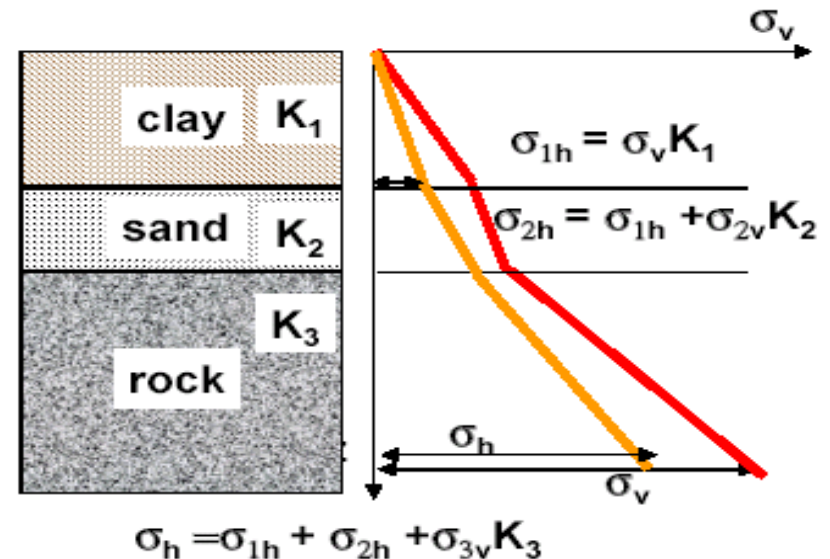
$$\sigma_v = \sum_{i=1}^n \rho_i gh_i$$



## Horizontal stress

$$\sigma_h = \sigma_v \cdot K$$

$K$  – lateral earth pressure coefficient



**Parciem spoczynkowym** nazywamy ciśnienie, które ośrodek gruntowy będący w stanie równowagi wywiera na ścianę oporową, przy jej zerowym przemieszczeniu. (Parcie to określa się wzorami definiującymi poziomą składową naprężenia mnożąc współczynnik parcia spoczynkowego  $K_0$  przez pionową składową naprężenia *in situ*  $\sigma_{v_0}'$ .)

**Wyznaczenia współczynnika parcia spoczynkowego  $K_0$**  dla gruntów normalnie skonsolidowanych

wzór Jaky'ego (1944):  $K_0 = 1 - \sin \phi'$

gdzie:  $\phi$  – kąt tarcia wewnętrznego gruntu

wzory Brookera i Ireland's'a:  $K_0 = 0.95 - \sin \phi$  lub

$$K_0 = 0.4 + 0.007I_p \quad \text{dla } I_p \text{ od } 0 \text{ do } 40,$$

$$K_0 = 0.64 + 0.001I_p \quad \text{dla } I_p \text{ od } 40 \text{ do } 40,$$

# Naprężenia i odkształcenia

## Boussinesq solution

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{3x^2 z}{R^5} - (1-2\nu) \left( \frac{x^2 - y^2}{Rr^2(R+z)} + \frac{y^2 z}{R^3 r^2} \right) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{3y^2 z}{R^5} - (1-2\nu) \left( \frac{y^2 - x^2}{Rr^2(R+z)} + \frac{x^2 z}{R^3 r^2} \right) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5}$$

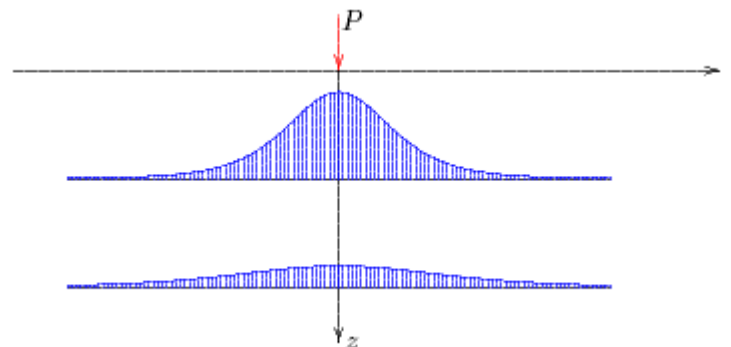
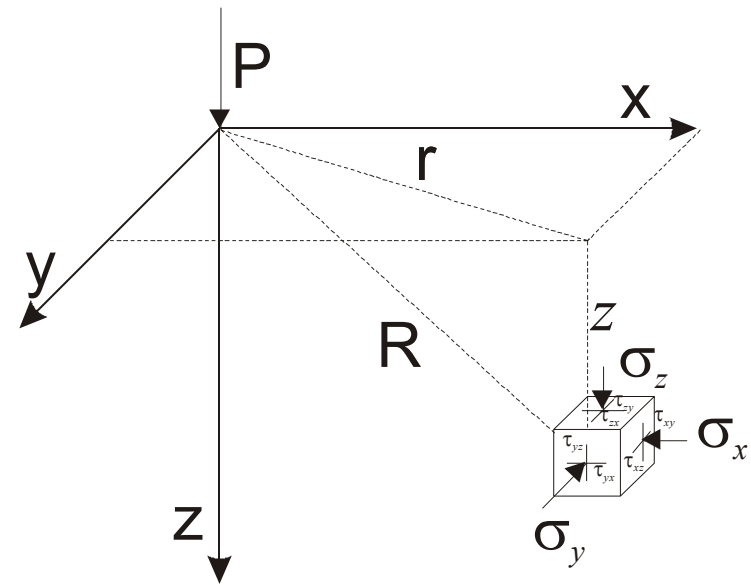
$$\tau_{zx} = -\tau_{xz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2 x}{R^5}$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{3xyz}{R^5} - (1-2\nu) \left( \frac{(2R+2)xy}{(R+z^2)R^3} \right) \right]$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tau_{zy} = -\tau_{yz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2 y}{R^5}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



# Naprężenia i odkształcenia

Przykład: Znaleźć naprężenia w gruncie wywołane przyłożeniem siły skupionej równej  $P = 50 \text{ kN}$  w punkcie o współrzędnych  $x = 3\text{m}$ ,  $y = 0\text{m}$ ,  $z = 4\text{m}$ ;  $\nu = 0.3$ .

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{3x^2 z}{R^5} - (1 - 2\nu) \left( \frac{x^2 - y^2}{Rr^2(R+z)} + \frac{y^2 z}{R^3 r^2} \right) \right] = 0.266 \text{ kPa}$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{3y^2 z}{R^5} - (1 - 2\nu) \left( \frac{y^2 - x^2}{Rr^2(R+z)} + \frac{x^2 z}{R^3 r^2} \right) \right] = -0.031 \text{ kPa}$$

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5} = 0.49 \text{ kPa}$$

$$\tau_{zx} = -\tau_{xz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2 x}{R^5} = 0.367 \text{ kPa}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 3$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5$$

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{3xyz}{R^5} - (1 - 2\nu) \left( \frac{(2R + 2)xy}{(R + z^2)R^3} \right) \right] = 0$$

$$\tau_{zy} = -\tau_{yz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2 y}{R^5} = 0$$



# Naprężenia i odkształcenia Flamant's solution extension to line loads

$$\sigma_z = \frac{2Pz^3}{\pi(x^2 + z^2)^2}$$

$$\sigma_x = \frac{2Px^2z}{\pi(x^2 + z^2)^2}$$

$$\sigma_y = \frac{2P\nu}{\pi(x^2 + z^2)}$$

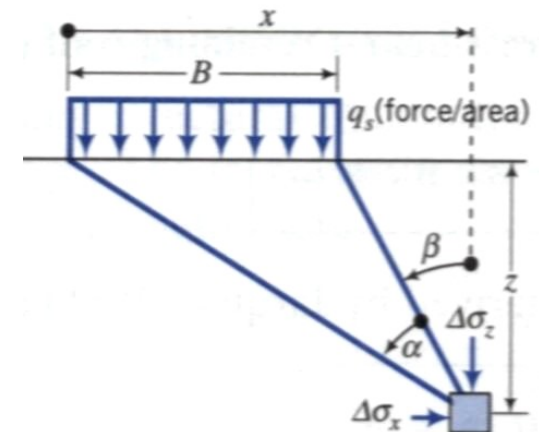
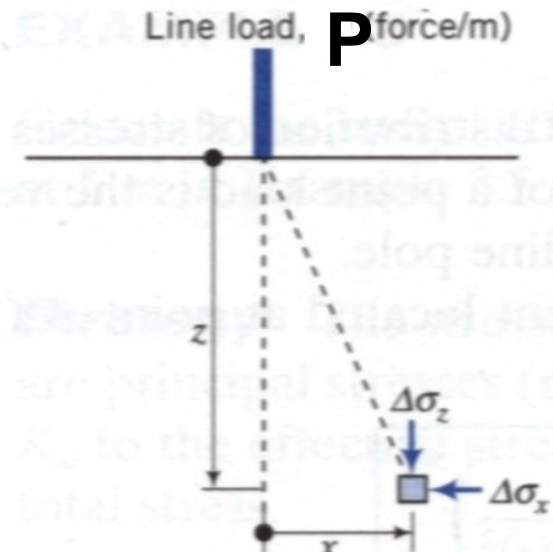
$$\tau_{xz} = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}$$

A **strip load** is the load transmitted by a structure of finite width and infinite length on a soil surface. The increase in stresses due to a surface stress  $q_s$  (force/area) is as follows:

$$\sigma_z = \frac{q_s}{\pi} [\alpha + \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta)]$$

$$\sigma_x = \frac{q_s}{\pi} [\alpha - \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta)]$$

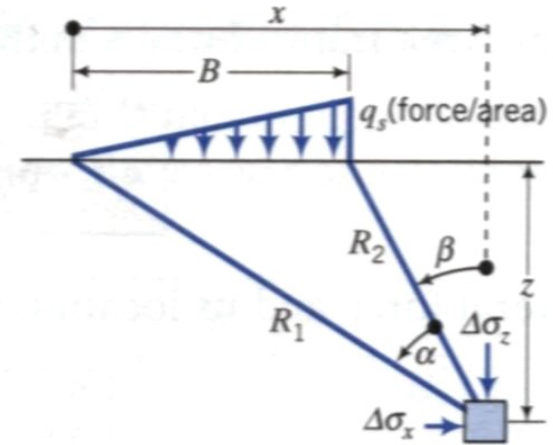
$$\tau_{zx} = \frac{q_s}{\pi} [\sin \alpha \cdot \sin(\alpha + 2\beta)]$$



$$\sigma_z = \frac{q_s}{\pi} \left[ \frac{x}{B} \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right]$$

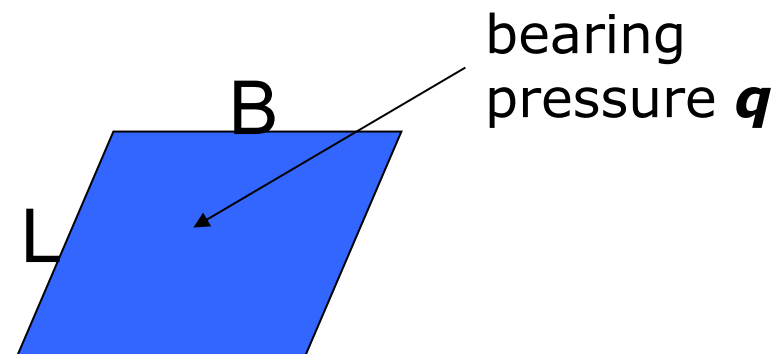
$$\sigma_x = \frac{q_s}{\pi} \left[ \frac{x}{B} \alpha - \frac{z}{B} \ln \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right]$$

$$\tau_{zx} = \frac{q_s}{2\pi} \left[ 1 + \cos 2\beta - 2 \frac{z}{B} \alpha \right]$$



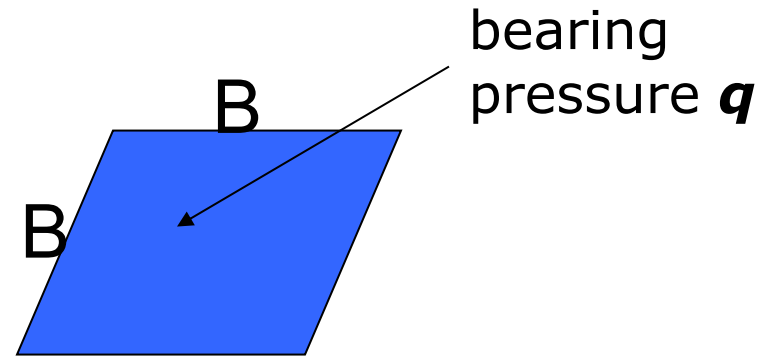
Simplified solution for rectangular loaded areas beneath the centre of the loaded area

$$\sigma_z = q \left( 1 - \frac{1}{1 + \left( \frac{B}{2z} \right)^{1.38 + 0.62 \frac{B}{L}}} \right)^{2.6 - 0.84 \frac{B}{L}}$$



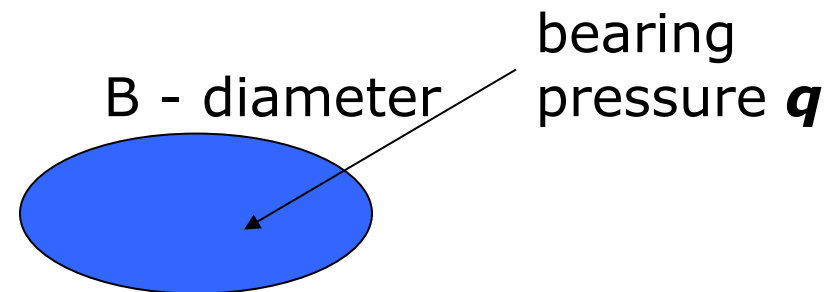
Simplified solution for square loaded areas beneath the centre of the loaded area

$$\sigma_z = q \left( 1 - \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{B}{2z} \right)^2} \right)^{1.76} \right)$$



Simplified solution for circular loaded areas beneath the centre of the loaded area

$$\sigma_z = q \left( 1 - \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{B}{2z} \right)^2} \right)^{1.50} \right)$$

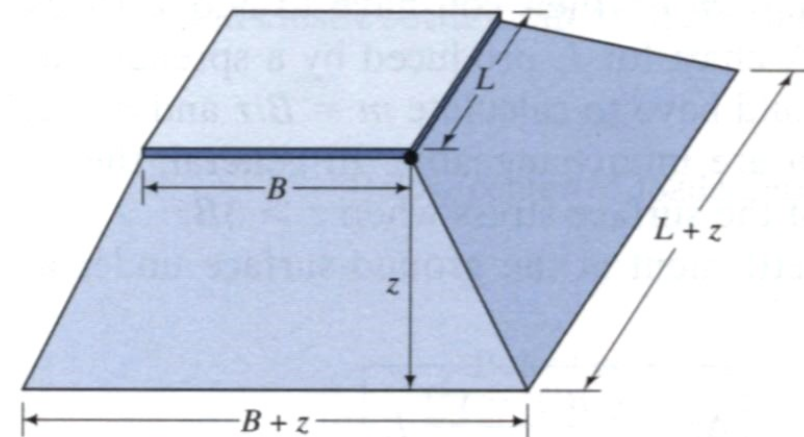


Simplified solution for continuous loaded areas (strip loads) of width  $B$  and infinite length beneath the centre of the loaded area

$$\sigma_z = q \left( 1 - \frac{1}{1 + \left( \frac{B}{2z} \right)^{1.38}} \right)^{2.6}$$

In preliminary analyses of vertical stress increase under the center of rectangular loads, geotechnical engineers often use an approximate method (sometimes called the 2:1 method). The vertical stress increase under the center of the load is:

$$\sigma_z = \frac{q_s BL}{(B + z)(L + z)}$$



The approximate method is reasonably accurate (compared with Boussinesq's elastic solution) when  $z > B$

Chart solutions for rectangular and circular loaded area - pressure bulbs (stress bulbs).

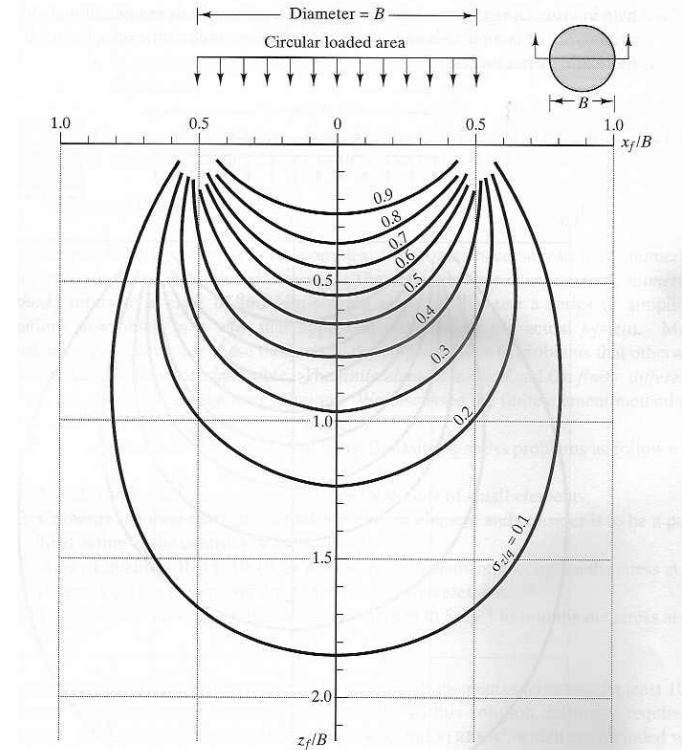
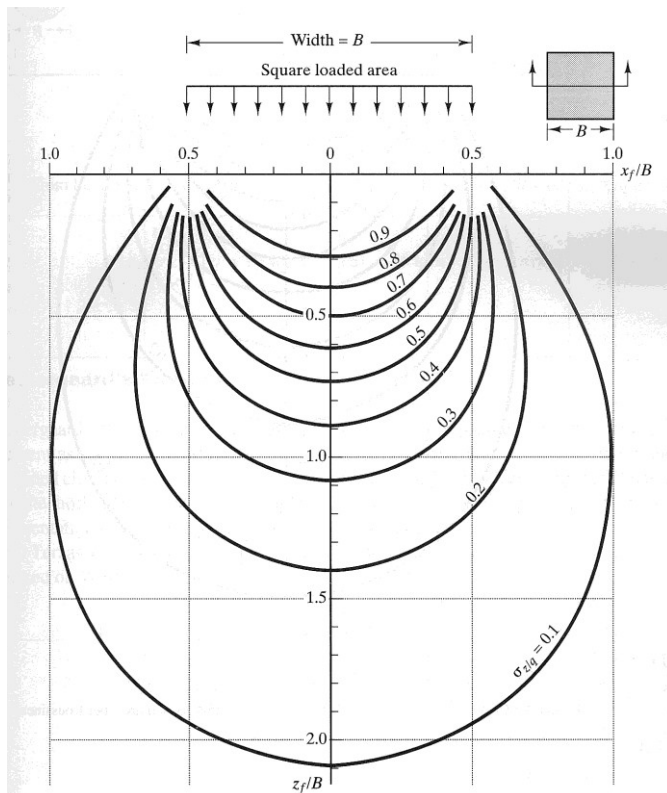
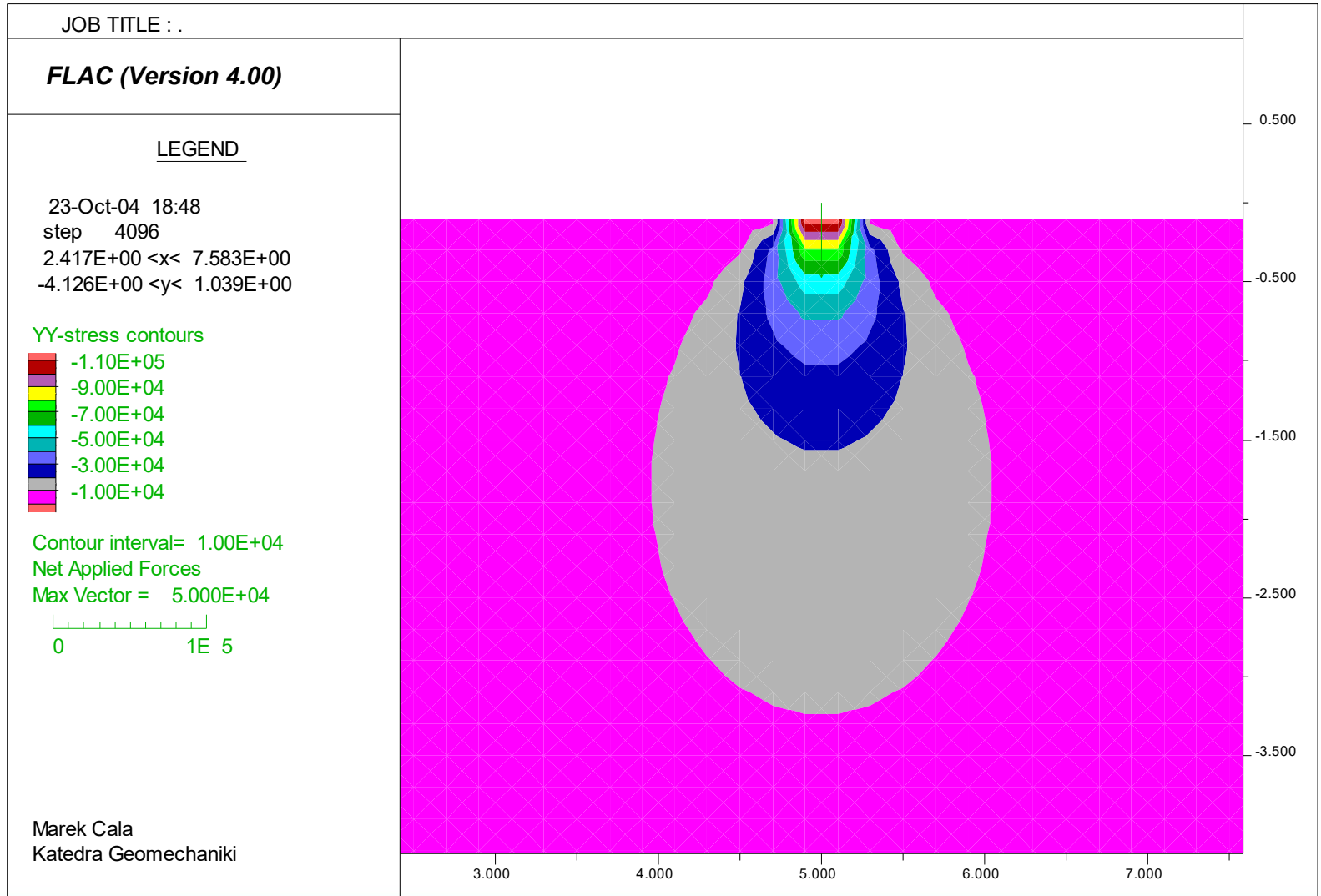


Figure 10.10 Vertical distribution of stress in soil under a square and circular loaded area.

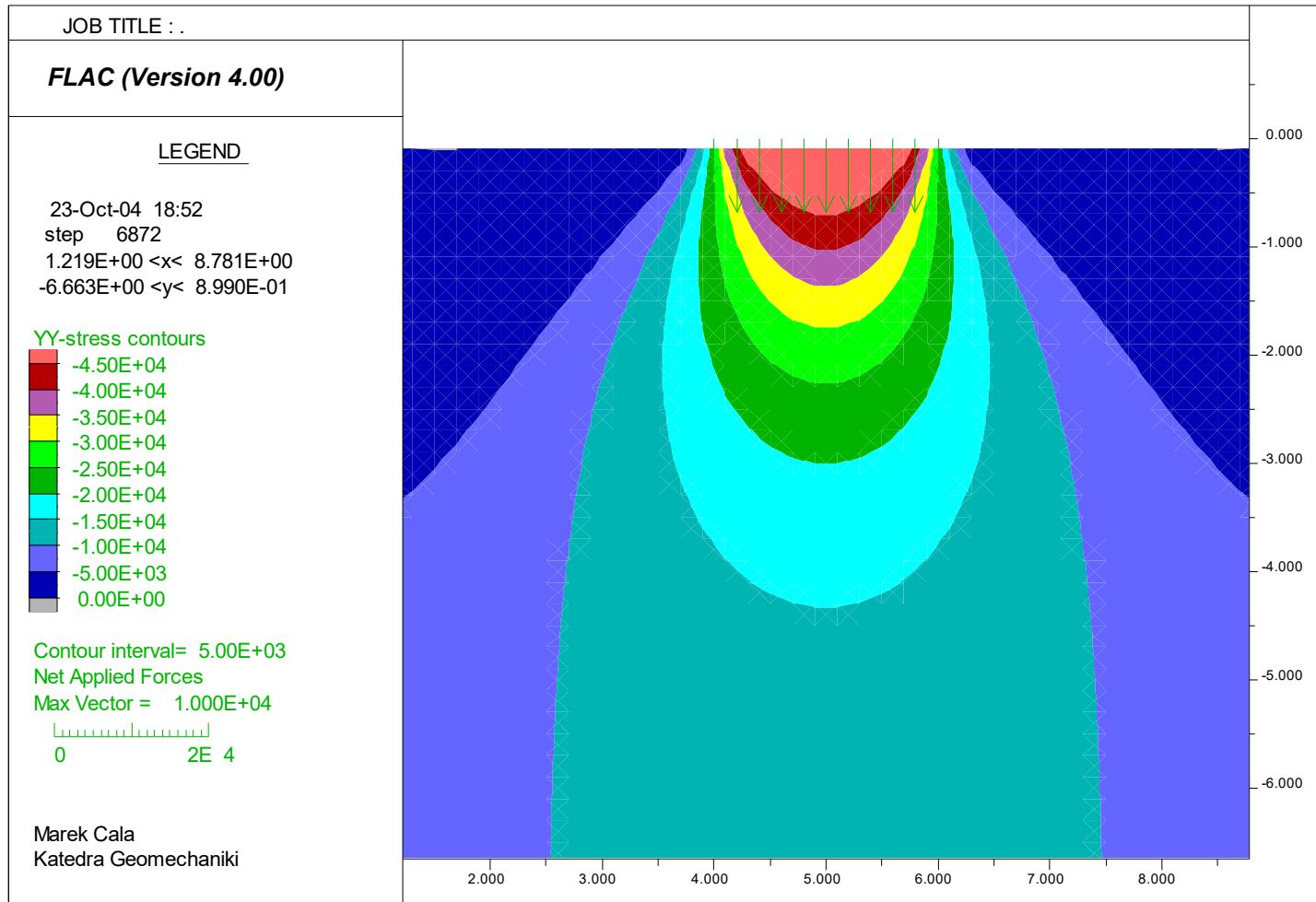
# Naprężenia i odkształcenia

Naprężenia pionowe wywołane siłą  $P = 50 \text{ kN}$ .



# Naprężenia i odkształcenia

Naprężenia pionowe wywołane obciążeniem ciągłym  
 $q = 50 \text{ kN/m}$  o szerokości 2 m



# Wytrzymałość różnych materiałów

Metal



$R_r$

Beton



$R_c$

Grunt

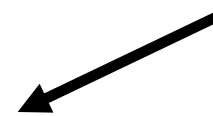


Opór ścinania



**Różne  
właściwości**

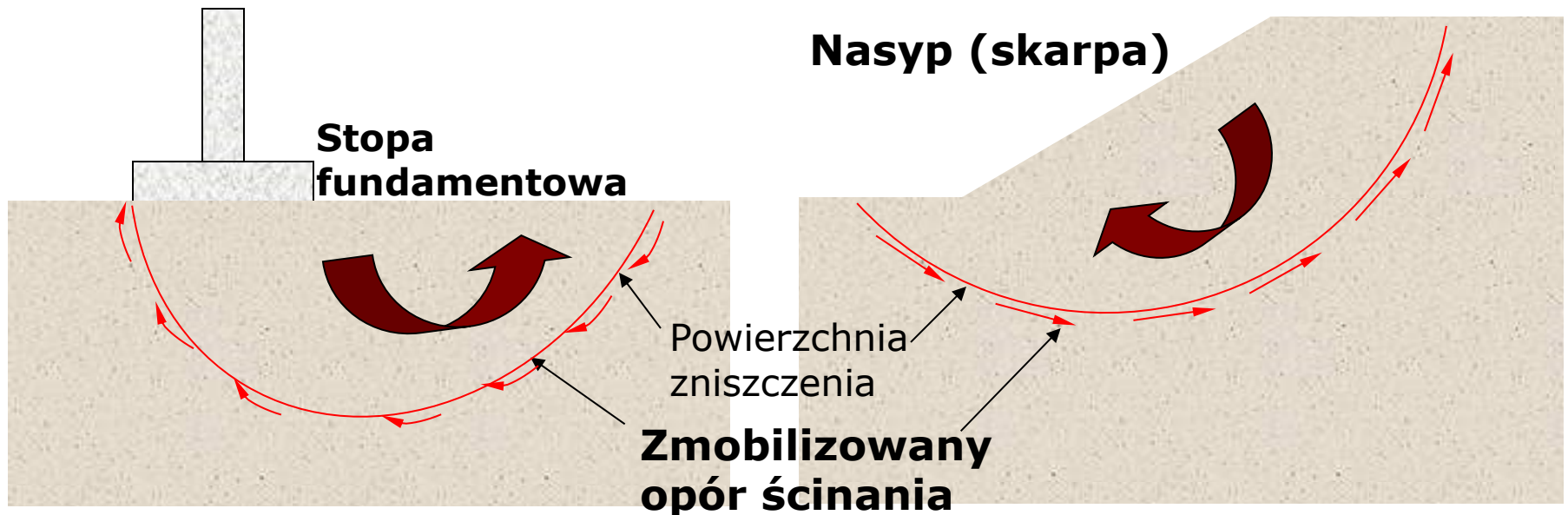
Obecność wody w porach





# Opór ścinania gruntów

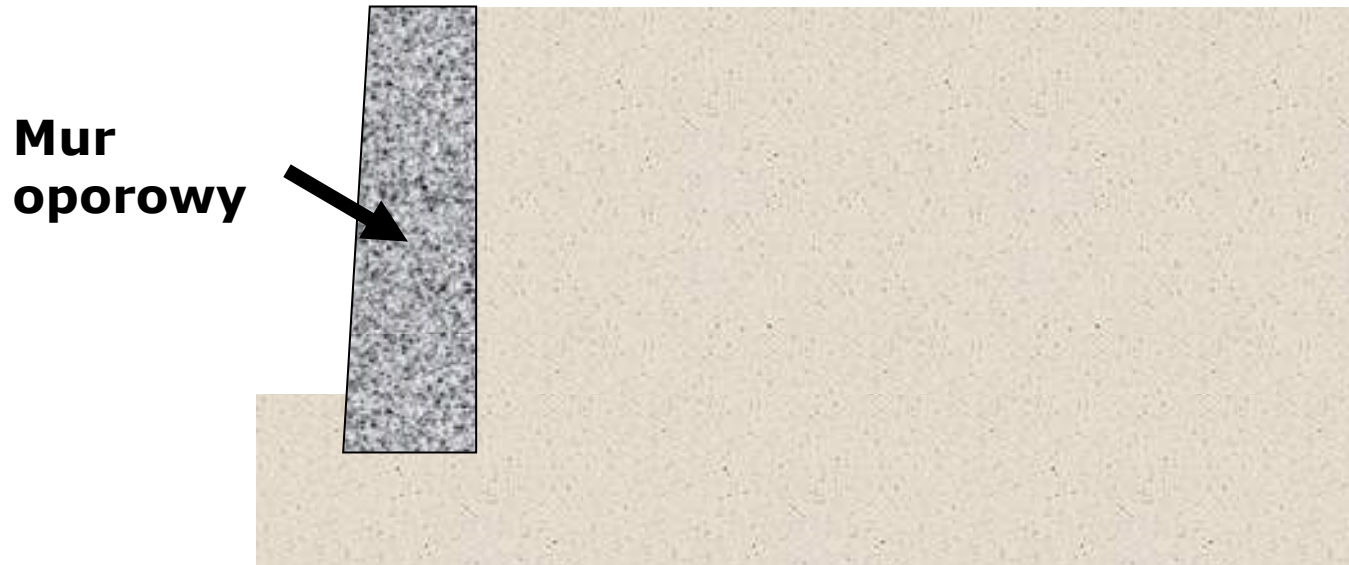
**Grunty w zasadzie niszczone są przez ścinanie**



**Zniszczenie wzdłuż powierzchni poślizgu zachodzi, gdy naprężenia styczne osiągną wartość oporu ścinania**

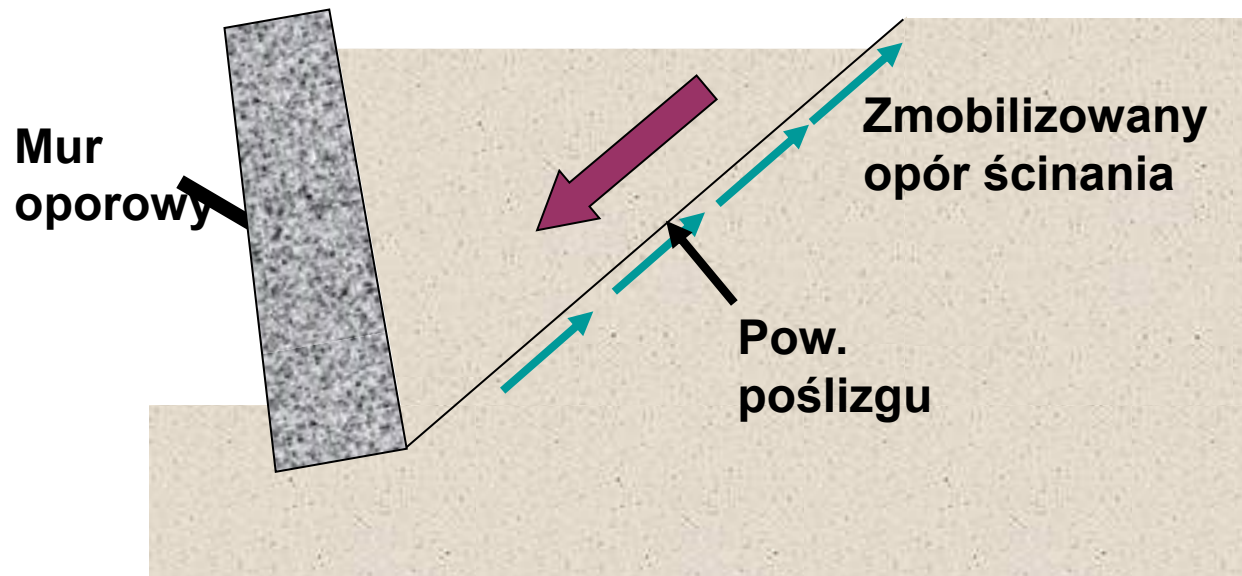
# Opór ścinania gruntów

Grunty w zasadzie niszczone są przez ścinanie



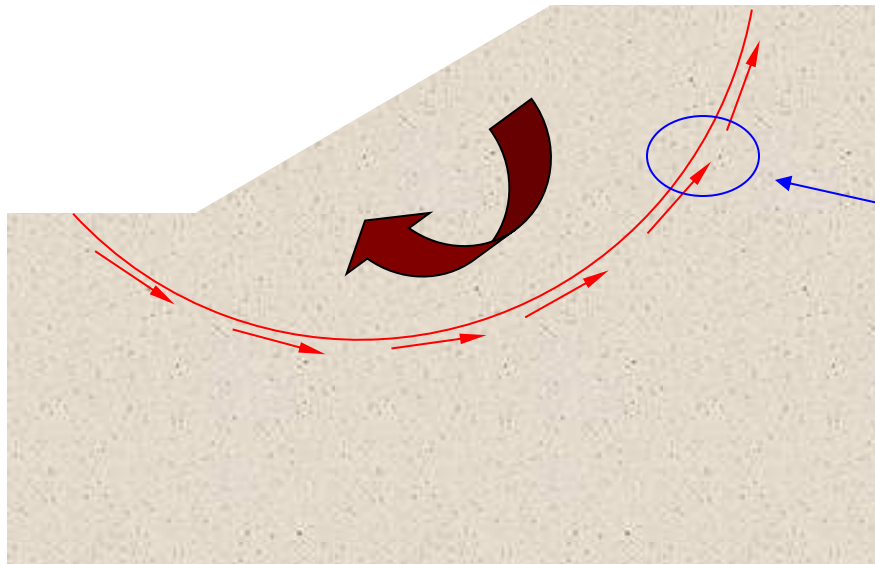
# Opór ścinania gruntów

Grunty w zasadzie niszczone są przez ścinanie



Zniszczenie wzdłuż powierzchni poślizgu zachodzi, gdy naprężenia styczne osiągną wartość oporu ścinania

# Opór ścinania gruntów

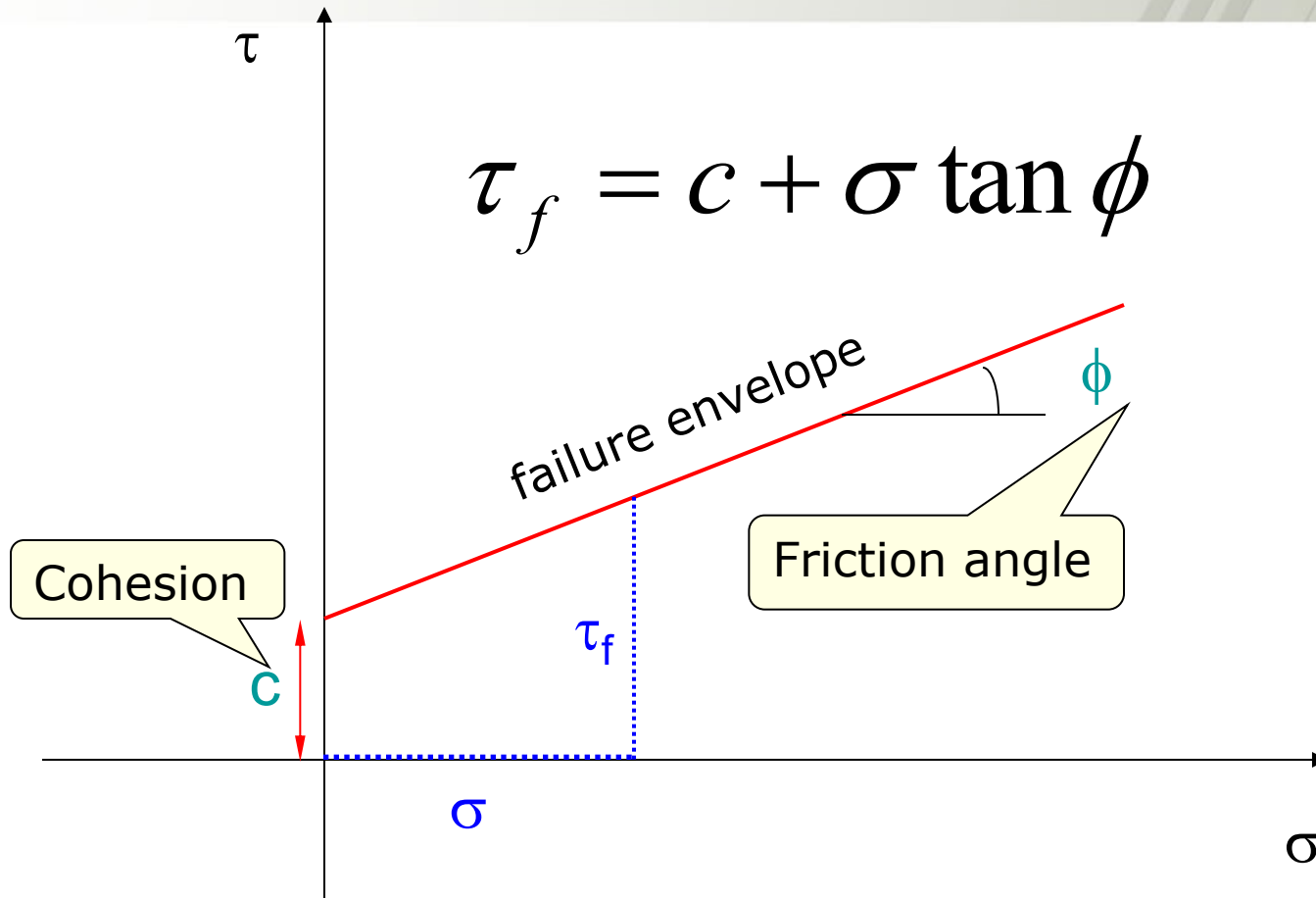


failure surface

The soil grains slide over each other along the failure surface.

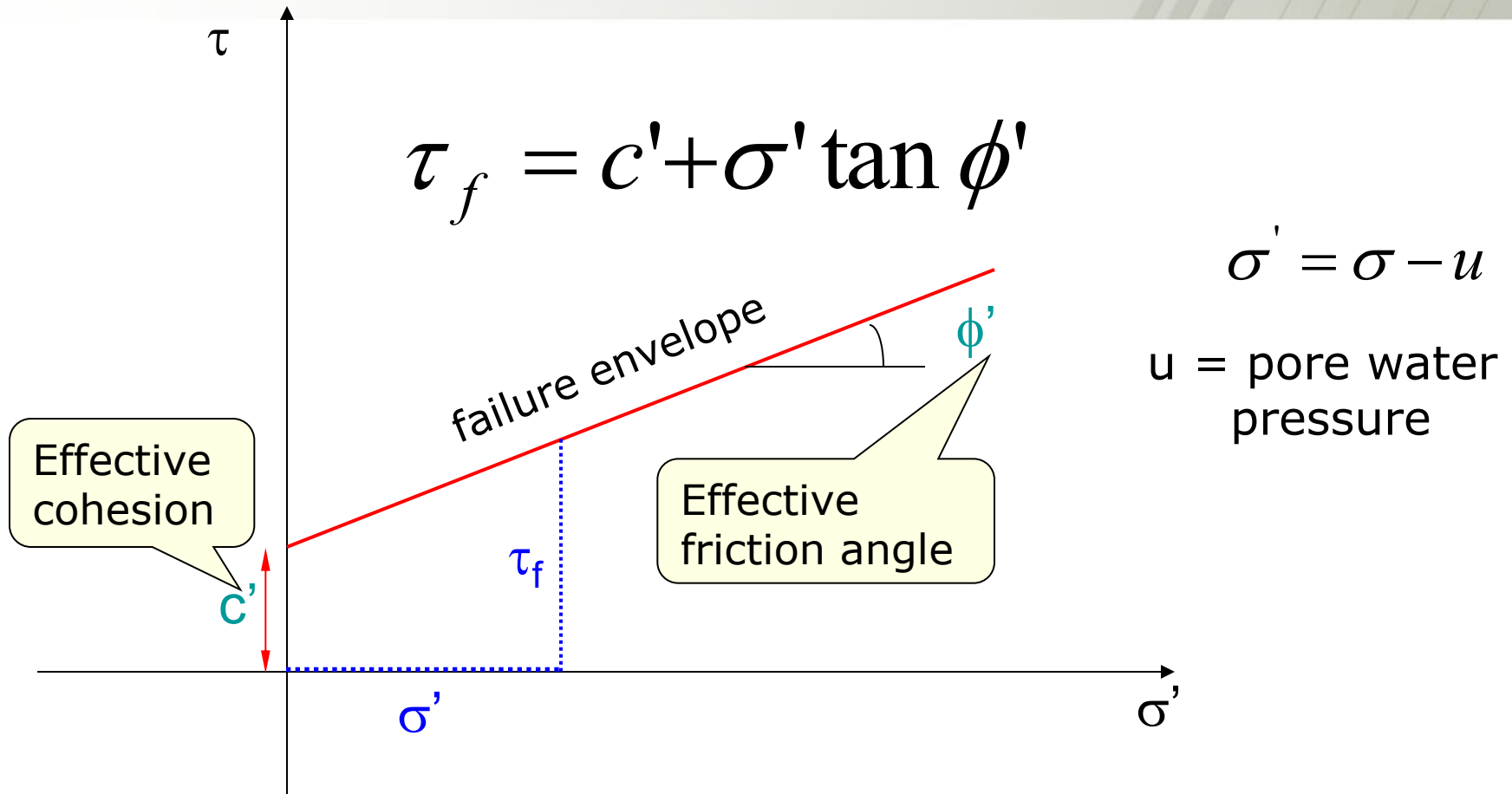
No crushing of individual grains.

# Mohr-Coulomb Failure Criterion (in terms of total stresses)



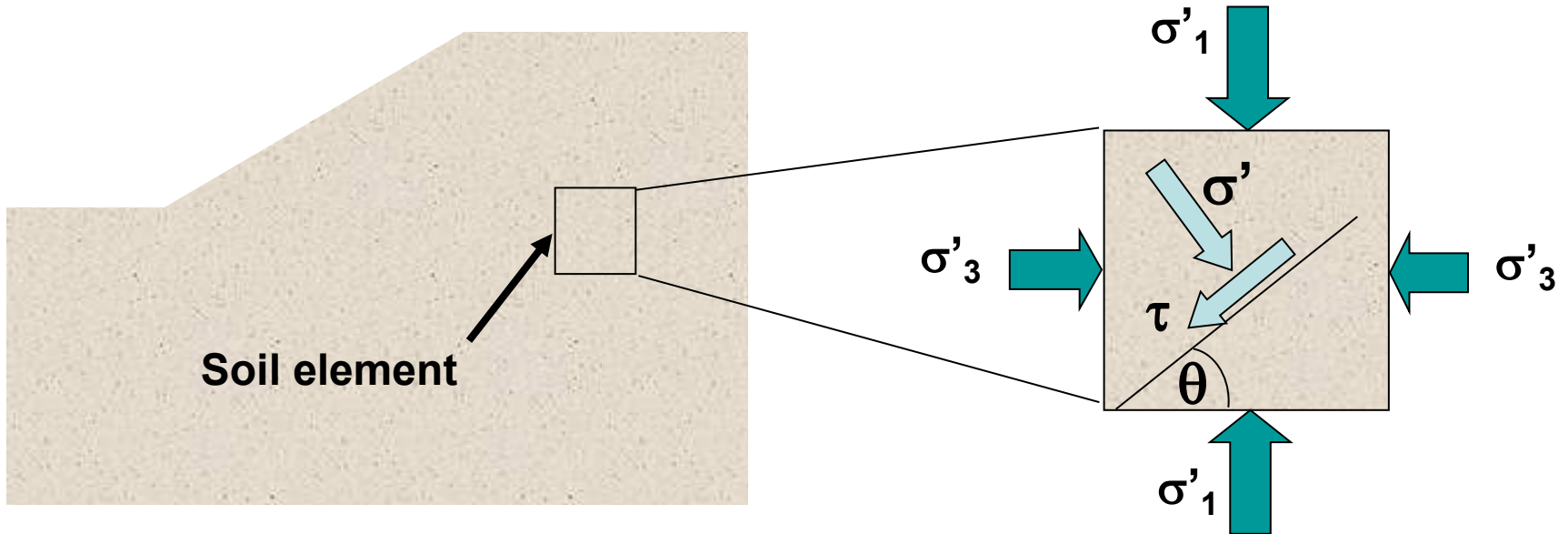
$\tau_f$  is the maximum shear stress the soil can take without failure, under normal stress of  $\sigma$ .

# Mohr-Coulomb Failure Criterion (in terms of effective stresses)



$\tau_f$  is the maximum shear stress the soil can take without failure, under normal effective stress of  $\sigma'$ .

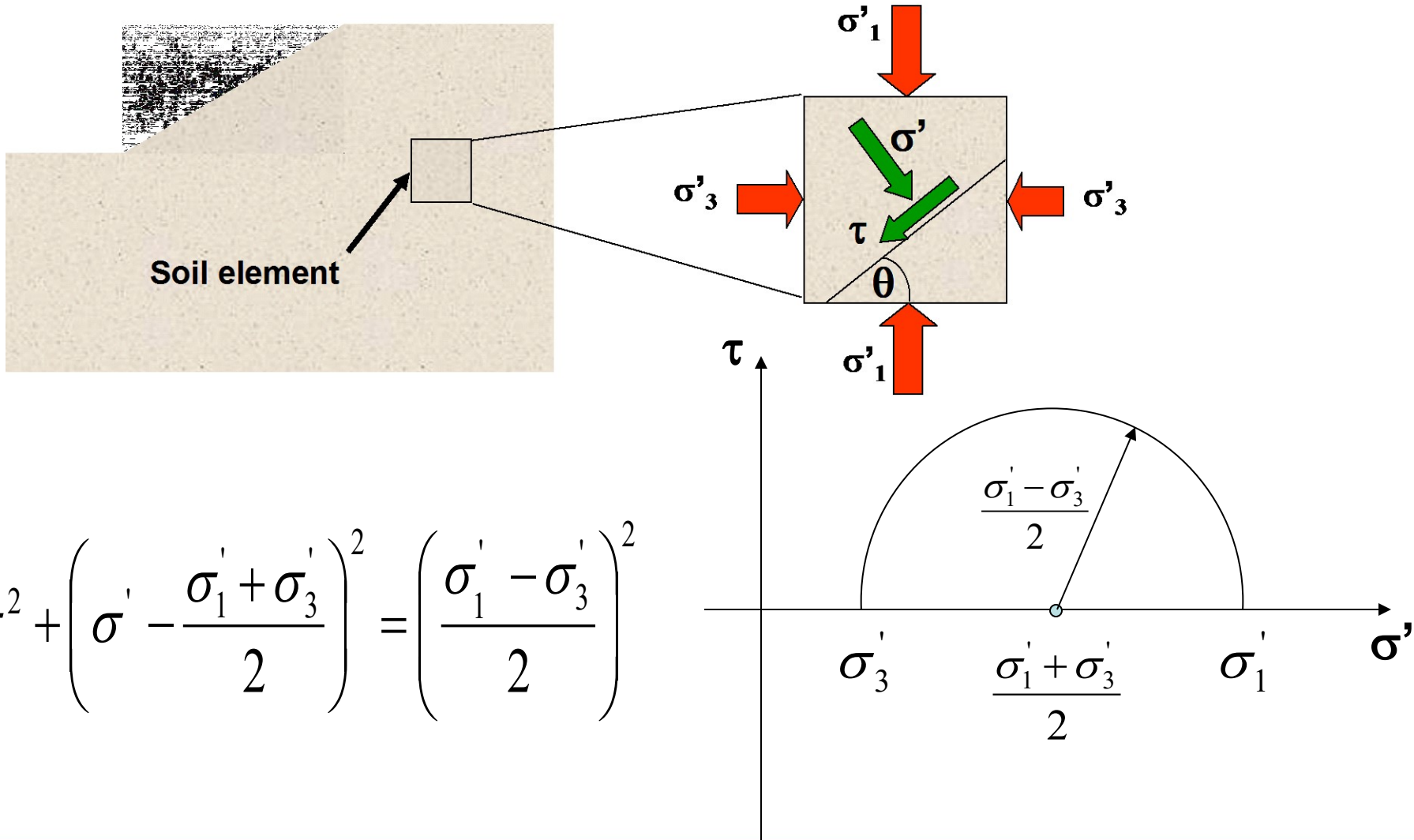
# Mohr Circle of stress



$$\tau = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \sin 2\theta$$

$$\sigma' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} + \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \cos 2\theta$$

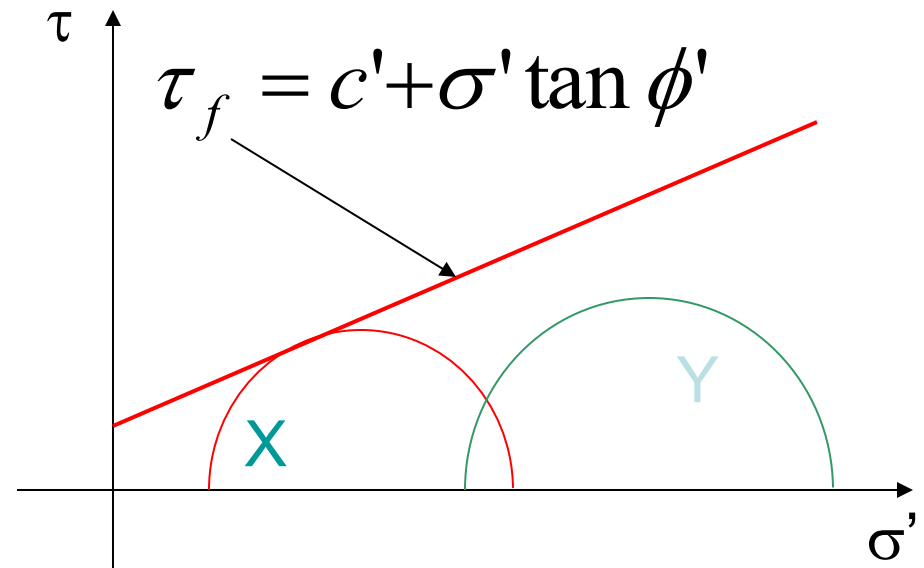
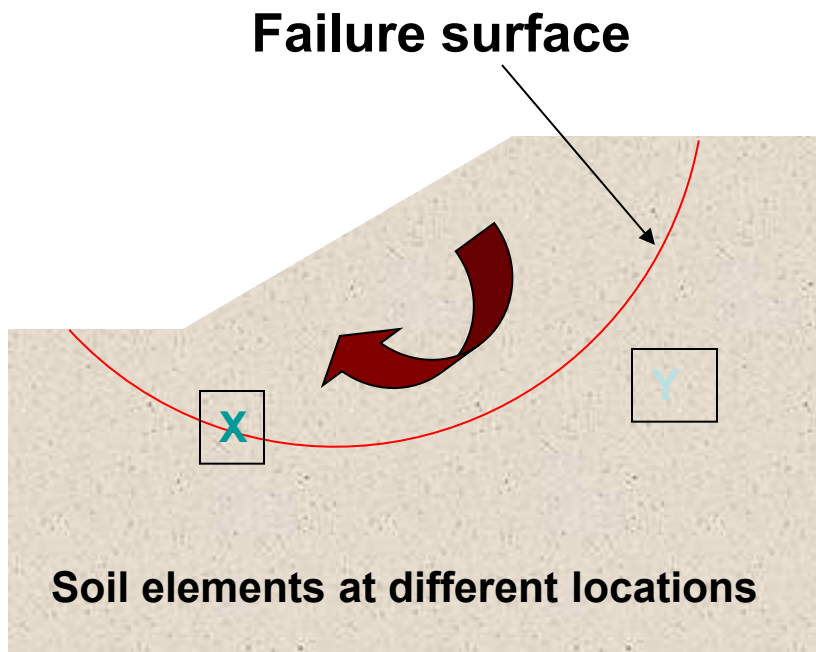
# Mohr Circle of stress



$$\tau^2 + \left( \sigma' - \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \right)^2$$



# Mohr Circles & Failure Envelope

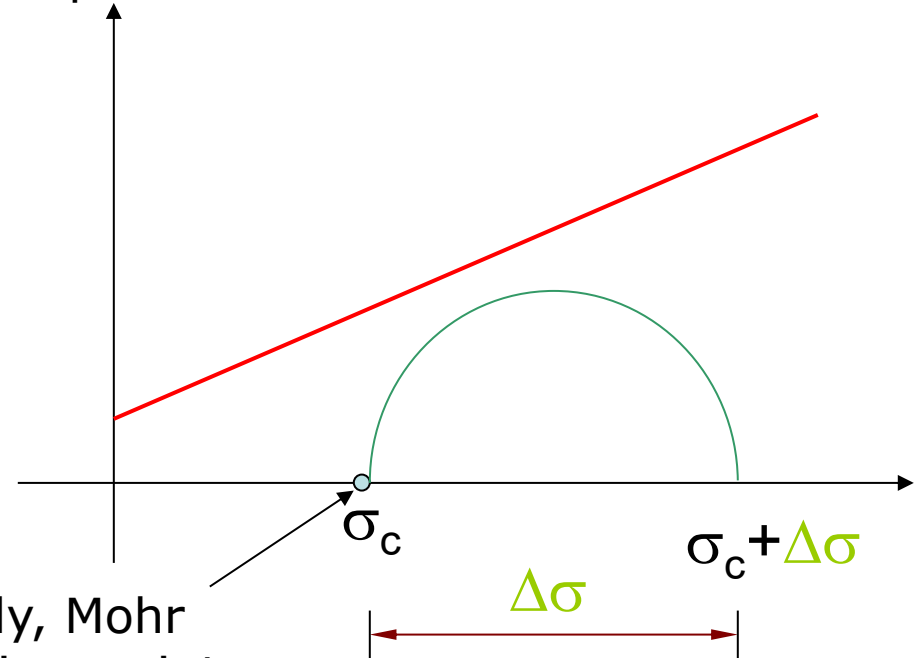
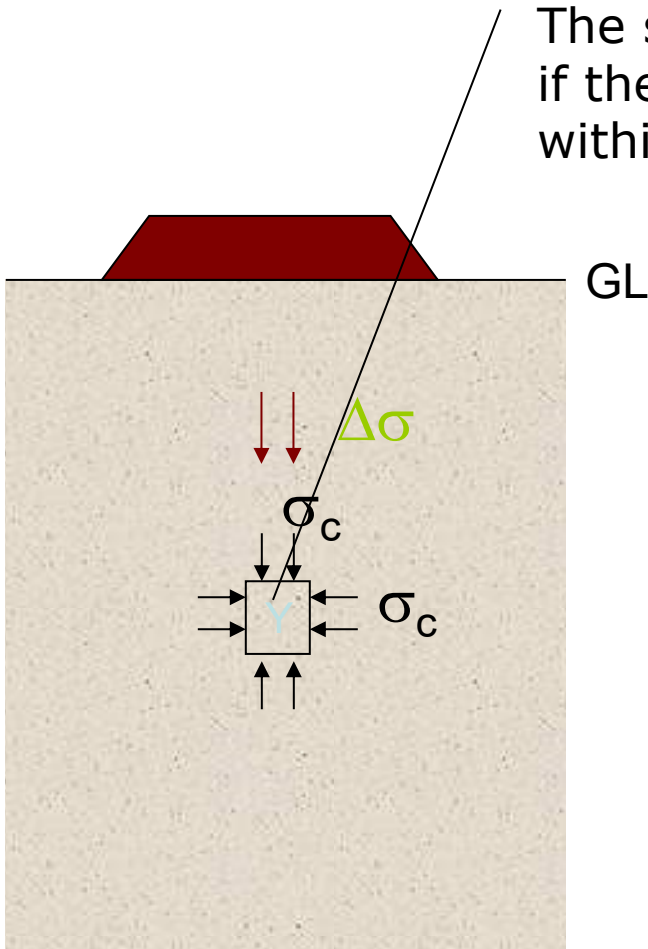


Y  $\sim$  stable

X  $\sim$  failure

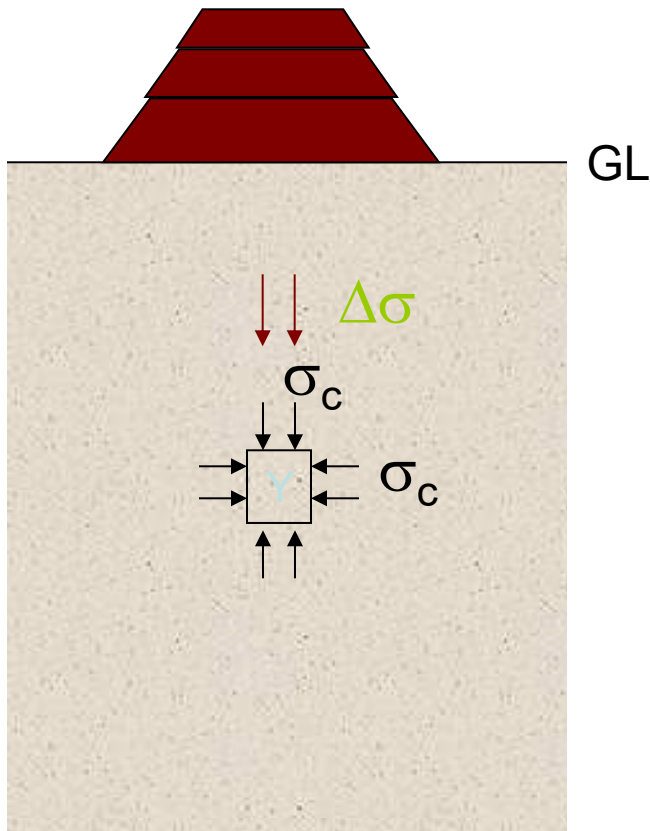
# Mohr Circles & Failure Envelope

The soil element does not fail if the Mohr circle is contained within the envelope

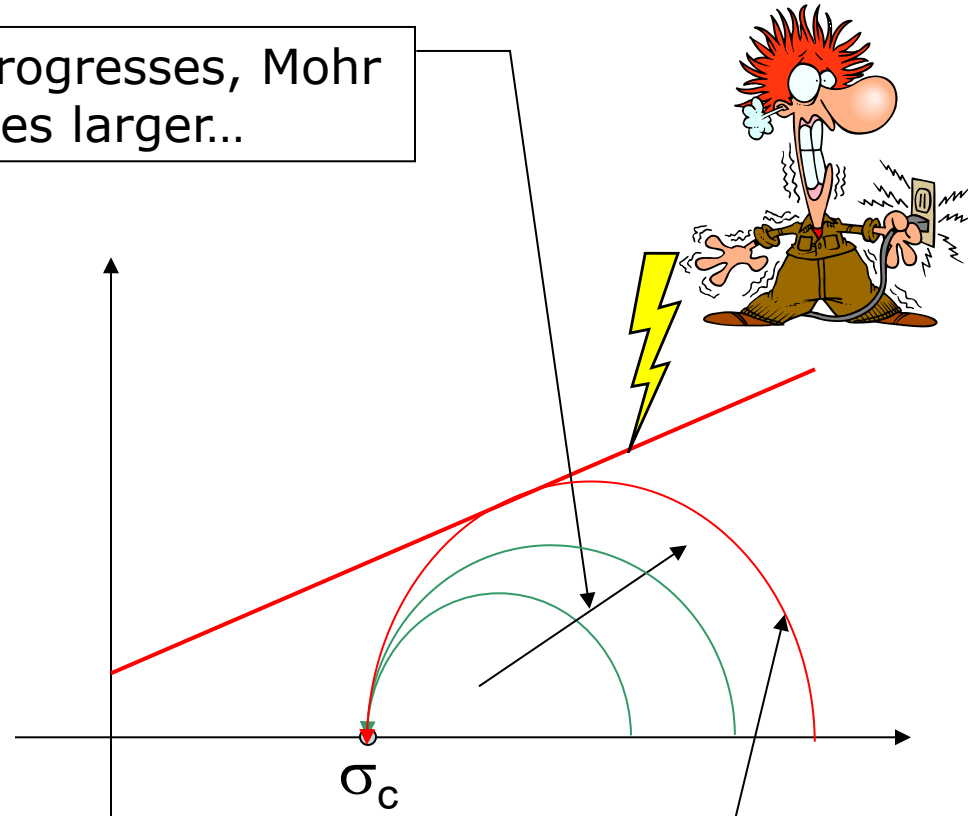


Initially, Mohr circle is a point

# Mohr Circles & Failure Envelope

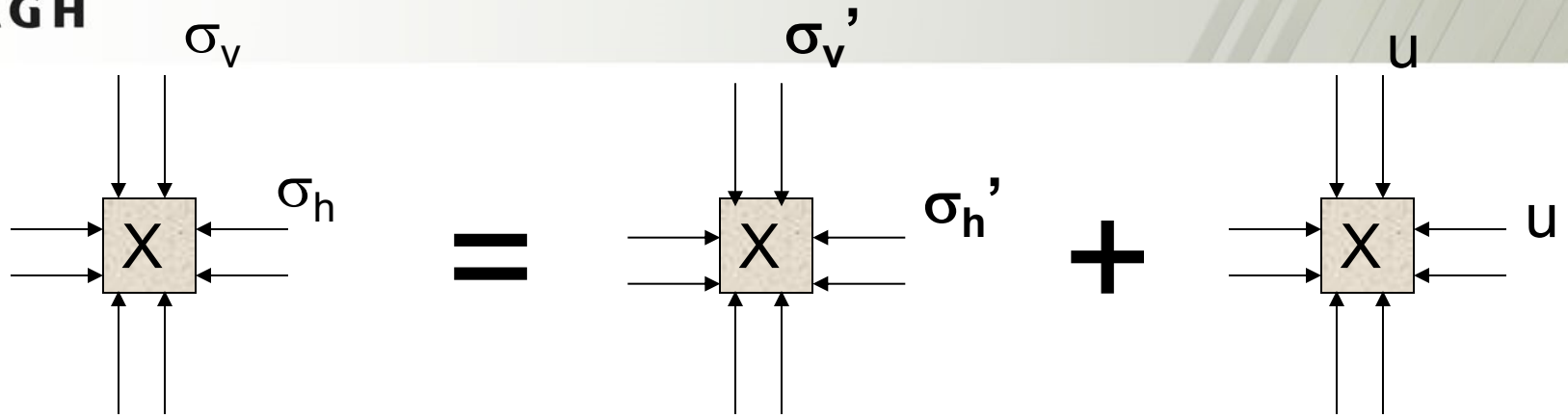


As loading progresses, Mohr circle becomes larger...

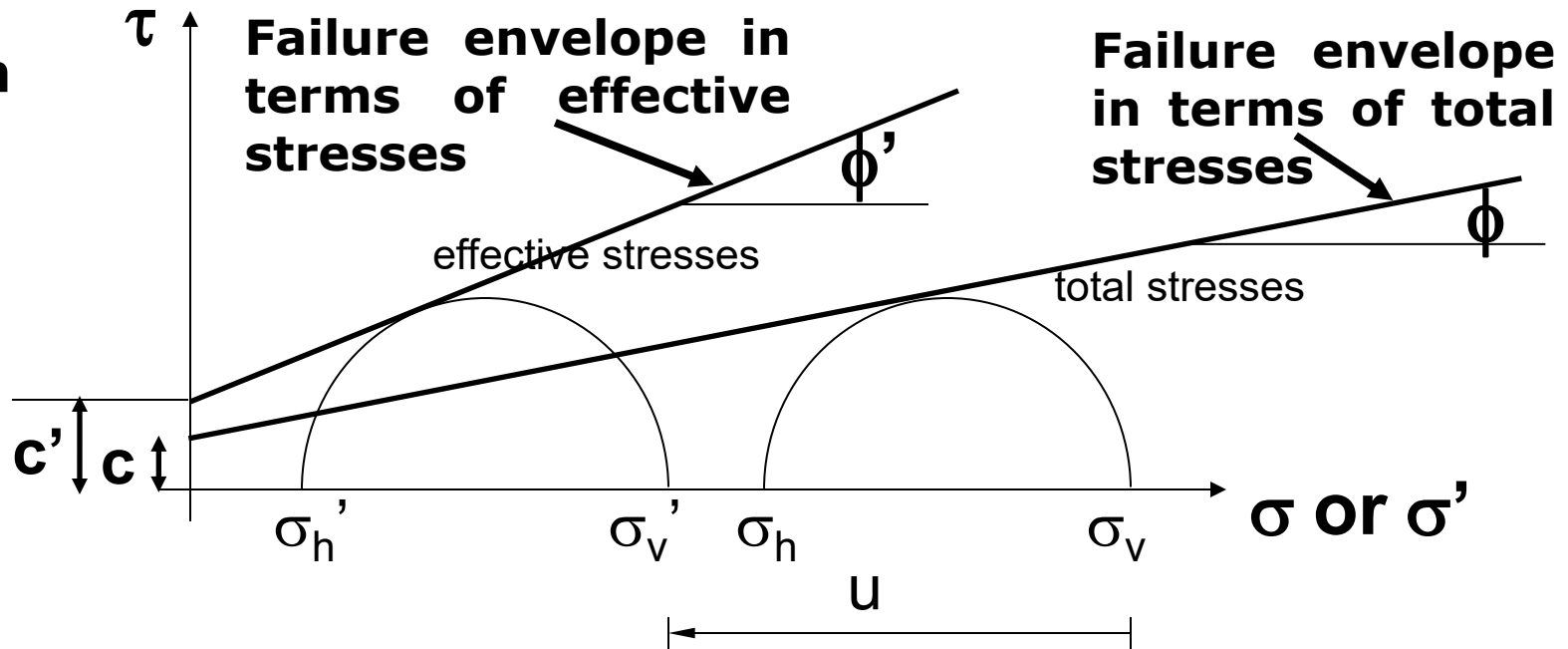


.. and finally failure occurs when Mohr circle touches the envelope

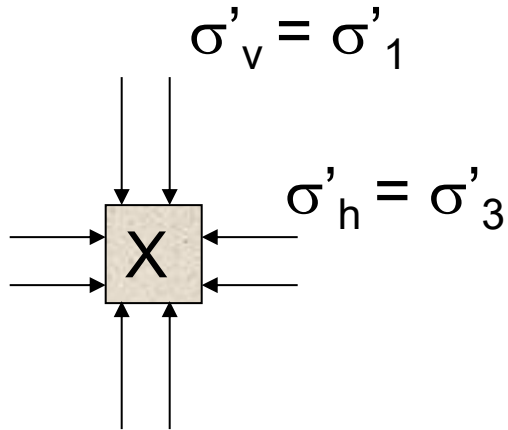
# Failure envelopes in terms of total & effective stresses



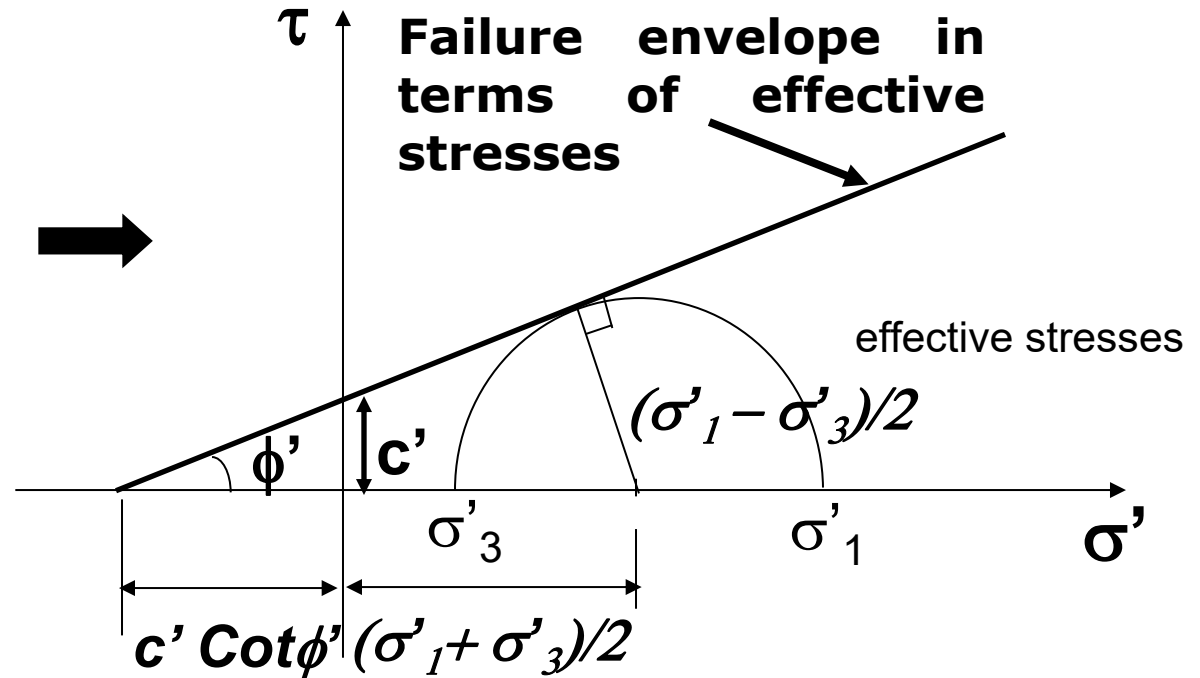
If X is on failure



# Mohr Coulomb failure criterion with Mohr circle of stress



**X is on failure**



$$\left[ c' \text{ Cot} \phi' + \left( \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \right) \right] \text{Sin} \phi' = \left( \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \right)$$