Elementy logiki dla informatyków

Wykład II

Elementy logiki.
Rachunek zdań

Wprowadzenie do logiki

Przedmiot logiki

Przedmiotem logiki matematycznej są następujące zagadnienia:

- formalna, symboliczna reprezentacja wiedzy; wiedza wyrażana w języku naturalnym jest zapisywana w postaci *formuł logicznych*,
- przetwarzanie wiedzy za pomocą reguł stanowiących schematy wnioskowania; w tym celu formułowane są *reguły wnioskowania*,
- badanie własności generowanych wniosków i systemów logicznych; własności te obejmuja m. in. *poprawność* i *zupełność*.

Klasyczna logika formalna bada mechanizmy rozumowań niezawodnych, w których otrzymywane wnioski są zawsze prawdziwe, o ile wychodzi się z prawdziwych przesłanek, a więc *wnioskowania dedukcyjnego*. Czasem dopuszcza się również inne schematy wnioskowania, prowadzące do użytecznych, chociaż nie zawsze prawdziwych wniosków (np. *abdukcja* oraz *indukcja*).

Alfabet rachunku zdań tworzą symbole formuł zdaniowych, łaczących je spójników (funkcji) logicznych oraz stosowane dla uporządkowania notacji nawiasy. Formuły zdaniowe symbolizują konkretne zdania; zdania te mogą być dobrze określone i wówczas można im przypisać ocenę *prawdy* albo *fałszu* lub też symbolizować pewne nieskonkretyzowane w danej chwili wypowiedzi.

W pierszym przypadku, takie skończone wypowiedzi, którym można jednoznacznie przypisać ocenę *prawdy* albo *fałszu*, nazywane będą *zdaniami*. Mogą one być zapisywane jawnie, np. "Śnieg jest biały", "W nocy jest ciemno", "Pada deszcz", itp. lub też przy użyciu pewnych symboli, np. p czy q. W drugim przypadku, formuła zdaniowa symbolizuje pewną bliżej nie sprecyzowaną wypowiedź, jednakże taką, której wartość logiczna może przyjąć wartość prawdy albo fałszu. W taki przpadku formuła zdaniowa nazywana jest *zmienną zdaniową*.

Wprowadzenie do logiki

Istota wnioskowania logicznego

Chcąc przpisać konkretne znaczenie pewnej zmiennej zdaniowej można zastosować notację postaci

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \text{“W nocy jest ciemno”},$$

co oznacza, że p staje się skrótowym zapisem podanego zdania. Ponadto, bardzo często rozważa się symbole formuł zdaniowych nie przypisując im konkretnego znaczenia, a jedynie wartość prawdy lub fałszu. Takie przypisanie nosi nazwę określenia lub nadania *interpretacji* formule zdaniowej (zmiennej zdaniowej).

Aby móc prowadzić wnioskowanie logiczne potrzebny jest zbiór formuł definiujących pewną wiedzę oraz reguły dla ich przetwarzania. Reguły przetwarzania wiedzy zazwyczaj formułowane są w postaci schematu:

$$\frac{\text{przesłanki reguły}}{\text{konkluzje}}.$$

Przykładem reguły wnioskowania jest popularna reguła *modus ponens* o następującym schemacie:

$$\frac{\alpha, \alpha \Longrightarrow \beta}{\beta}.$$

Na przykład, dysponując przesłankami $\alpha =$ *pada deszcz* oraz $\beta =$ *jeżeli pada deszcz to ulice są mokre* (logicznie: pada deszcz $\Longrightarrow$ ulice są mokre) możemy skorzystać z reguły *modeus ponens* wnioskując wg schematu:

$$\frac{\text{pada deszcz, pada deszcz} \Longrightarrow \text{ulice są mokre}}{\text{ulice są mokre}}.$$

Otrzymujemy zatem konkluzję, że *ulice sa mokre*, która stanowi nowo wydedukowany fakt.

Wprowadzenie do logiki

Spójniki i formuły logiczne

Z formuł atomowych bardziej złożone formuły budowane są przy pomocy odpowiednich *spójników logicznych*. Najczęściej stosowane są następujące spójniki logiczne:

- $\neg$ – negacja,
- $\wedge$ – koninkcja,
- $\vee$ – alternatywa,
- $\Rightarrow$ – implikacja (może być również postaci $\Leftarrow$),
- $\Leftrightarrow$ – równoważność (implikacja dwustronna).

Przy wykorzystaniu powyższych spójników logicznych i symboli formuł zdaniowych (formuł atomowych) buduje się bardziej złożone formuły logiczne rachunku zdań. Nie wszystkie jednak możliwe do utworzenia napisy będą formułami. Poniżej podano definicję poprawnie skonstruowaych formuł.

Definicja 1 Formuły rachunku zdań *Niech* **P** *będzie zbiorem symboli formuł atomicznych. Zbiór poprawych formuł rachunku zdań (krótko: formuł)* **FOR***jest zdefiniowane rekurencyjnie jak następuje:*

1. *Jeżeli* $p \in \mathbf{P}$ *to* $p \in \mathbf{FOR}$,
2. *Jeżeli* $\phi \in \mathbf{FOR}$ *to* $(\neg\phi) \in \mathbf{FOR}$,
3. *Jeżeli* $\phi, \psi \in \mathbf{FOR}$ *to* $(\psi \wedge \phi) \in \mathbf{FOR}$, $(\psi \vee \phi) \in \mathbf{FOR}$, $(\psi \Rightarrow \phi) \in \mathbf{FOR}$ *oraz* $(\psi \Leftrightarrow \phi) \in \mathbf{FOR}$,
4. *Wszystkie formuły muszą być generowane zgodnie z powyższymi regułami.*

Wprowadzenie do logiki

Semantyka rachunku zdań

Formułom atomicznym i złożonym przypisywana jest ocena prawdy lub fałszu. Aktualna ocena formuły zależy od przypisania wartości logicznych występującym w niej formułom atomowym oraz od konstrukcji samej formuły. Poniżej wprowadzono ważne pojęcie *interpretacji* formuł atomowych w rachunku zdań.

Definicja 2 *Niech* $\mathbf{P}$ *będzie zbiorem rozważanych symboli formuł atomowych a* $\mathbf{T}$ *wyróżnionym zbiorem wartości logicznych, tj.* $\mathbf{T} = \{true, false\}$. *Interpretacja symboli zbioru* $\mathbf{P}$ *nazywa się każdą funkcję postaci:*

$$I : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{T}$$

przyporządkowującą każdemu symbolowi formuły atomowej wartość logiczną prawdy albo fałszu.

Interpretacja określa zatem czy dana formuła atomowa jest uznawana za prawdziwą czy też fałszywą. Przy danej interpretacji formuła może być prawdziwa lub fałszywa; w przypadku gdy interpretacja nie przypisywałaby jednoznacznie wartości logicznej prawdy albo fałszu wszystkim symbolom rozważanego zbioru, interpretację taką okresla się jako niepełną lub częściową.

Definicja 3 *Dwie formuły* ϕ *oraz* ψ *mające identyczną wartość logiczną przy każdej interpretacji* I $(I(\phi) = I(\psi))$ *nazywamy* logicznie równoważnymi.

Pojęcie interpretacji należy rozszerzyć na zbiór wszystkich formuł **FOR**. Odpowiednia definicja ma charakter rekurencyjny.

Wprowadzenie do logiki

Semantyka – określanie wartości logicznej formuł

Definicja 4 *Niech* **P** *oznacza zbiór rozważanych symboli formuł atomowych,* **T** *– dwuelementowy zbiór wartości logicznych, a I – interpretację. Interpretacja I przypisuje wartości logiczne wszystkim formu@lom ϕ, ψ ze zbioru* **FOR***, tzn.:*

$$I : \ \mathbf{FOR} \longrightarrow \mathbf{T},$$

utworzonym wyłącznie w oparciu o symbole występujące w **P** *zgodnie z następującymi zasadami:*

1. $I(\neg\phi) = $ *true wtw. gdy* $I(\phi) = $ *false oraz* $I(\neg\phi) = $ *false wtw. gdy* $I(\phi) = $ *true,*

2. $I(\phi \wedge \psi) = $ *true wtw. gdy* $I(\phi) = $ *true oraz* $I(\psi) = $ *true; w pozostałych przypadkach* $I(\phi \wedge \psi) = $ *false,*

3. $I(\phi \vee \psi) = $ *true wtw. gdy* $I(\phi) = $ *true lub* $I(\psi) = $ *true; w pozosta@lym przypadku* $I(\phi \vee \psi) = $ *false,*

4. $I(\phi \Rightarrow \psi) = $ *true wtw gdy* $I(\phi) = $ *false lub* $I(\phi) = $ *true oraz jednocześnie* $I(\psi) = $ *true; w pozostałym przypadku* $I(\phi \wedge \psi) = $ *false,*

5. $I(\phi \Leftrightarrow \psi) = $ *true wtw. gdy* $I(\phi) = I(\psi)$*; w pozostałych przypadkach* $I(\phi \Leftrightarrow \psi) = $ *false.*

Powyższa definicja pozwala rekurencyjnie ustalić wartość logiczną dowolnie skonstruowanej i dowolnie zlożonej poprawnej formuły rachunku zdań o ile tylko znane są wartości logiczne wszystkich występujących w niej formuł atomowych.

Wprowadzenie do logiki

Tabele wartości logicznych

Zamiast symboli prawdy i fałszu czesto stosujemy zapis uproszczony: 1 zamiast prawdy i 0 zamiast fałszu. Tablica prawdy dla negacji przybiera postać:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Tablica prawdy dla koninukcji przybiera postać:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tablica prawdy dla dysjunkcji przybiera postać:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tablica prawdy dla implikacji przybiera postać:

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Wprowadzenie do logiki

Sematyka rachunku zdań

Często podana powyżej definicja przedstawiana jest w formie jest tabeli ilustrującej podane zależności logiczne (patrz poniżej).

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \Rightarrow \psi$	$\phi \Leftrightarrow \psi$
true	*true*	*false*	*true*	*true*	*true*	*true*
true	*false*	*false*	*false*	*true*	*true*	*true*
false	*true*	*true*	*false*	*true*	*true*	*false*
false	*false*	*true*	*false*	*false*	*true*	*true*

Semantykę wybranych funkcji można definiować za pomocą sprowadzenia jej do równoważnej formuły zawierajacej symbole koniunkcji, dysjunkcji i negacji.

- $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$,
- $\phi \Leftrightarrow \psi \equiv (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\phi \Leftarrow \psi)$,
- $\phi|\psi \equiv \neg(\phi \wedge \psi)$ – funkcja (kreska) Sheffera, jest to tzw. funkcja `NAND`; inna notacja $\overline{\phi \wedge \psi}$,
- $\phi \downarrow \psi \equiv \neg(\phi \vee \psi)$ – funkcja (strzałka) Pierce'a, jest to tzw. funkcja `NOR`; inna notacja $\overline{\phi \vee \psi}$,
- $\phi \bigoplus \psi \equiv (\neg\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \neg\psi)$ – funkcja alternatywy wykluczającej, jest to tzw. funkcja `EX-OR`,
- $\neg\phi \vee \psi$ oraz $\phi \vee \neg\psi$ – funkcje zakazu lub różnice niesymetryczne.

Ogólnie dla n argumentów wejściowych można skonstruować 2^{2^n} różnych funkcji, a więc dla $n = 2$ jest 16 różnych funkcji.

Wprowadzenie do logiki

Ważniejsze prawa logiczne

- $\neg\neg p \equiv p$ – prawo podwójnego przeczenia,
- $p \wedge q \equiv q \wedge p$ – prawo przemienności koninkcji,
- $p \vee q \equiv q \vee p$ – prawo przemienności alternatywy,
- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ – prawo łączności koninkcji,
- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ – prawo łączności koninkcji,
- $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ – prawo rozdzielności koninkcji względem alternatywy,
- $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ – prawo rozdzielności alternatywy względem koninkcji,
- $p \wedge p \equiv p$ – prawo idempotentności dla koninkcji,
- $p \vee p \equiv p$ – prawo idempotentności dla alternatywy,
- $p \wedge 0 \equiv 0$, $p \wedge 1 \equiv p$ – prawo identyczności,
- $p \vee 0 \equiv p$, $p \vee 1 \equiv 1$ – prawo identyczności,
- $p \vee \neg p \equiv 1$ – prawo wyłączonego środka,
- $p \wedge \neg p \equiv 0$ – prawo sprzeczności,
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg(p) \vee \neg(q)$ – prawo De Morgana,
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg(p) \wedge \neg(q)$ – prawo De Morgana,
- $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$ – prawo kontrapozycji,
- $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ – określenie implikacji za pomoca alternatywy.

Postacie specjalne formuł logicznych

Normalna postać koninktywna

Każda formuła logiczna rachunku zdań może być sprowadzona do postaci równoważnej, w której formuły atomiczne i ich negacje bedą połączone symbolem alternatywy, a tak utworzone formuły – symbolem koniunkcji; jest to tzw. *normalna postać koniuntywna, CNF* i przybiera następującą formę:

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_k) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots q_l) \wedge \ldots (s_1 \vee s_2 \vee \ldots s_m).$$

Normalna postać dysjunktywna

Każda formuła logiczna rachunku zdań może być sprowadzona do postaci równoważnej, w której formuły atomiczne i ich negacje bedą połączone symbolem koninkcji, a tak utworzone formuły – symbolem alternatywy; jest to tzw. *normalna postać dysjunktywna, DNF* i przybiera następującą formę:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots p_k) \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots q_l) \vee \ldots (s_1 \wedge s_2 \wedge \ldots s_m).$$

Normalna postać prawdy/jedynki oraz fałszu/zera

Formuła zawsze prawdziwa zawierająca n zmiennych zdaniowych może zostać przedstawiona w postaci DNF w jednoznaczny sposób i składa się ona z 2^n różnych koniunkcji, każda o n składowych, np.:

$$1 = pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \qquad \text{(DNF)}$$

Formuła zawsze fałszywa zawierająca n zmiennych zdaniowych może zostać przedstawiona w postaci CNF w jednoznaczny sposób i składa się ona z 2^n różnych dysjunkcji, każda o n składowych, np.:

$$0 = pqr \wedge pq\bar{r} \wedge p\bar{q}r \wedge p\bar{q}\bar{r} \wedge \bar{p}qr \wedge \bar{p}q\bar{r} \wedge \bar{p}\bar{q}r \wedge \bar{p}\bar{q}\bar{r} \qquad \text{(CNF)}$$

Związki pomiędzy zdaniami logicznymi

Zdanie proste

$$p \Rightarrow q$$

Zdanie odwrotne

$$q \Rightarrow p$$

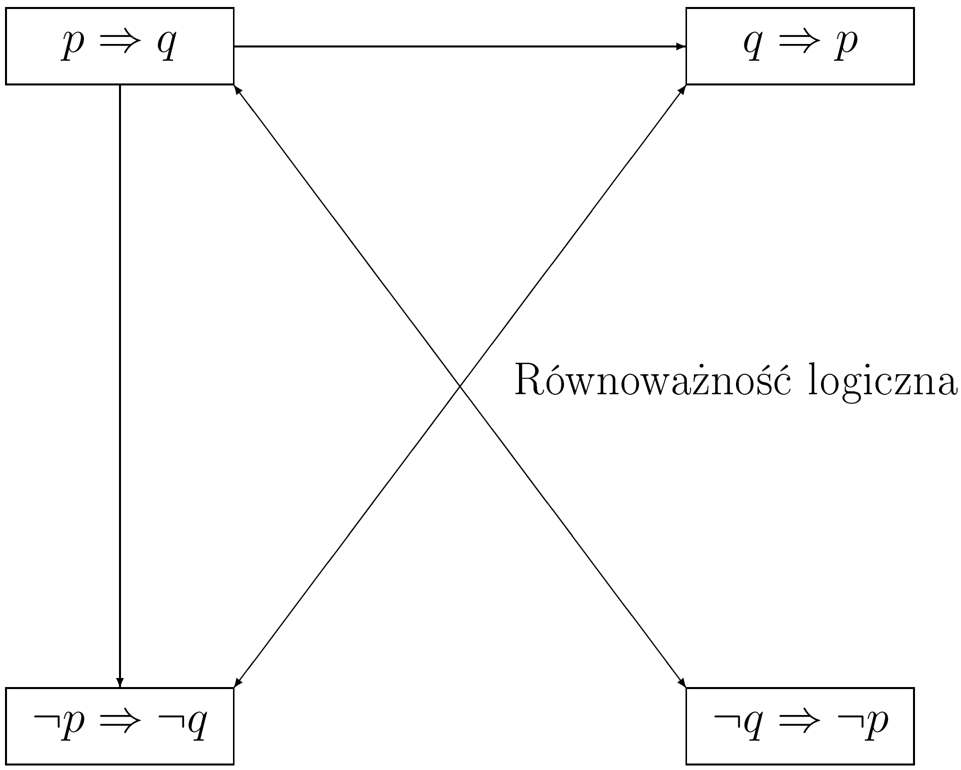
Zdanie przeciwne

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

Zdanie przeciwstawne

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

Kwadrat logiczny:



Metoda zerojedynkowa

Zastosowania metody zero-jedynkowej

Metoda zerojedynkowa polega na budowie i analizie **matrycy logicznej** formuły; może być stosowana do:

- weryfikacji tautologii (dla każdej interpretacji wartość logiczna formuły jest *true*,
- weryfikacji niespełnialności (dla każdej interpretacji wartość logiczna formuły jest *false*,
- badania równoważności formuł (dla każdej interpretacji wartości logiczne są takie same),
- weryfikacji logicznej konsekwencji (dla każdej interpretacji prawdziwość formuły musi pociągać prawdziwośc jej konsekwencji),
- wyznaczania interpretacji przy których formuła jest prawdziwa lub fałszywa.

Przykład. sprawdzimy, że formuła Φ jest tautologią.

$$\Phi = ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$$

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	Φ
0	0	0	1	1	**1**	**1**	**1**
0	0	1	1	1	**1**	**1**	**1**
0	1	0	1	0	**0**	**0**	**1**
0	1	1	1	1	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0	1	**0**	**0**	**1**
1	0	1	1	1	**1**	**1**	**1**
1	1	0	0	0	**0**	**0**	**1**
1	1	1	1	1	**1**	**1**	**1**

Wprowadzenie do logiki

Przykład zastosowania metody zero-jedynkowej

Zbadamy prawdziwość implikacji logicznej postaci:

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$$

p	q	r	s	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$	$p \vee r$	$q \vee s$	$(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$
0	0	0	0	1	1	**1**	0	0	**1**
0	0	0	1	1	1	**1**	0	1	**1**
0	0	1	0	1	0	**0**	1	0	**0**
0	0	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
0	1	0	0	1	1	**1**	0	1	**1**
0	1	0	1	1	1	**1**	0	1	**1**
0	1	1	0	1	0	**0**	1	1	**1**
0	1	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	0	1	**0**	1	0	**0**
1	0	0	1	0	1	**0**	1	1	**1**
1	0	1	0	0	0	**0**	1	0	**0**
1	0	1	1	0	1	**0**	1	1	**1**
1	1	0	0	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	0	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	1	0	1	0	**0**	1	1	**1**
1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

Z analizy kolumn 7 i 10 wynika, że implikacja jest prawdziwa. Poza wierszami 7, 10, 12 i 15 zachodzi ponadto równoważność.

Wprowadzenie do logiki

Ważniejsze reguły wnioskowania

- $\frac{p}{p \vee q}$ – reguła wprowadzania alternatywy,
- $\frac{p,\, q}{p \wedge q}$ – reguła wprowadzania koninkcji,
- $\frac{p \wedge q}{p}$ – reguła opuszczania koniunkcji,
- $\frac{p,\, p \Rightarrow q}{q}$ – reguła modus ponens (modus ponendo ponens),
- $\frac{p \Rightarrow q,\, \neg q}{\neg p}$ – reguła modus tollens (modus tollendo tollens),
- $\frac{p \vee q,\, \neg p}{q}$ – reguła ponendo tollens,
- $\frac{p \bigoplus q,\, p}{\neg q}$ – reguła ponendo tollens,
- $\frac{p \Rightarrow q,\, q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$ – reguła przechodniości (reguła sylogizmu hipotetycznego),
- $\frac{p \vee r,\, \neg r \vee q}{p \vee q}$ – reguła rezolucji,
- $\frac{p \wedge r,\, \neg r \wedge q}{p \wedge q}$ – odwrotna reguła rezolucji (konkluzja logiczna jest odwrócona),
- $\frac{p \Rightarrow q,\, r \Rightarrow s}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$ – prawo dylematy konstrukcyjnego,
- $\frac{p \Rightarrow q,\, r \Rightarrow s}{(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)}$ – prawo dylematy konstrukcyjnego.

Sprowadzanie dowolnych formuł do postaci normalnych

Sprowadzanie do CNF/DNF

1. $\Phi \Leftrightarrow \Psi \equiv (\Phi \Rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \Rightarrow \Phi)$ – eliminacja symboli równoważności,
2. $\Phi \Rightarrow \Psi \equiv \neg\Phi \vee \Psi$ – eliminacja symboli implikacji,
3. $\neg(\neg\Phi) \equiv \Phi$ – eliminacja zagnieżdżonych negacji,
4. $\neg(\Phi \vee \Psi) \equiv \neg\Phi \wedge \neg\Psi$ – zastosowanie prawa De Morgana do sprowadzania symbolu negacji bezpośrednio przed formułę atomową,
5. $\neg(\Phi \wedge \Psi) \equiv \neg\Phi \vee \neg\Psi$ – zastosowanie prawa De Morgana do sprowadzania symbolu negacji bezpośrednio przed formułę atomową,
6. $\Phi \vee (\Psi \wedge \Upsilon) \equiv (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Upsilon)$ – zastosowanie prawa rozdzielności alternatywy przy sprowadzaniu do CNF,
7. $\Phi \wedge (\Psi \vee \Upsilon) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Upsilon)$ – zastosowanie prawa rozdzielności koninkcji przy sprowadzaniu do DNF.

Przykład:

$$
\begin{gathered}
(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q = \neg(p \wedge (p \Rightarrow q)) \vee q = \\
\neg(p \wedge \neg(p \vee q)) \vee q = (\neg p \vee \neg\neg(p \vee q)) \vee q = \\
(\neg p \vee (p \vee q)) \vee q = (\neg p \vee p \vee p \vee q) \vee q = \\
(\neg p \vee p \vee q = 1 \vee q = 1.
\end{gathered}
$$

Sprowadzenie do postaci normalnej formuły zawsze prawdziwej (zawsze fałszywej) pozwala określić jej wartość logiczną.

Podstawowe definicje, określenia i twierdzenia

Definicja 5 *Formuła jest nazywana:*

- tautologią *wtw. gdy jest prawdziwa przy każdej interpretacji;*
- formułą falsyfikowalną *gdy nie jest tautologią,*
- formułą spełnialną *wtw. gdy istnieje taka interpretacja, przy której formuła ta jest prawdziwa;*
- formułą niespełnialną, formułą niespójną *lub* formułą sprzeczną *wtw. gdy przy każdej interpretacji fromuła ta jest fałszywa;*
- *fomuła* Ψ *jest* logiczną konsekwencją *formuły* Φ*, co notujemy* $\Phi \models \Psi$ *wtw. gdy dla każdej interpretacji przy której* Φ *jest prawdziwa również* Ψ *jest prawdziwa;*
- *formuła* Ψ *jest* wyprowadzalna *z formuły* Φ*, co notujemy* $\Phi \vdash \Psi$ *wtw. gdy istnieje ciąg reguł dowodzenia pozwalajacy uzyskać* Ψ *z* Φ*.*

Konsekwencje tych definicji:

- formuła jest tautologią wtw. gdy jej negacja jest niespełnialna (sprzeczna),
- formuła jest niespełnialna wtw. gdy jej negacja jest tautologią,
- formuła nie jest tautologią wtw. dla przynajmniej jednej inteerpretacji jest fałszywa,
- formuła jest niesprzeczna wtw. gdy dla przynajmniej jednej interpretacji jest prawdziwa,
- tautologia jest zawsze formułą spełnialną (ale nie odwrotnie),
- formuła niespełnialna jest formułą falsyfikowalną (ale nie odwrotnie).

Zasady dowodzenia

Twierdzenia o dedukcji

Twierdzenie 1 *Jeżeli* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ *są formułami logicznymi (nazywanymi aksjomatami), formuła* Ω *(nazywana hipotezą lub konkluzją) jest ich logiczną konsekwencją wtw. gdy formuła* $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \Rightarrow \Omega$ *jest tautologią.*

Twierdzenie 2 *Jeżeli* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ *są formułami logicznymi (nazywanymi aksjomatami), formuła* Ω *(nazywana hipotezą lub konkluzją) jest ich logiczną konsekwencją wtw. gdy formuła* $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \wedge \neg\Omega$ *jest sprzeczna.*

Problem dowodzenia twierdzeń ma postać: mając dane aksjomaty $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ uznane za prawdziwe wykazać prawdziwość hipotezy Ω. Tak więc należy wykazać, że:

$$\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \models \Omega$$

Stosowane są następujące metody:

- sprawdzanie wszystkich możliwych interpretacji (wada: duża złożoność obliczeniowa),
- *dowód wprost* – korzystając z aksjomatów i reguł dowodzenia generujemy nowe formuły aż do uzyskania formuły Ω,
- *dowodzenie tautologii* – korzystając z Tw.1 dowodzimy, że formuła $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \Rightarrow \Omega$ jest tautologią,
- *dowód nie wprost* – to dowód twierdzenia przeciwstawnego, równoważnego danemu. Polega na dowodzeniu twierdzenia postaci $\neg\Omega \models \neg(\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n)$.
- dowód przez *sprowadzenie do sprzeczności*; korzystają z Tw.2, polega na wykazaniu sprzeczności formuły: $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \ldots \Delta_n \wedge \neg\Omega$.