Modelowanie Wieloskalowe

Metoda rozwiązywania równań różniczkowych

Dr hab. inż. **Łukasz Madej**
Katedra Informatyki Stosowanej i Modelowania
Wydział Inżynierii Metali i Informatyki Przemysłowej

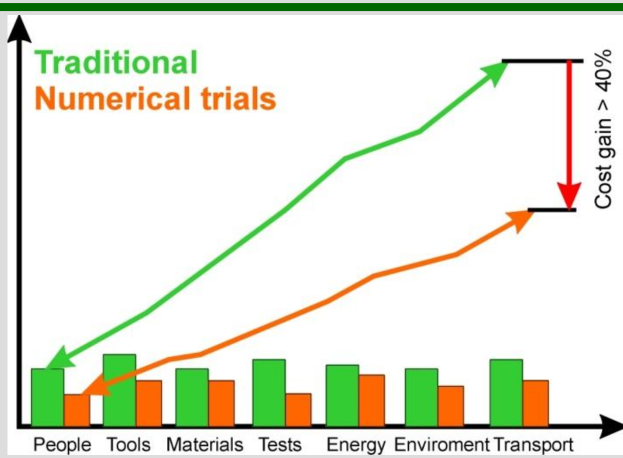
Budynek B5
p. 716
lmadej@agh.edu.pl
home.agh.edu.pl/lmadej

Tworzenie modelu → **Symulacja numeryczna** → **Produkt**

Kształt/ własności

złe → **Tworzenie modelu**

wymagane → **Produkt końcowy**



Równanie różniczkowe

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{f}\left(x, u\right)$$

Rozwiązanie numeryczne

Rozwiązanie analityczne

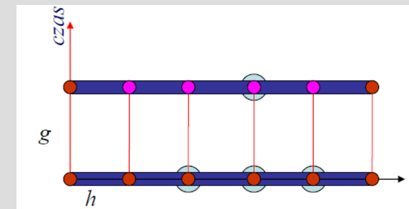
Możliwe dla pewnych prostych funkcji **f**.

Metoda:
Eulera,
Runge-Kutty,
Różnic skończonych
Elementów skończonych
Elementów brzegowych

Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych jest metoda polegająca na przybliżeniu pochodnej funkcji poprzez serie skończonych różnic, w analizowanej dyskretnej przestrzeni obliczeniowej.

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{f}(x,u)$$



iloraz różnicowy przedni

$$\dot{f}_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

iloraz różnicowy tylny

$$\dot{f}_i = \frac{f_i - f_{i+1}}{h} + O(h)$$

iloraz różnicowy centralny

$$\dot{f}_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$\ddot{f}_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{f}(x_0,u_0) + \mathrm{f}(x_1,u_1)\right]$$

$$\frac{u_2 - u_1}{h} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{f}(x_1,u_1) + \mathrm{f}(x_2,u_2)\right]$$

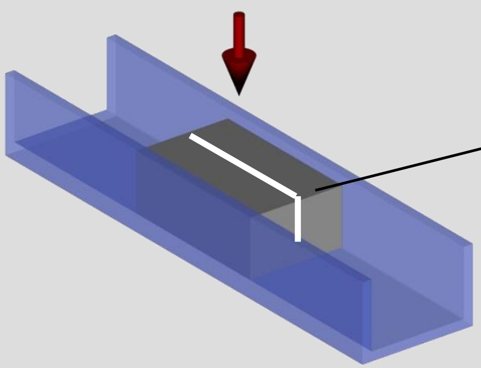
....

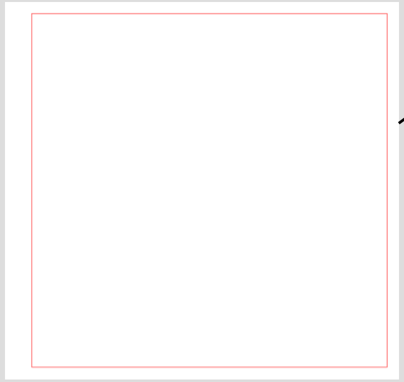
$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{f}(x_{n-1},u_{n-1}) + \mathrm{f}(x_n,u_n)\right]$$

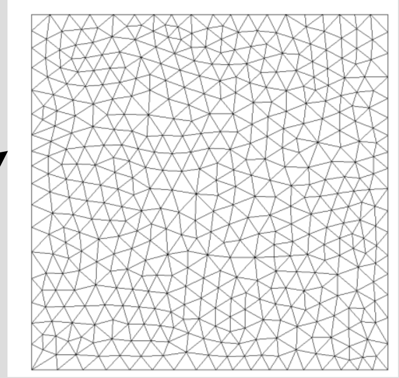
Metoda elementów skończonych

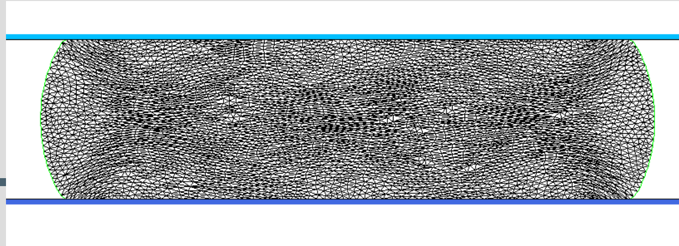
Zasadnicze etapy analizy MES

1. zdefiniowanie analizowanego problemu fizycznego
2. dyskretyzacja regionu rozwiązania skończoną ilością subregionów lub elementów,
3. wyprowadzenie równań dla typowego elementu,
4. złożenie wszystkich elementów w regionie rozwiązania,
5. rozwiązanie uzyskanego układu równań.







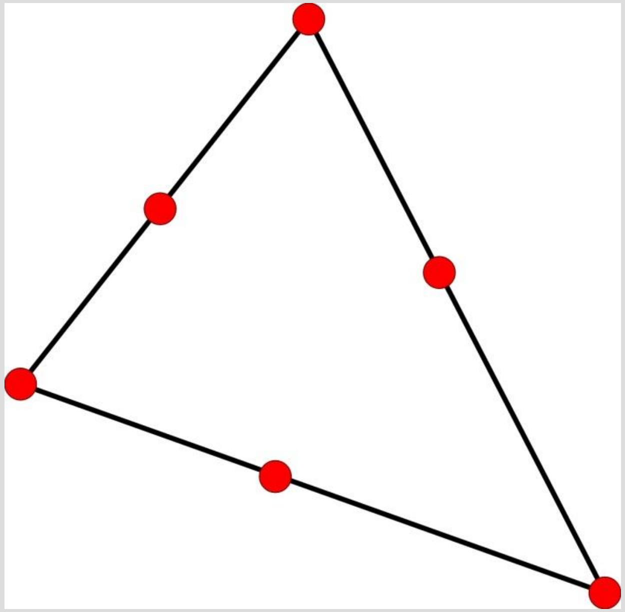


Definicja:

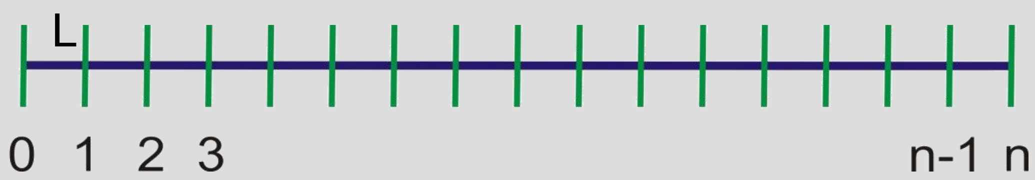
Element skończony - prosta figura geometryczna w przestrzeni 1D, 2D lub 3D, dla której określone zostały wyróżnione punkty zwane **węzłami**, oraz pewne **funkcje kształtu** służące do opisu rozkładu analizowanej wielkości w jego wnętrzu i na jego bokach.

Węzły - zlokalizowane w wierzchołkach elementu skończonego. W bardziej skomplikowanych przypadkach mogą być również umieszczone na jego bokach i w jego wnętrzu.

Funkcje kształtu - są tak zbudowane, aby w węzłach których dotyczą ich wartości wynosiły jeden, a w pozostałych węzłach przyjmowały wartość zero.

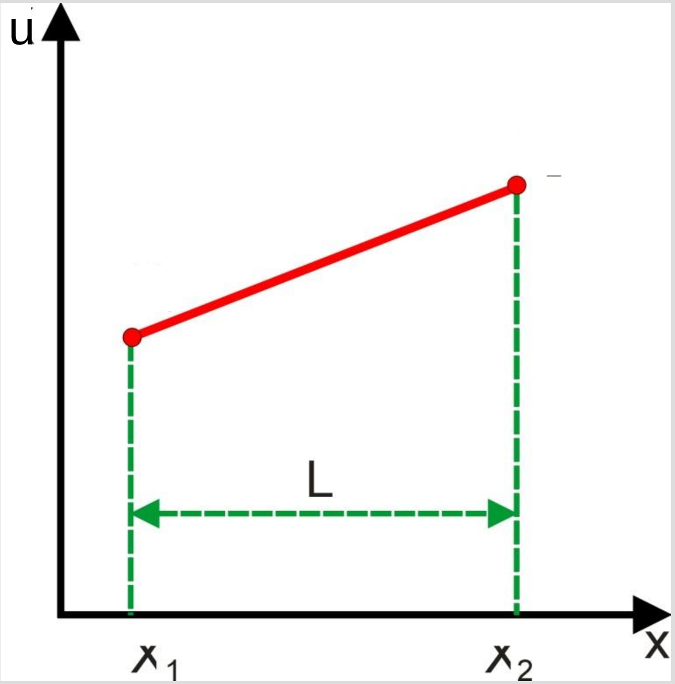


W metodzie elementów skończonych. obszar rozwiązania dzielimy na małe elementy o długości *L* i w każdym elemencie interpolujemy szukaną funkcję *u*(*x*) funkcją liniową.



Funkcje interpolacyjne – 1D

$$u = a_1 + a_2 X$$



Współczynniki a_1 i a_2 wyznacza się za pomocą założonych warunków w punktach węzłowych:

$$u = u_i \quad dla \quad X = X_i$$

$$u = u_j \quad dla \quad X = X_j$$

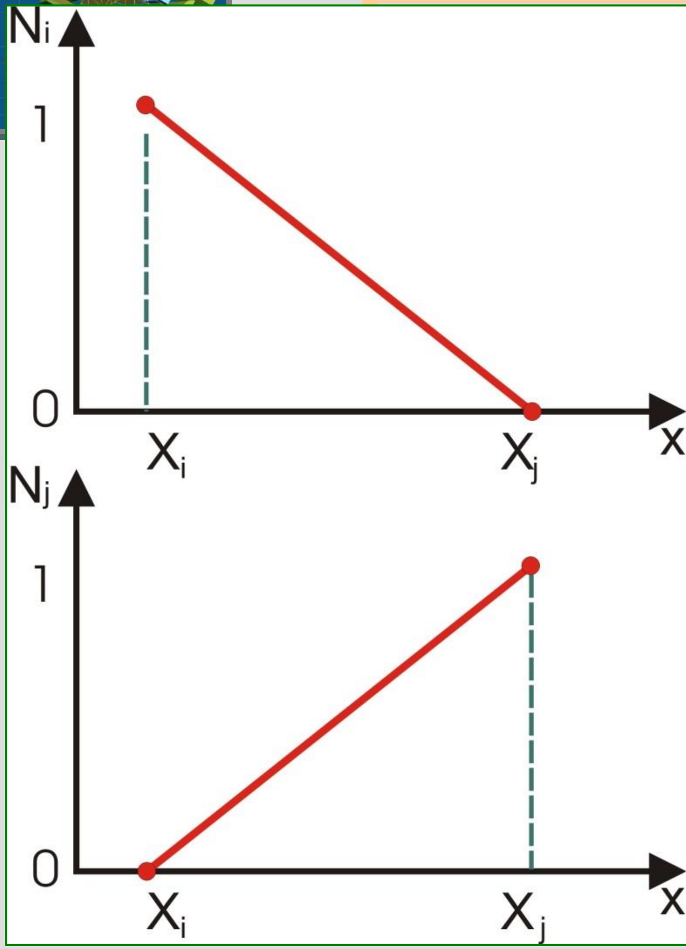
$$u_i = a_1 + a_2 X_i$$

$$u_j = a_1 + a_2 X_j$$

$$a_1 = \frac{u_i X_j - u_j X_i}{L}$$

$$a_2 = \frac{u_j - u_i}{L}$$

Funkcje kształtu – 1D



$$N_i = \frac{X_j - X}{L}$$

$$N_j = \frac{X - X_i}{L}$$

$$u = N_i u_i + N_j u_j = \left[N_i , N_j \right] \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = [N][u]$$

Metoda elementów a różnic skończonych

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{f}\left(x,u\right)$$

obszar rozwiązania dzielimy na małe elementy o długości *L* i w każdym elemencie interpolujemy szukaną funkcję *u*(*x*) funkcją liniową, zależną od wartości funkcji *u* w węzłach

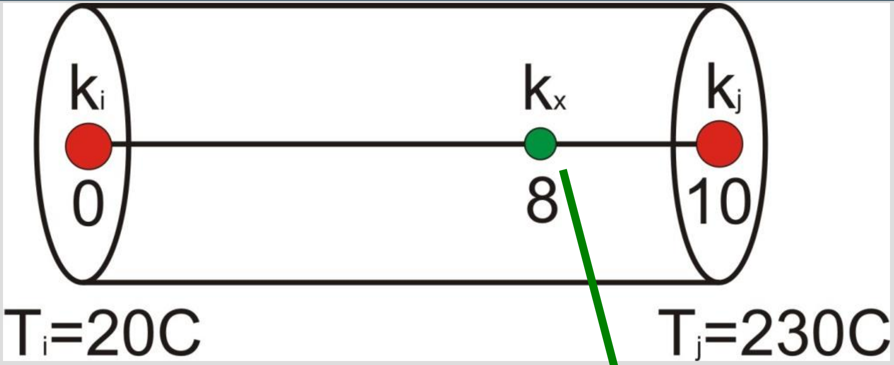
$$u(x) = n_1 u_1 + n_2 u_2$$

$$n_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \qquad n_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dn_1}{dx} u_1 + \frac{dn_2}{dx} u_2 = -\frac{u_1}{x_2 - x_1} + \frac{u_2}{x_2 - x_1} = \frac{u_2 - u_1}{h}$$

W tym przypadku rozwiązania metodą elementów skończonych i metodą różnic skończonych są identyczne. Różnice pojawiają się w przypadku równań różniczkowych wyższego rzędu lub funkcji wielu zmiennych

Przykład - Temperatura w punkcie



T?

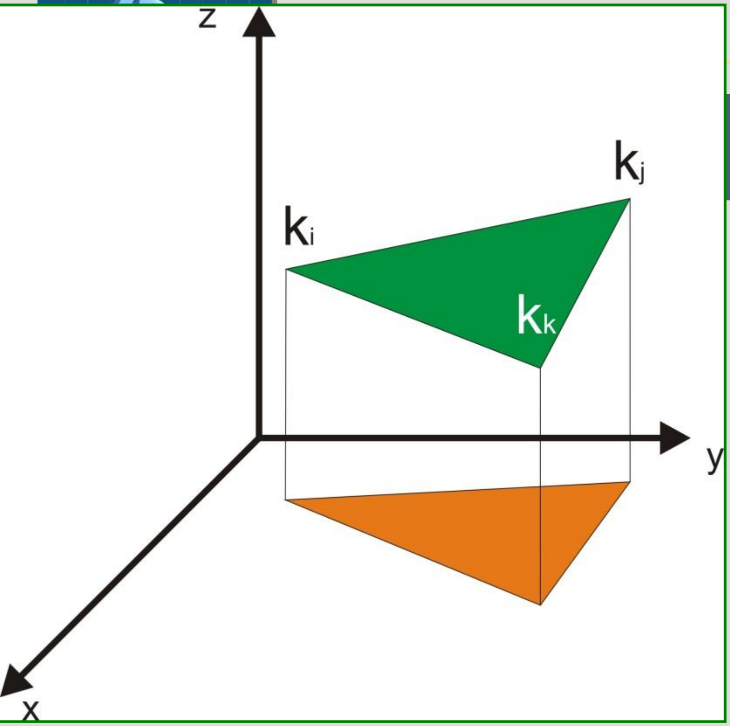
$$N_i = \frac{X_j - X_k}{X_j - X_i} = \frac{10-8}{10-0} = 0.2$$

$$N_j = \frac{X_k - X_i}{X_j - X_i} = \frac{8-0}{10-0} = 0.8$$

$$N_i + N_j = 0.2 + 0.8 = 1.0$$

$$k_x = k_i N_i + k_j N_j = 0.2 \cdot 20 + 0.8 \cdot 230 = 188^{o}\text{C}$$

Funkcje interpolacyjne – 2D



$$k = k_i N_i + k_j N_j + k_k N_k = \left[N\right]^T \left[k\right]$$

$$N_i = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i X + c_i Y\right)$$

$$N_j = \frac{1}{2A}\left(a_j + b_j X + c_j Y\right)$$

$$N_k = \frac{1}{2A}\left(a_k + b_k X + c_k Y\right)$$

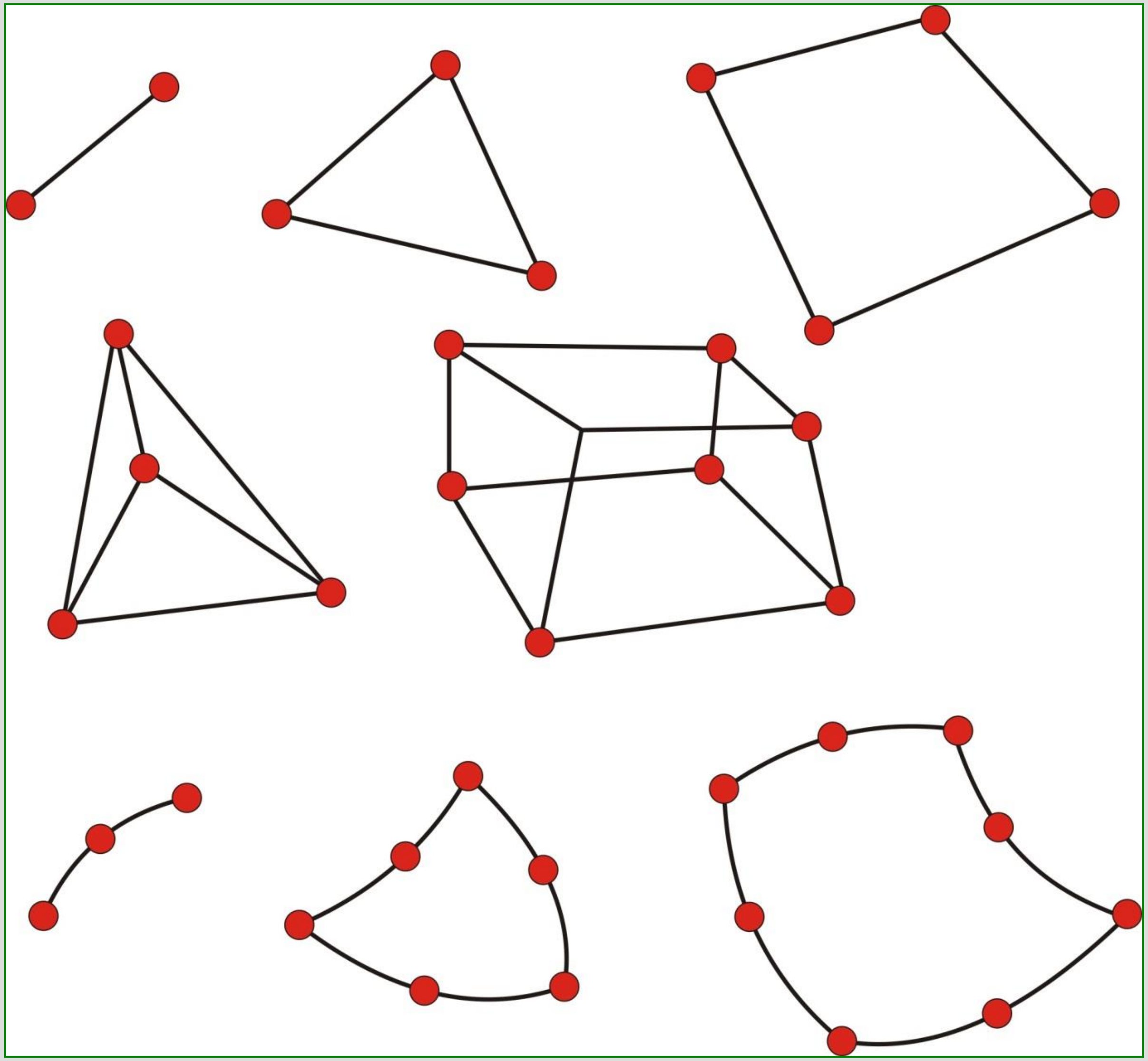
$$2A = \det A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}$$

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j$$
$$b_i = Y_j - Y_k$$
$$c_i = X_k - X_j$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k$$
$$b_j = Y_k - Y_i$$
$$c_j = X_i - X_k$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i$$
$$b_k = Y_i - Y_j$$
$$c_k = X_j - X_i$$

Przykłady elementów skończonych – 1D, 2D i 3D



Matematyka w MES

Dyskretyzacja w MES dla dowolnego elementu ma postać:

$$u = \sum_{i=1}^{n} n_i u_i = \mathbf{n}^T \mathbf{u}$$

wektor wartości funkcji w węzłach siatki

wektor funkcji kształtu

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q = 0$$

problem brzegowy

Funkcjonał + warunki brzegowe

$$J = \int_V \left[\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - Qu\right]dV - \int_S \left[\left(q + \alpha u_0\right)u - \frac{\alpha}{2}u^2\right]dS$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{n}^T\mathbf{u}\right) = \frac{\partial \mathbf{n}^T}{\partial x}\mathbf{u}$$

$$J=\int_V\left[\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial \mathbf{n}^T}{\partial x}\mathbf{u}\right)^2-Q\mathbf{n}^T\mathbf{u}\right]dV-\int_S\left[\left(q+\alpha u_0\right)\mathbf{n}^T\mathbf{u}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{n}^T\mathbf{u}\right)^2\right]dS$$

Zadanie sprowadza się do poszukiwania wartości funkcji *u* w węzłach siatki, dla których funkcja *J* przyjmie najmniejszą wartość

$$\frac{dJ}{d\mathbf{u}^T}=\int_V\left[k\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{n}^T}{\partial x}\mathbf{u}\right)^2-Q\mathbf{n}\right]dV-\int_S\left[\left(q+\alpha u_0\right)\mathbf{n}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{n}^T\mathbf{u}\right)^2\right]dS$$

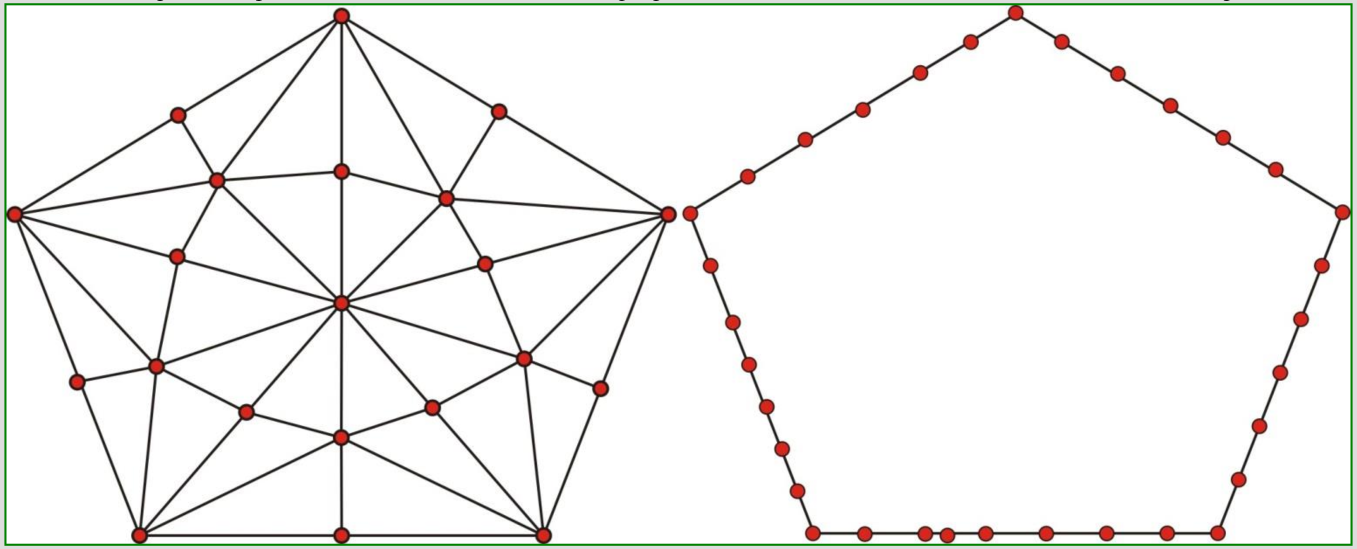
Hu=p

$$H_{ij}=\int_V\left(k\frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}\right)dV+\int_S\alpha N_i N_j dS \qquad p_i=\int_V QN_i dV+\int_S\left(q+\alpha u_0\right)N_i dS$$

Metoda elementów brzegowych

Podobnie jak MES, Metoda Elementów Brzegowych (MEB)

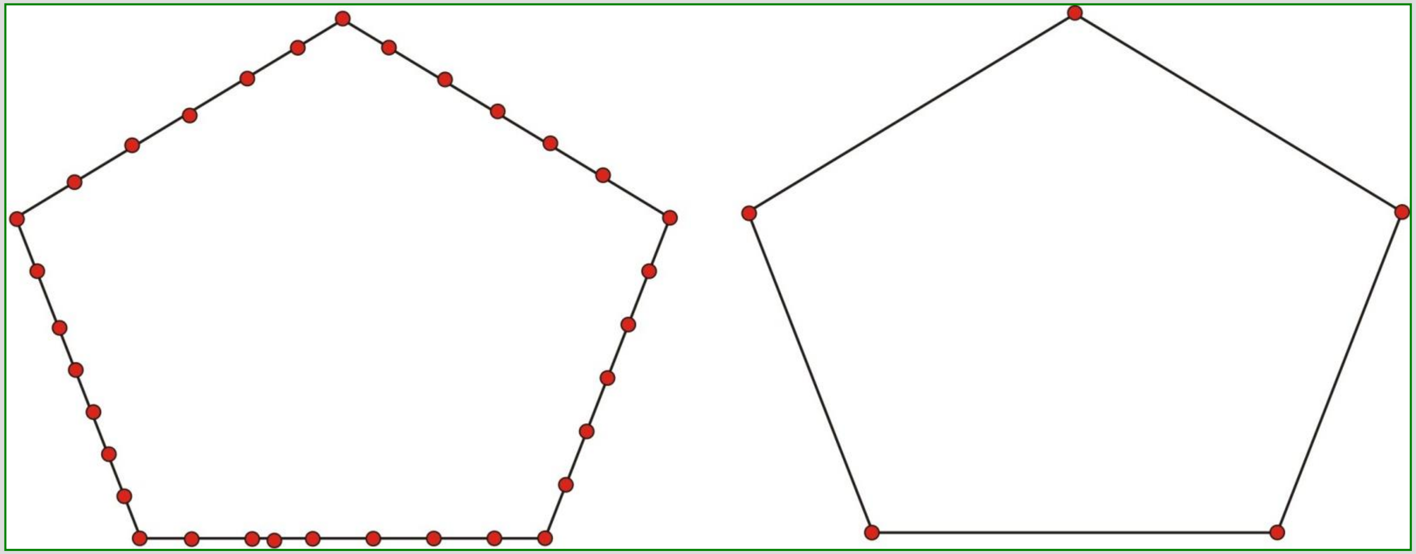
jest jedną z numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych.



MES MEB

Jej ideą jest sprowadzenie danego **zagadnienia brzegowego** do **równoważnego równania całkowego**, które jest określone na brzegu danego obszaru, co jest równoważne ze **zmniejszeniem rozmiaru problemu**.

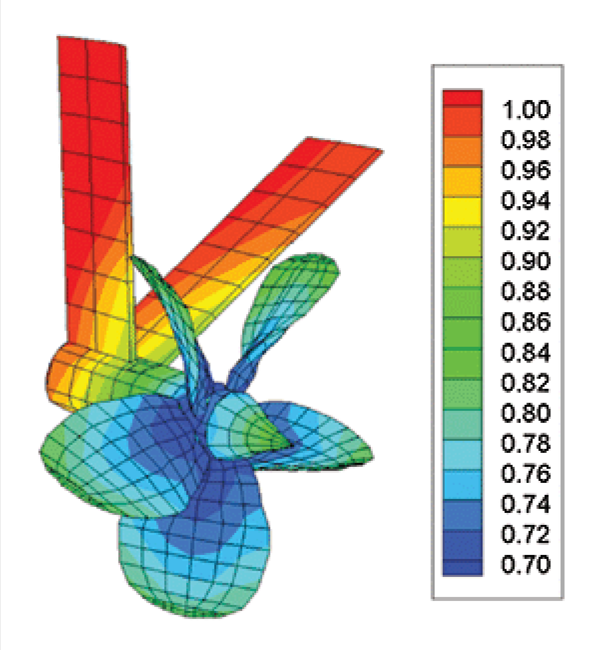
Parametryczny układ równań całkowych (PURC)

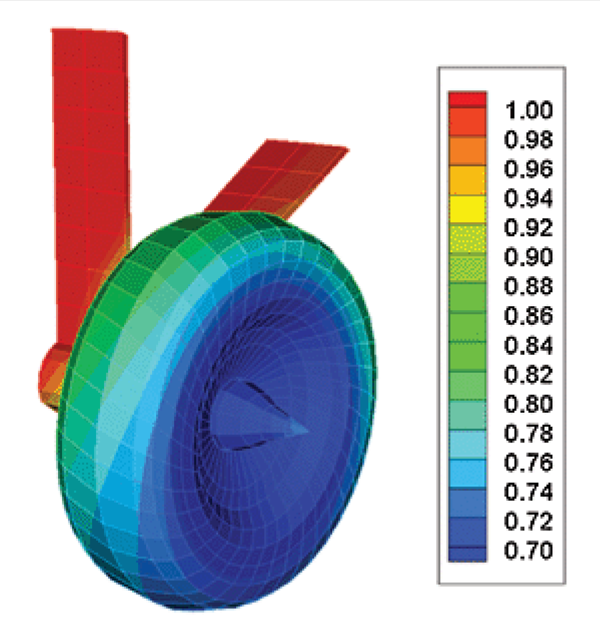


MEB PURC

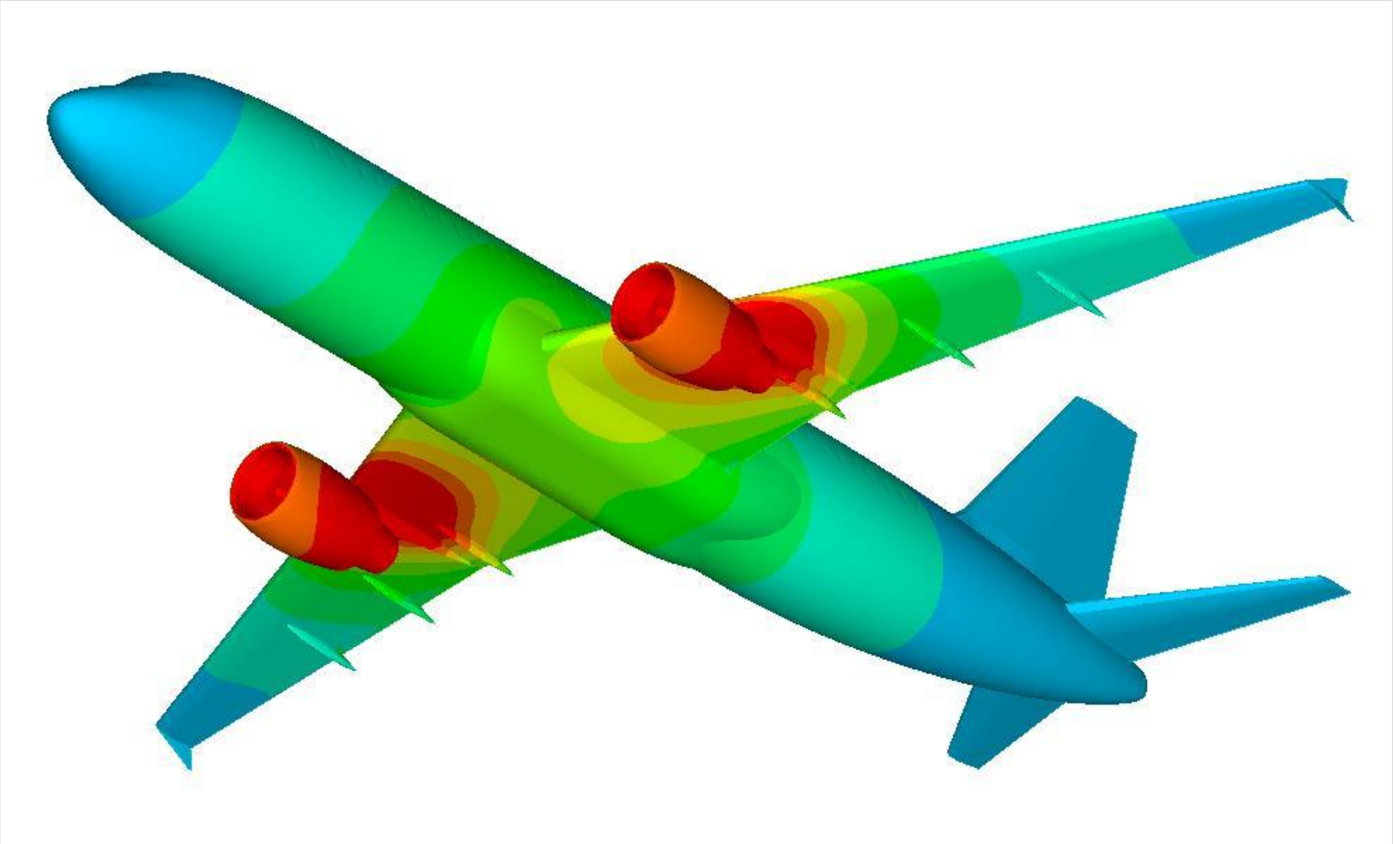
Równanie całkowe w bardzo wielu przypadkach wymaga dyskretyzacji tylko brzegu, dzięki czemu wymiar zadanego problemu maleje, a zarazem otrzymywane wyniki są dokładniejsze niż w momencie, kiedy musimy zbudować siatkę z całego ciała.

Zaleta ta jest najbardziej widoczna w dużych zadaniach inżynierskich, ponieważ znaczne zmniejszenie ilości węzłów i elementów znacznie skraca zarówno czas obliczeń, jak i przede wszystkim czas potrzebny na zbudowanie siatki.





Źródło: US Naval Reserach Laboratory



Metoda objętości skończonych

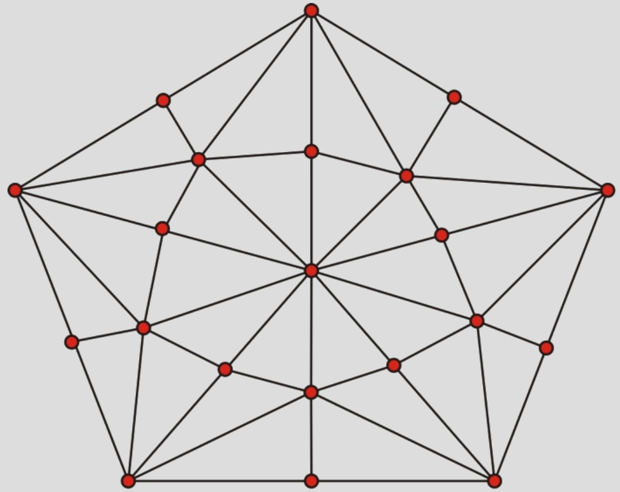
Metoda objętości skończonych to metoda numeryczna rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych.

Podobnie jak MES i MRS jej założeniem jest przedstawienie równania różniczkowego w postaci układu równań algebraicznych.

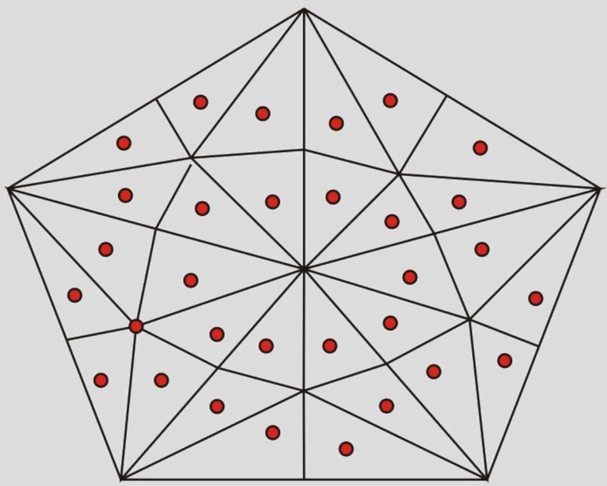
Podobnie jak w innych metodach tego typu, szukane wartości są liczone w węzłach.

Jest to metoda wykorzystująca siatkę, która aproksymuje kształt obiektu. Wokół danego węzła budowany jest **obszar kontrolny**. W obszarze tym wymagane jest spełnienie warunku opisanego przez równanie różniczkowe. Warunek ten nie musi być spełniony w każdym punkcie lecz sumarycznie w całej objętości obszaru kontrolnego.

Obszar kontrolny jest równoważny komórce siatki lub jest zbudowany niezależnie od niej.



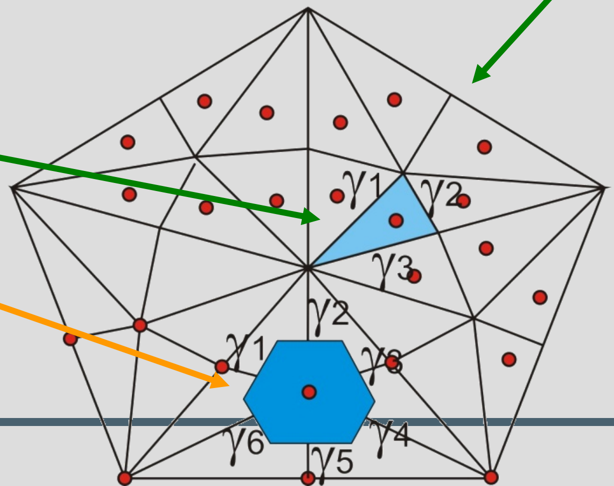
MES



MOS

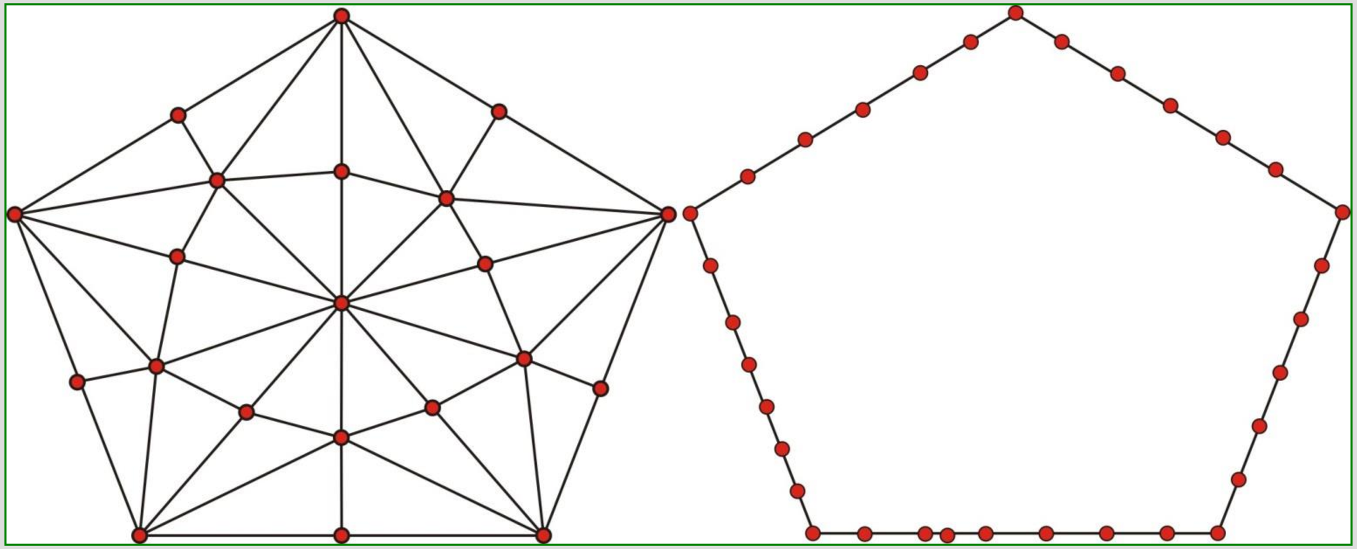
•obszar kontrolny równoważny jest komórce siatki

•obszar kontrolny zbudowany jest wokół węzła siatki



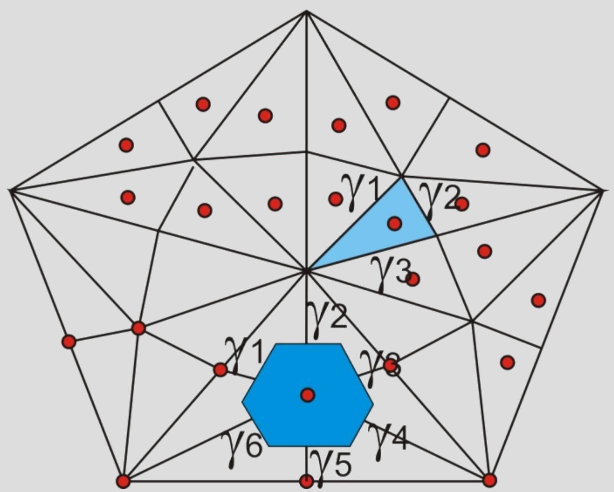
MOVIE 1

MOVIE 2



MES

MEB



γ_1
γ_2
γ_3
γ_2
γ_1
γ_3
γ_4
γ_5
γ_6

MOS