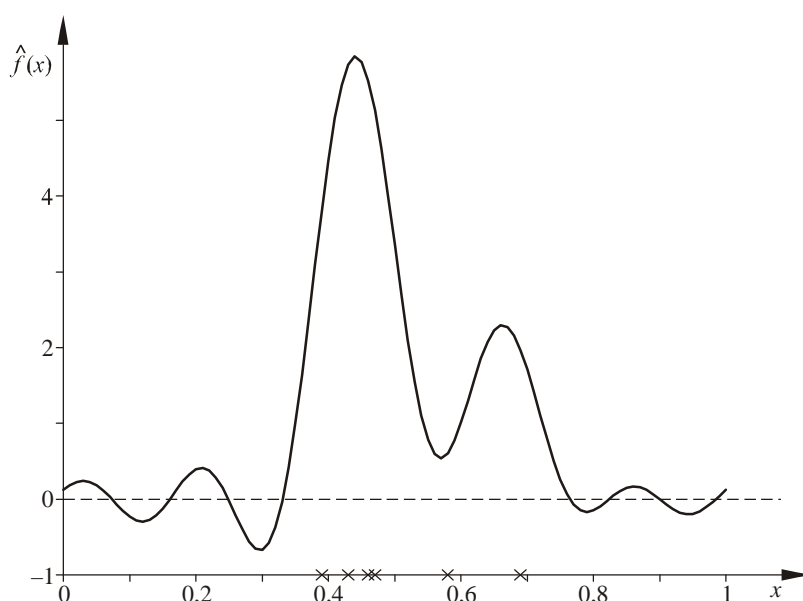


## UZUPEŁNIENIA

### Str. 14-15:

Wykres estymatora Fouriera dla danych analogicznych do stosowanych na rysunkach 1.2, 1.3 i 1.5 jest następujący:



Jakość estymacji jest co najmniej niesatysfakcjonująca.

### Str. 31:

Kwantyle okazują się również odporniejsze od momentów, w zakresie wpływu skrajnych wartości próby losowej, a wartości takie są przecież w praktyce często związane z anomaliami i błędami metodologicznymi lub wręcz pomyłkami.

### Str. 86:

Przypadek gdy

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} g(h) = -\infty \quad (\text{I})$$

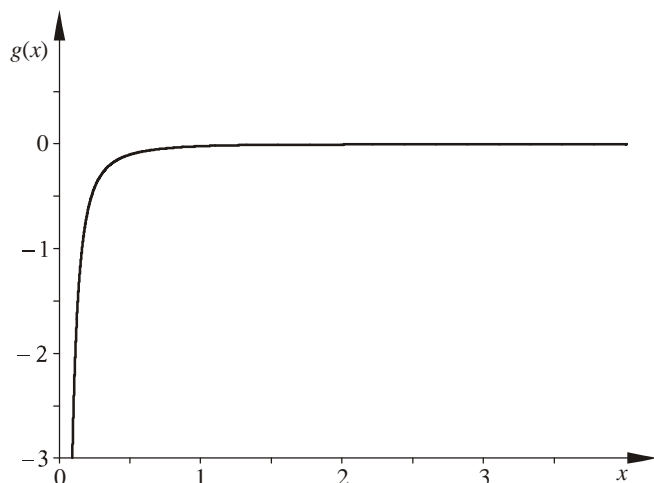
występuje kiedy będące w dyspozycji dane mają charakter istotnie „skwantowany” (dyskretny). Przykładowo, badając długość pobytu gości w pensjonacie – a więc wielkość ze swej natury ciągłą – najczęściej dysponuje się jedynie informacją o ilości spędzonych tam dób, czyli wartościami ze zbioru liczb naturalnych. Co więcej, w szczególnych przypadkach gdy pojawia się własność (I), funkcja

$g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  może być rosnąca w całej swej dziedzinie i w ogóle nie mieć lokalnego minimum. Powstawaniu takiego efektu dodatkowo sprzyja wielokrotne powtarzanie się jednej lub kilku wartości w posiadanej próbie losowej.

Jako przykład, na przedstawionym w dalszej części rysunku pokazana jest funkcja  $g$  uzyskana dla próby losowej

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_6 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}. \quad (\text{II})$$

z zastosowaniem do podstawowej postaci estymatora (3.3) radialnego jądra normalnego – (3.47) z podstawieniem (3.40). (Należy ponowić sformułowane na stronach 108 i 153 książki zastrzeżenie, iż stosowanie tak nielicznej próby losowej, jest w praktyce niedopuszczalne, a powyżej zostało dokonane jedynie w celach ilustracyjnych.) Warto porównać także poniższy rysunek z rys. 3.19 zamieszczonym w książce.



Wydaje się jednak, iż opisanej powyżej niedogodności nie powinno się traktować jako wady metody, lecz stanowi ona jedynie konsekwencję stosowania estymatorów jądrowych w klasycznej postaci określonej dla zmiennych losowych o charakterze ciągłym, w sytuacji gdy raczej należałoby analizować zmienne dyskretne.

Można temu wszakże przeciwdziałać uciągając „skwantowane” dane poprzez zmodyfikowanie próby losowej

$$x_1, x_2, \dots, x_m \quad (\text{III})$$

do postaci

$$x_1 + s_1, x_2 + s_2, \dots, x_m + s_m, \quad (\text{IV})$$

gdzie  $s_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, m$  otrzymywane są z generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[-d/2, d/2]$ , przy czym  $d$  oznacza „krok skwantowania” (w przedstawionym powyżej przykładzie długości pobytu w pensjonacie:  $d = 1$ ). Aczkolwiek w większości przypadków, zwłaszcza przy dużej liczności próby, uzyskuje się niniejszym całkowicie zadowalające w praktyce rezultaty, to tego typu heurystyczne procedury zawsze wymagają starannej weryfikacji. Jako uniwersalne, pewne i dogodne

z aplikacyjnego punktu widzenia rozwiązanie, rekomendować należy – w rozważanej tu sytuacji – zastąpienie jądra radialnego produktowym i użycie metody podstawień, która jest odporna na powyższą niedogodność (por. także uwagi na stronach 72, 89-90 książki).

**Str. 145:**

Stosując algorytm wyznaczania jądrowego estymatora kwantyla w przypadku wprowadzenia ograniczenia nośnika, zależność (3.317) należy zmodyfikować do postaci

$$\hat{q}_{k+1} = \begin{cases} \hat{q}_k - \frac{\hat{F}(\hat{q}_k) - r}{\hat{f}(\hat{q}_k)} & \text{gdy } \left| \frac{\hat{F}(\hat{q}_k) - r}{\hat{f}(\hat{q}_k)} \right| \leq \frac{\hat{\sigma}}{10} \text{ oraz } \hat{q}_k > x_* \\ \hat{q}_k - \frac{\hat{\sigma}}{10} \operatorname{sgn}(\hat{F}(\hat{q}_k) - r) & \text{gdy } \left| \frac{\hat{F}(\hat{q}_k) - r}{\hat{f}(\hat{q}_k)} \right| > \frac{\hat{\sigma}}{10} \text{ lub } \hat{q}_k \leq x_* \end{cases} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots \quad (\text{V})$$

w przypadku ograniczenia lewostronnego, albo

$$\hat{q}_{k+1} = \begin{cases} \hat{q}_k - \frac{\hat{F}(\hat{q}_k) - r}{\hat{f}(\hat{q}_k)} & \text{gdy } \left| \frac{\hat{F}(\hat{q}_k) - r}{\hat{f}(\hat{q}_k)} \right| \leq \frac{\hat{\sigma}}{10} \text{ oraz } \hat{q}_k < x^* \\ \hat{q}_k - \frac{\hat{\sigma}}{10} \operatorname{sgn}(\hat{F}(\hat{q}_k) - r) & \text{gdy } \left| \frac{\hat{F}(\hat{q}_k) - r}{\hat{f}(\hat{q}_k)} \right| > \frac{\hat{\sigma}}{10} \text{ lub } \hat{q}_k \geq x^* \end{cases} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots \quad (\text{VI})$$

w przypadku ograniczenia prawostronnego. Powyższe uzupełnienie pozwala dodatkowo zabezpieczyć się przed sytuacją gdyby  $\hat{q}_k$  znalazło się poza lub na brzegu założonego nośnika, co implikuje przecież  $\hat{f}(\hat{q}_k) = 0$ , uniemożliwiając stosowanie pierwszej formuły wzorów (V)-(VI).