

# Izolatory topologiczne – niespodzianki ukryte w strukturze pasmowej izolatorów

Łukasz Cywiński

*Instytut Fizyki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa*

Tomasz Dietl

*Instytut Fizyki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa i Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Warszawski*

*Streszczenie:* Odkrycie niezwykle stabilnych (topologicznie chronionych) stanów brzegowych i powierzchniowych w izolatorach pasmowych z silnym oddziaływaniem spinowo-orbitalnym jest jednym z najciekawszych wydarzeń w fizyce materii skondensowanej ostatnich lat. Pięciu naukowców, którzy przyczynili się do rozwinięcia teorii tychże „izolatorów topologicznych” oraz jej doświadczalnego potwierdzenia, otrzymało w tym roku nagrodę Europejskiego Towarzystwa Fizycznego. W artykule staramy się przybliżyć podstawy fizyki izolatorów topologicznych, i omawiamy niektóre z najciekawszych zjawisk, których istnienie zostało przewidziane w tych materiałach.

---

## Topological insulators

– surprises hidden in the band structure of insulators

*Abstract:* The discovery of unusually stable (topologically protected) edge and surface states in band insulators having strong spin-orbit coupling is one of the most interesting recent developments in condensed matter physics. Five scientists who contributed to the theoretical development of the idea of „topological insulators” and to its experimental confirmation, were awarded the prize of the European Physical Society in this year. In the article we try to explain the basic ideas of the physics of topological insulators, and we discuss some of the most interesting phenomena which have been predicted to occur in these materials.

---

Europejskie Towarzystwo Fizyczne od 1975 r. przyznaje, obecnie co dwa lata, nagrodę za wybitne prace z dziedziny materii skondensowanej, które prowadzą do postępu elektroniki oraz inżynierii materiałowej. W 2010 r. nagrodę tę otrzymali Hartmut Buhmann i Laurens W. Molenkamp z Uniwersytetu w Würzburgu, Charles Kane i Eugene Mele z Uniwersytetu Pensylwanijskiego oraz Shoucheng Zhang z Uniwersytetu

Stanforda za przewidzenie teoretyczne i zaobserwowanie doświadczalne spinowego kwantowego zjawiska Halla oraz izolatorów topologicznych. Uroczystość wręczenia Nagrody odbyła się 1 września 2010 r. w Warszawie podczas 23. Zjazdu Oddziału Materii Skondensowanej Europejskiego Towarzystwa Fizycznego.

Teoria elektronowej struktury pasmowej jest podstawą naszego rozumie-





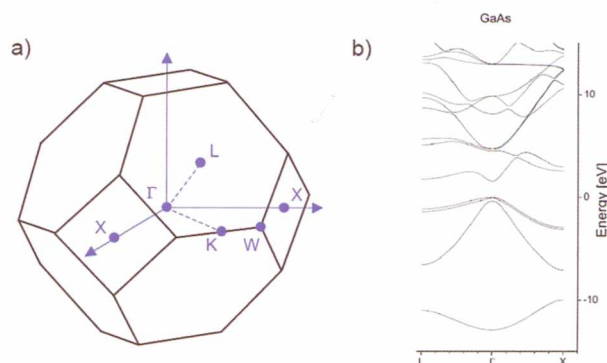
Na zdjęciu: Laureaci nagrody Europejskiego Towarzystwa Fizycznego. Z dyplomami w rękach od lewej stoją profesorem Shoucheng Zhang, Laurens Molenkamp, Eugene Mele, Charles Kane, i Hartmut Buhmann. W drugim rzędzie stoją (od lewej) prezes Europejskiego Towarzystwa Fizycznego prof. Maciej Kolwas, oraz przewodniczący Oddziału Materii Skondensowanej Europejskiego Towarzystwa Fizycznego, prof. Eoin O'Reilly.

Fot. Tomasz Pietrzak, zdjęcie z archiwum Instytutu Problemów Jądrowych

nia materiałów krystalicznych. W ramach tej teorii zaniedbujemy oddziaływanie kulombowskie pomiędzy elektronami (albo traktujemy je w przybliżony sposób, jako źródło efektywnego samouzgodnionego potencjału odczuwanego przez każdy elektron), i rozwiązujemy problem pojedynczego elektronu poruszającego się w potencjale okresowym. Możliwe kwantowe stany elektronu to *fale Blocha* opisane dwoma liczbami kwantowymi: kwazipędem  $k$  oraz numerem pasma  $n$ . Dla każdego  $k$  zawartego w pierwszej strefie Brillouina mamy wiele rozwiązań (odpowiadających różnym pasmom), zaś energia w każdym paśmie jest ciągłą funkcją wektora falowego  $k$ . Przykładowe widmo jednoelektronowego Hamiltonianu (*struktura pasmowa* danego kryształu) jest przedstawione na rys. 1.

Jednoelektronowy opis przy użyciu struktury pasmowej jest doskonałym punktem wyjścia dla zrozumienia bardzo szerokiej klasy materiałów, zawierającej m. in. metale alkaliczne oraz izolatory pasmowe (w tym półprze-

wodniki). Te ostatnie nie przewodzą prądu, ponieważ wszystkie pasma są w nich albo całkowicie pełne, albo zupełnie puste. Poziom Fermiego (poniżej którego w zerowej temperaturze wszystkie stany są zapełnione) znajduje się



Rys 1. a) Pierwsza strefa Brillouina dla arsenku galu (GaAs). b) Struktura pasmowa policzona wzdłuż dwóch kierunków o wysokiej symetrii (na liniach w przestrzeni wektora falowego, które łączą środek strefy punkt  $\Gamma$  z punktami L oraz X. Energie pasm zostały obliczone w modelu ciasnego wiązania w pracy doktorskiej Piotra Sankowskiego



w nich w przerwie energetycznej pomiędzy najwyższym pasmem zapełnionym, a najniższym pasmem pustym. Taki materiał nazywamy półprzewodnikiem, jeżeli przerwa energetyczna jest mała (przez co w temperaturze pokojowej pojawia się niewielka liczba termicznie wzbudzonych nośników w pasmach), lub gdy można do niego wprowadzić swobodne nośniki poprzez domieszkowanie go innymi pierwiastkami.

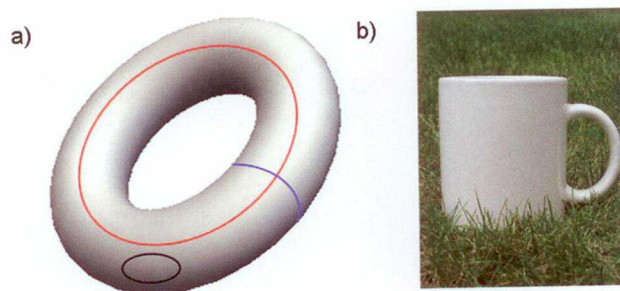
Czytelnik podręczników fizyki ciała stałego może odnieść wrażenie, iż struktury pasmowe izolatorów nie kryją w sobie żadnych *jakościowo zaskakujących tajemnic*. W szczególności łatwo jest uwierzyć, że najważniejsze informacje zawarte w strukturze pasmowej to zależności dyspersyjne  $E_n(k)$ . W ostatnich latach odkryto jednak wiele zjawisk (na przykład anomalne zjawisko Halla), do opisu których ten prosty punkt widzenia jest niewystarczający, i potrzebna jest również znajomość pełnych funkcji falowych stanów Blocha. Konieczna wiedza o tych funkcjach falowych jest zakodowana w tzw. Hamiltonianie Blocha  $H(k)$ , który jest zdefiniowany dla każdego  $k$ , i którego stany własne to wszystkie fale Blocha dla tegoż kwazipędu.

Odkrytą niedawno tajemnicą ukrytą przez lata w strukturze pasmowej „zwykłych” izolatorów jest fakt, iż nietrywialne własności tych materiałów mogą być zapisane w topologii struktury pasmowej, a dokładniej w strukturze topologicznej odwzorowania pomiędzy przestrzenią możliwych wartości  $k$ , a przestrzenią Hamiltonianów Blocha.

Topologia jest dziedziną matematyki opisującą te własności obiektów (na przykład odwzorowań pomiędzy dwiema przestrzeniami), które nie zmieniają się pod wpływem odkształceń *ciągłych*. Najprostszym przykładem jest topologiczna równoważność torusa i kubka: pomimo różnych kształtów (różnych własności *geometrycznych*), z plastelinowego torusa możemy uformować kubek bez konieczności zalepienia istniejącego otworu, ani też wytwarzania nowych otworów (te czynności wprowadzałyby element nieciągłości do procesu modelowania kubka). Gdybyśmy usiłovali ukształtować kubek z plastelinowej kuli, musielibyśmy w pewnym momencie rozerwać plastelinę aby uzyskać uszko kubka. Ten element nieciągłości pokazuje, że kula i torus są obiektami topologicznie różnymi.

Nieco bardziej matematyczny punkt widzenia jest następujący. Możemy sklasyfikować

wszystkie możliwe zamknięte krzywe istniejące na powierzchni trójwymiarowego obiektu takiego jak kula albo torus (krzywe te to odwzorowania pomiędzy kołem a powierzchnią obiektu). Dwie krzywe są równoważne (*homotopyczne*), jeżeli mogą być w sposób ciągły zdeformowane jedna w drugą. Łatwo jest przekonać się, że wszystkie zamknięte krzywe na powierzchni kuli są sobie równoważne. W przypadku torusa mamy za to trzy rodziny krzywych, jak widać na rys. 2.



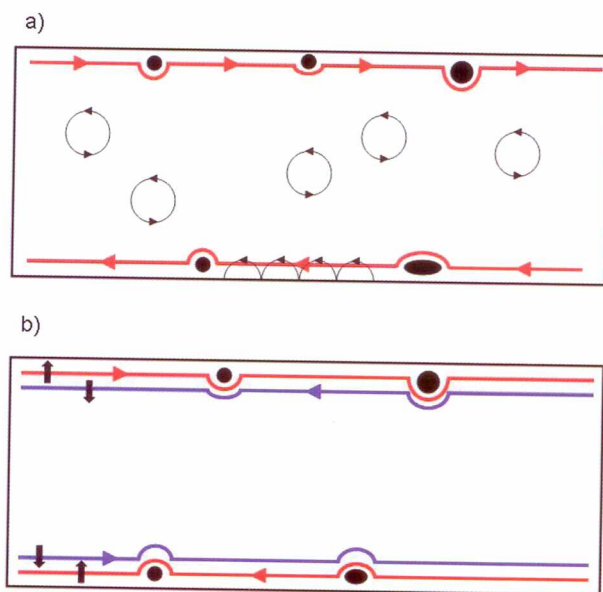
Rys 2. a) Torus z trzema zamkniętymi krzywymi. Tylko jedna z nich może być ściągnięta do punktu (tak jak wszystkie zamknięte krzywe na sferze). Dwie pozostałe są nieściągalne, i żadna z tych krzywych nie może być w sposób ciągły zdeformowana w inną. b) Topologicznie równoważny torusowi kubek

Topologiczne własności struktury pasmowej można odkryć badając odwzorowania pomiędzy strefą Brillouina (która w przypadku układów dwuwymiarowych, takich jak studnie kwantowe lub grafen, ze względu na okresowość struktury pasmowej w przestrzeni odwrotnej jest topologicznie równoważna torusowi) a przestrzenią Hamiltonianów Blocha (macierzy hermitowskich).

Przez wiele lat jedynym znanym nietrywialnym topologicznie stanem materii istniejącym w ciele stałym był stan dwuwymiarowego gazu elektronowego uzyskany w wysokich polach magnetycznych – kwantowe zjawisko Halla [1]. W tym przypadku zostało wykazane [2], iż niezwykle precyzyjna kwantyzacja oporu hallowskiego jest powiązana z istnieniem topologicznego niezmiennika (tzw. liczby Cherna) struktury pasmowej elektronów w polu magnetycznym. Ten topologiczny niezmiennik jest (w dużym uproszczeniu) analogiczny do liczby topologicznie różnych krzywych zamkniętych istniejących na powierzchni pewnej rozmaitości. Jego nieczułość na ciągłe zmiany Hamiltonianu układu (np. dodanie potencjału domieszek do Hamiltonianu idealnego kryształu lub uwzględ-



nienie brzegów próbki) tłumaczy nieczułość dokładności kwantyzacji oporu na szczegóły doświadczenia (kształt i jakość próbki). W przypadku kwantowego zjawisko Halla pojawia się też inny bardzo charakterystyczny uboczny skutek nietrywialnej topologii stanu kwantowego (w tym przypadku stanu podstawowego dwuwymiarowego gazu elektronowego w silnym polu magnetycznym): jest to istnienie przewodzących jednowymiarowych stanów brzegowych obiegających dwuwymiarową próbkę dookoła, jak pokazano na rys. 3. Nieczułość tych stanów na nieporządek istniejący w kryształach jest kolejną konsekwencją topologicznej stabilności kwantowego zjawiska Halla.



Rys 3. a) Prądy brzegowe w kwantowym zjawisku Halla. Na skutek przyłożonego pola  $B$  (skierowanego prostopadle do kartki) orbity elektronów wewnątrz dwuwymiarowej próbki są zamknięte. O chiralnych prądach brzegowych można myśleć jako o kwantowych odpowiednikach klasycznych trajektorii, które nie są w stanie zamknąć się na skutek zderzeń z krawędzią próbki (przykład takiej trajektorii przedstawiony jest na dolnym brzegu próbki). Stany brzegowe są nieczułe na rozpraszanie na domieszkach i defektach kryształu – na danym brzegu kwantowomechaniczna amplituda na rozpraszanie „do tyłu” jest zaniedbywalna, gdyż taki w takim procesie elektron musiałby zostać przeniesiony na przeciwny brzeg próbki.  
b) Helikalne prądy (skierowane w przeciwnych kierunkach dla przeciwnych spinów) w dwuwymiarowym izolatorze topologicznym (w kwantowym spinowym zjawisku Halla). Wnętrze próbki, podobnie jak w poprzednim przypadku, nie zawiera propagujących się (rozciągłych) stanów elektronowych. Pod nieobecność pola magnetycznego, jedynie na skutek oddziaływania spinowo-orbitalnego, powstają jednowymiarowe przewodzące kanały na brzegach próbki. Ruch elektronów w tych kanałach jest nieczuły na rozpraszanie na defektach kryształu

Po zrozumieniu topologicznej natury kwantyzacji w zjawisku Halla naukowcy parokrotnie przedstawiali teoretyczne modele nieoddziałujących układów, których stany podstawowe są topologicznie nietrywialne. Były to jednak propozycje dość egzotyczne, np. czterowymiarowy analog kwantowego zjawiska Halla [3]. Przełom nastąpił w 2005 r., kiedy Charles Kane i Eugene Mele pokazali [4], iż zwykle dwuwymiarowe izolatory dzielą się na dwie klasy: topologicznie trywialną i nietrywialną (alternatywa ta została nazwana dość technicznie brzmiącym terminem „klasyfikacji  $Z_2$ ” izolatorów). Materiały z pierwszej grupy mają struktury pasmowe *topologicznie* równoważne strukturze „izolatora atomowego”, czyli kryształu zbudowanego z atomów, które są praktycznie odseparowane jeden od drugiego (są tak daleko od siebie, iż elektrony z ich zewnętrznych powłok nie mogą przeskakiwać z atomu na atom). Zauważmy, iż taki materiał posiada kanoniczne cechy izolatora: jego odpowiedź na przyłożone pole elektryczne jest całkowicie *lokalna*, tzn. nie płynie żaden makroskopowy prąd, a jedynym efektem wywołanym przez zewnętrzne pole jest polaryzacja poszczególnych atomów. W oczywisty sposób zjawisko to jest niezależne od istnienia brzegów takiego „kryształu”. Sytuacja wygląda inaczej w przypadku klasy topologicznie nietrywialnej: materiały znajdujące się w tej rodzinie zachowują się jak zwykłe izolatory w swoim wnętrzu, ale niezwykłe zjawiska występują na ich brzegach – a dokładniej na granicy pomiędzy izolatorem topologicznym (IT) a izolatorem trywialnym (zauważyć należy, iż próżnia jest szczególnym przypadkiem izolatora trywialnego).

Podobnie jak w przypadku kwantowego zjawiska Halla, na brzegach izolatorów topologicznych istnieją rozciągłe stany elektronowe, które przewodzą prąd. Istnienie stanów powierzchniowych nie jest czymś zaskakującym w fizyce półprzewodników. W tym przypadku stany te są jednak fascynujące z dwóch powodów. Po pierwsze, ich istnienie jest wynikiem nietrywialnej topologii struktury elektronowej *wnętrza* materiału – jest więc ono niezwiązane ze szczegółami powierzchni, np. orientacją powierzchni w stosunku do osi krystalograficznych, jej morfologią, czy też jej możliwą rekonstrukcją. Po drugie, stany te posiadają niezwykłą strukturę spinową. Stany te są helikalne: mają one określony rzut spinu na wektor kwazipędu  $k$ ,



czyli elektrony poruszające się w przeciwnych kierunkach na danym brzegu mają przeciwnie skierowane spiny (patrz rys. 4). Jest to sytuacja analogiczna do kwantowego zjawiska Halla, gdzie na brzegach istnieją *chiralne* stany elektronowe (na danym brzegu tylko jeden kierunek propagacji jest dozwolony), i przez to nazwa kwantowe spinowe zjawisko Halla jest często stosowana do określenia dwuwymiarowego izolatora topologicznego. Ze względu na powyższe cechy (nieczułość na strukturę brzegu oraz charakter helikalny, która wyklucza wiele procesów rozpraszania na domieszkach i defektach) stany powierzchniowe są bardzo stabilne, i elektryczny opór jednowymiarowych kanałów jest bliski teoretycznemu minimum.

Odkrycie nietrywialnej topologicznie klasy izolatorów pasmowych było prawdziwą niespodzianką. Ich ciekawą cechą jest to, iż dla ich istnienia konieczna jest symetria odwrócenia w czasie – dokładnie ta symetria, której złamanie poprzez zewnętrzne pole magnetyczne prowadziło do pojawienia się kwantowego zjawiska Halla. Drugim koniecznym składnikiem jest silne oddziaływanie spin-orbita. Oddziaływanie to musi być na tyle znaczące, ażeby istnienie przerwy energetycznej pomiędzy całkowicie obsadzonymi a pustymi pasmami wynikało ze zjawisk relatywistycznych (takich jak sprzężenie spin-orbita czy tzw. człon Darwina). Matematyka stojąca za tym stwierdzeniem jest dość skomplikowana, ale możemy przedstawić następujące częściowe wytłumaczenie. Można pokazać, iż za każdym razem, gdy zmieniając jakiś parametr (np. stałą sieci kryształu) doprowadzamy do zamknięcia się przerwy energetycznej w jakimś punkcie  $k$ , topologiczna klasa, do której należy struktura pasmowa, ulega zmianie [5]. Jeżeli uwierzmy również w fakt, iż bez jakichkolwiek poprawek relatywistycznych izolator musi być topologicznie trywialny, to otrzymujemy następujący teoretyczny przepis na uzyskanie izolatora topologicznego: obliczamy strukturę pasmową danego materiału zaniedbując człony pochodzenia relatywistycznego (np. przyjmując prędkość światła  $c$  równą nieskończoności), a następnie stopniowo włączamy te człony. Jeżeli podczas tego procesu (który jest zakończony, gdy realistyczne oddziaływanie spinowo-orbitalne są w pełni uwzględnione) przerwa energetyczna ulegnie zamknięciu *nieparzystą* ilość razy, zaś końcowa struktura pasmowa ciągle będzie odpowiadała

izolatorowi, to taki izolator należy do topologicznie nietrywialnej klasy.

Kane i Mele zapostulowali istnienie nietrywialnego topologicznie stanu w grafenie. Zauważyli oni, iż dopuszczalne przez symetrię tego materiału człony spinowo-orbitalne mogą doprowadzić do rozerwania pasm („stożków Diraca”) krzyżujących się w narożach strefy Brillouina, i przez to otworzenia się przerwy energetycznej. Niestety, szybko okazało się, że człony te są zanedbywalnie małe w grafenie, i istnienie takich (teoretycznie możliwych) przerw energetycznych nie zostało do dziś potwierdzone. Droga do doświadczalnego potwierdzenia istnienia izolatorów topologicznych została otwarta przez pracę B.A. Bernevig i S.-C. Zhanga [6], w której autorzy ci przedstawili model teoretyczny sugerujący, iż topologicznie nietrywialny stan może być zrealizowany w studniach kwantowych HgTe z barierami z CdTe. To teoretyczne przewidywanie zostało potwierdzone przez doświadczenia przeprowadzone w grupie L.W. Molenkampa i H. Buhmanna. W pracy [7] zostały przedstawione wyniki pomiarów transportowych w studniach HgTe/HgCdTe, które pokazały istnienie jednowymiarowych przewodzących kanałów na krawędziach izolującej (pozbawionej swobodnych nośników) studni kwantowej w nieobecności zewnętrznego pola magnetycznego.

Czemu w powyższych strukturach pojawia się stan elektronowy o nietrywialnej topologii? Można to zrozumieć zaczynając od struktury pasmowej HgTe. W materiale tym charakter orbitalny pasm przewodnictwa i walencyjnego jest odwrócony w stosunku do „kanonicznej” sytuacji spotykanej w półprzewodnikach takich jak GaAs czy CdTe, w których prawie zawsze pasmo przewodnictwa jest zbudowane z orbitali typu  $s$ , zaś pasmo walencyjne z orbitali typu  $p$ . W HgTe, na skutek poprawek relatywistycznych (a dokładnie członu Darwina), to uporządkowanie pasm jest odwrócone. Sytuacja jest jednak skomplikowana przez fakt, iż HgTe jest półprzewodnikiem o zerowej przerwie, tzn. pasmo przewodnictwa styka się w punkcie  $k = 0$  z pasmem walencyjnym. Aby zmienić HgTe w izolator topologiczny, musimy wymusić otworzenie się przerwy energetycznej w taki sposób, aby zachować „odwrotną” kolejność pasm (tzn. uzyskać powyżej opisaną sytuację, w której istnienie i charakter przerwy jest jakościowym wynikiem zjawisk relatywistycznych). Taki



efekt można uzyskać w studni kwantowej HgTe/CdTe, której grubość przekracza pewną wartość krytyczną (poniżej tej grubości kolejność podpasów w studni jest wyznaczona przez „kanoniczną” kolejność pasm w barierze CdTe, i otrzymujemy trywialny izolator dwuwymiarowy). Później zauważono [8], iż podobny efekt można uzyskać poddając HgTe odpowiedniemu naprężeniu, które znosi degenerację w  $k = 0$  pomiędzy pasmami przewodnictwa i walencyjnym.

Po tej serii pionierskich prac teoretycznych ukoronowanych pierwszą obserwacją przewodnictwa stanów brzegowych w dwuwymiarowym izolatorze topologicznym, badania tych intrygujących materiałów zaczęły rozwijać się w dużym tempie. W 2007 r. pokazano teoretycznie, iż izolatory topologiczne mogą też istnieć w trzech wymiarach [8,9]. W tym przypadku na ich powierzchniach powstaje dwuwymiarowy gaz elektronowy, którego struktura elektronowa opisywana jest przez równanie typu Diraca (tak jak w przypadku grafenu, ale z tą ważną różnicą, iż mamy do czynienia z nieparzystą liczbą stożków Diraca na każdej powierzchni). Na skutek nietrywialnej struktury spinowej (w której, podobnie jak w przypadku jednowymiarowych brzegów struktury dwuwymiarowej, mamy silne sprzężenie pomiędzy kierunkiem kwazipędu  $k$  a kierunkiem spinu) elektrony zlokalizowane na powierzchni są w dużym stopniu nieczułe na rozpraszania na domieszkach. Te przewidywania teoretyczne zostały ponownie szybko potwierdzone doświadczalnie w serii eksperymentów dla  $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$  [10] i pokrewnych materiałów (np.  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  oraz  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ) metodami fotoemisji z kątową rozdzielczością (ARPES) oraz skaningowej mikroskopii tunelowej (STM). Od tego czasu liczba materiałów, co do których istnieją teoretyczne bądź doświadczalne przesłanki za tym, iż są one izolatorami topologicznymi, ciągle rośnie.

Powinniśmy również wspomnieć o nowych niezwykłych przewidywaniach teoretycznych dotyczących izolatorów topologicznych. Okazuje się, że elektrodynamika ośrodka ciągłego będącego izolatorem topologicznym jest opisywana przez dodanie „topologicznego” członu do równań Maxwella (dokładniej dodanie wyrazu proporcjonalnego do  $E \cdot B$ ), który był rozpatrywany w latach osiemdziesiątych w teorii pola w kontekście tzw. elektrodynamiki aksjonów [11]. Skutkiem obecności tego członu jest ciekawa

modyfikacja odpowiedzi materiału na zewnętrzne pole elektryczne – po jego przyłożeniu izolator topologiczny wytwarza niezerową polaryzację magnetyczną [12]. Jest to zachowanie podobne do zjawiska obserwowanego w materiałach *multiferroicznych*, z tą jednak różnicą, iż wyindukowane pole jest wytwarzane przez prądy powierzchniowe, a nie przez sprzężenie polaryzacji elektrycznej i magnetycznej wewnątrz próbki.

Innym przykładem możliwych ciekawych własności izolatorów topologicznych są przewidywania teoretyczne dla złącza pomiędzy nim a zwykłym nadprzewodnikiem [13]. Dobrze znany efekt bliskości, w którym pary Coopera przenikają z nadprzewodnika do pobliskiego materiału, prowadzi do powstania rzadko spotykanego stanu nadprzewodzącego (blisko powiązanego z nadprzewodnictwem posiadającym parametr porządku typu  $p$ ) w dwuwymiarowej warstwie powierzchniowej po stronie izolatora topologicznego. Wiry nadprzewodzące powstałe w tej warstwie są opisane teorią, której niskoenergetyczne stopnie swobody (odpowiadające kwantowanym stanom związanym parametru porządku wewnątrz wirów) są opisane przez tzw. fermiony Majorany [14]. W języku teorii pola, kwazicząstki odpowiadające tym niskoenergetycznym wzbudzeniom są tożsame ze swoimi antycząstkami (zanim doświadczenia pokazały, że neutrina mają masę, istniały spekulacje, iż one mogą być właśnie fermionami Majorany). W dwóch wymiarach kwazicząstki te posiadają dość egzotyczne własności: ich statystyka nie tylko jest *każdonowa* (tzn. różna od bozonowej lub fermionowej) [15], ale też jest *nieabelowa* (nieprzemienne). Zamiana wirów miejscami, i przemieszczanie ich jeden wokół drugiego (tzw. *splecenie* ich linii świata) prowadzi do nietrywialnych zmian w strukturze stanu podstawowego (wielociałowej funkcji falowej całego kondensatu nadprzewodzącego), i zmiany te zależą od kolejności w jakiej te operacje są wykonane. Układ nadprzewodzących drutów na powierzchni IT może być wykorzystany do dokonywania takich operacji [13], które z kolei są konieczne do działania *topologicznego komputera kwantowego* [16].

Powyższa lista przewidywań teoretycznych nie jest zupełna, ale powinna ona pokazać jak ciekawe perspektywy otwierają się przed badaniami izolatorów topologicznych. Najważniejszą jednak zmianą, którą odkrycie tych



materiałów wprowadza w naszym rozumieniu materii skondensowanej, jest podkreślenie faktu, iż stany skupienia materii (nawet tak pozornie proste jak izolatory pasmowe) mogą być klasyfikowane nie tylko ze względu na symetrie łamane przez nie (np. symetria translacyjna w przypadku kryształów, symetria cechowania w przypadku nadprzewodników, symetria odwrócenia w czasie w przypadku ferromagnetyków itd.), lecz także ze względu na strukturę topologiczną ich kwantowomechanicznego stanu podstawowego.

## Literatura

1. K.I. Wysokiński, T. Dietl, *Postępy Fizyki* **36**, zeszyt 6, 515 (1985).
2. D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405 (1982).
3. S.-C. Zhang, J.P. Hu, *Science* **294**, 823 (2001).
4. C.L Kane, E.J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 226801, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146802 (2005).
5. S. Murakami, <http://arxiv.org/abs/1006.1188v3>.
6. B.A. Bernevig, T.L. Hughes, S.-C. Zhang, *Science* **314**, 1757 (2006).
7. M. König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, X.-L. Qi, S.-C. Zhang, *Science* **318**, 767 (2007).
8. L. Fu, C.L. Kane, *Phys. Rev. B* **76**, 045302 (2007).
9. J.E. Moore, L. Balents *Phys. Rev. B* **75**, 121306 (2007); R. Roy, *Phys. Rev. B* **79**, 195322 (2009).
10. D. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y.S. Hor, R.J. Cava, M.Z. Hasan, *Nature* **452**, 970 (2008).
11. F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1799 (1987).
12. X.-L. Qi, T.L. Hughes, S.-C. Zhang *Phys. Rev. B* **78**, 195424 (2008); A.M. Essin, J.E. Moore, D. Vanderbilt, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 146805 (2009).
13. L. Fu, C.L. Kane, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 096407 (2008).
14. F. Wilczek, *Nature Physics*, **5**, 614 (2009).
15. F. Wilczek, *Postępy Fizyki* **44**, zeszyt 6, 565 (1993).
16. S. Das Sarma, M. Freedman, C. Nayak, *Physics Today* **59**, 32 (2006).

Artykuły przeglądowe dotyczące izolatorów topologicznych:

P1. X.-L. Qi and S.-C. Zhang, *Physics Today* **63**, 33 (styczeń 2010).

P2. J.E. Moore, *Nature* **464**, 194 (2010).

P3. M.Z. Hasan, C.L. Kane, <http://arxiv.org/abs/1002.3895>.

P4. X.-L. Qi, S.-C. Zhang, <http://arxiv.org/abs/1008.2026>.

Artykuły P3 oraz P4 wkrótce ukażą się w *Reviews of Modern Physics*.