Modelowanie dyskretne

Automaty Komórkowe - podstawy

Prof. dr hab. inż. **Łukasz Madej**
Katedra Informatyki Stosowanej i Modelowania
Wydział Inżynierii Metali i Informatyki Przemysłowej

Budynek B5
p. 603
lmadej@agh.edu.pl
617 51 54

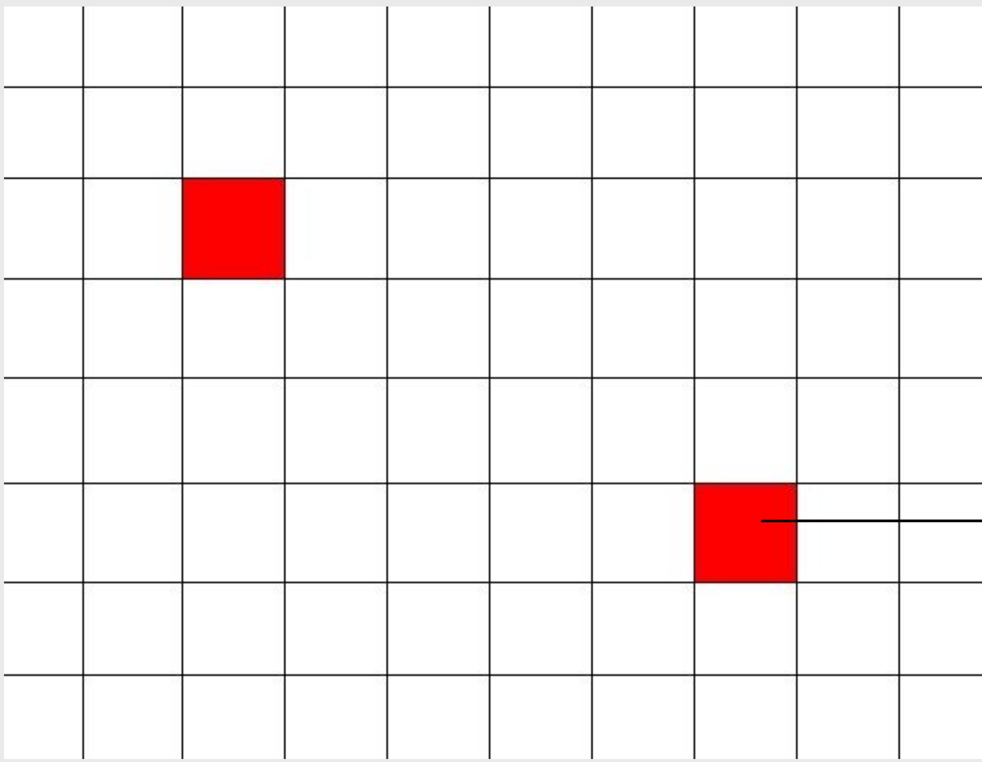
Metoda Automatów Komórkowych

Początki metody automatów komórkowych nierozerwalnie wiążą się z nazwiskiem węgierskiego badacza ***Johna von Neumana***, ustanowił on podwaliny pod dalszy rozwój tej metody który nastąpił wraz z rozwojem mocy obliczeniowej komputerów.

Idea automatów komórkowych polega na zastąpieniu zbioru skomplikowanych równań opisujących zachowanie się wielu układów fizycznych, przestrzenią komórek opisujących dany układ z jednoznacznie określonymi regułami interakcji między nimi.

Metoda Automatów Komórkowych - przestrzeń automatów

Przestrzeń automatów - skończony zbiór komórek, w którym każda komórka opisana jest zestawem zmiennych określających jej stan.



Ważne parametry

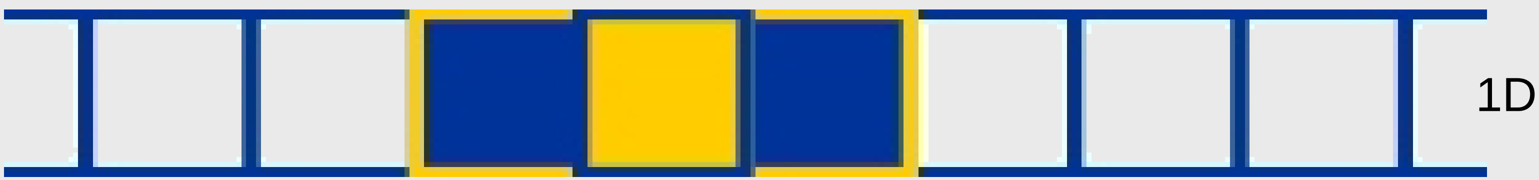
- wymiar sieci ***D (np.*** $\boldsymbol{D_x, D_y}$ ***)***,
- ilość stanów pojedynczej komórki ***k***

Stan 1 – biała
Stan 2 - czerwona

***k* = 2**

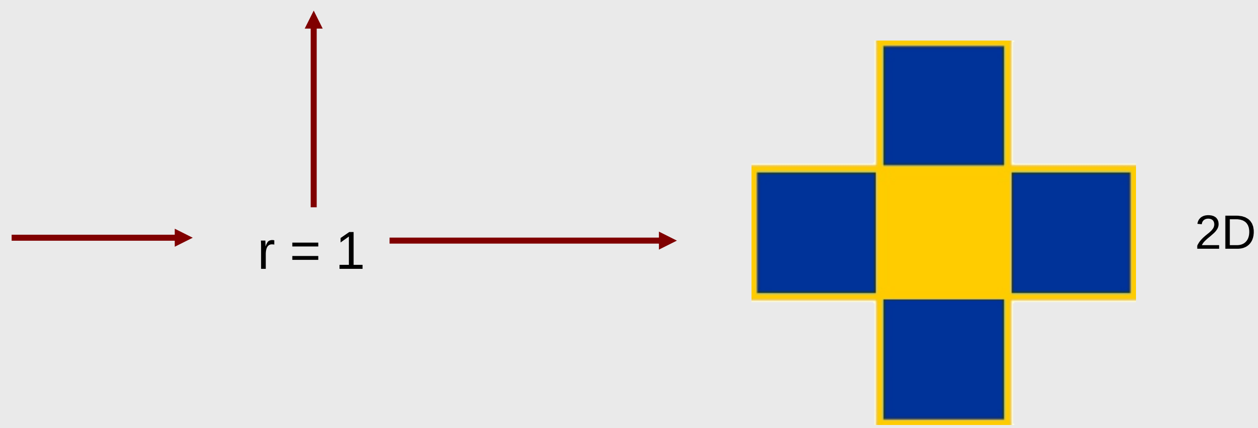
Metoda Automatów Komórkowych - otoczenie, reguły

Otoczenie - uniwersalne dla wszystkich komórek, określa najbliższych sąsiadów danej komórki. Otoczenie może być rozpatrywane w przestrzeni 1D, 2D oraz 3D.



Ważne parametry

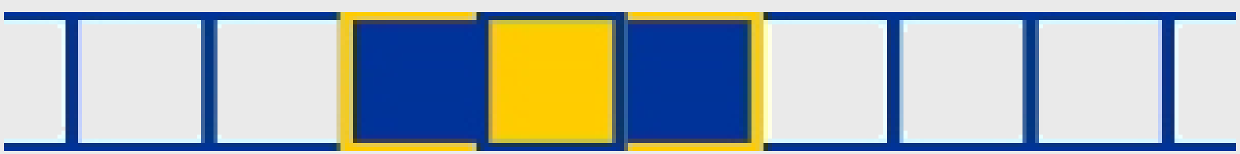
- promień otoczenia ***r***
- rodzaj sąsiedztwa



Reguły przejścia - *f*, ściśle określają zamianę stanu komórki w czasie *t+1* w zależności od stanów najbliższych sąsiadów oraz jej samej w czasie *t*

$$\gamma_i^{t+1} = f\left(\gamma_j^t\right) \quad \text{gdzie} \quad j \in N\left(i\right)$$

N(i) – otoczenie i-tej komórki, γ_i – stan i-tej komórki



Kilka uwag

Podstawowymi zaletami takiego podejścia jest założenie skończonych rozmiarów siatki komórek, których stany zmieniają się synchronicznie w dyskretnie zdefiniowanym kroku czasowym.

Poprzez założenie oddziaływania tylko z najbliższymi sąsiadami pomijane są wpływy oddziaływań dalekiego zasięgu.

W powszechnie stosowanej notacji automaty oznacza się jako (k,r)

k = 2

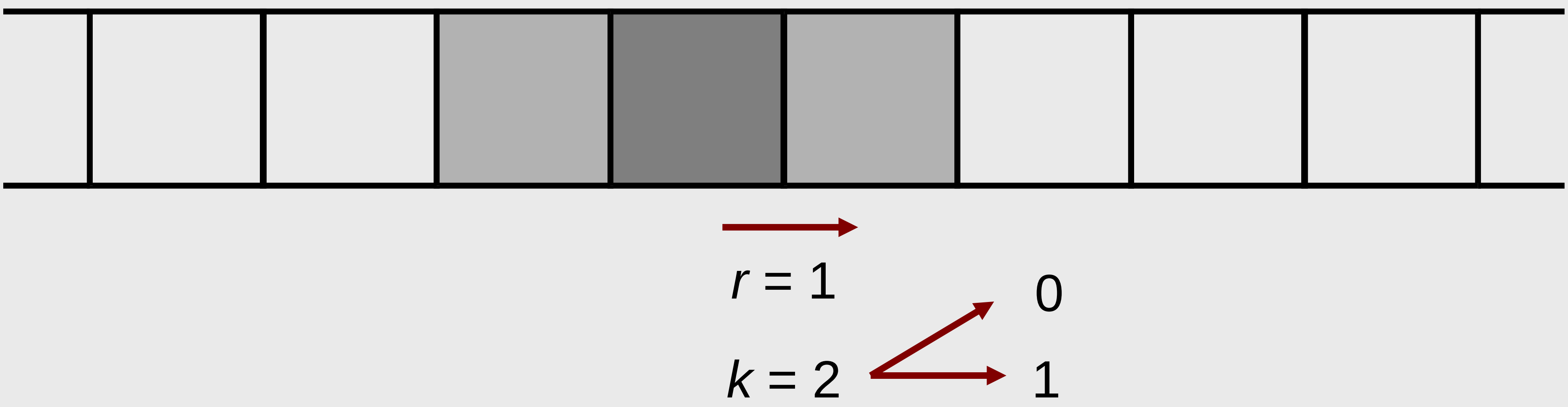
r = 1

(2,1)

Sąsiedztwo – 1D

Automaty definiowane są jako kolonia w kształcie linii prostej, ułożone są jeden obok drugiego a każda komórka posiada dwóch najbliższych sąsiadów (r = 1).

Jest to grupa automatów deterministycznych o dwóch dostępnych stanach komórki (k = 2). W notacji CA automaty te oznacza się jako (**2,1**).



Sąsiedztwo – 1D

Jest to najprostsza forma automatu komórkowego nazwana przez S. Wolframa, ***automatami elementarnymi***.

Stwierdził on, że przy istnieniu tylko dwóch sąsiadów z których każdy może przyjmować dwa różne stany istnieje 256 reguł przejścia dla takich automatów.

Reguła 90

Ewolucja w czasie

t	1 1 1	1 1 0	1 0 1	1 0 0	0 1 1	0 1 0	0 0 1	0 0 0
t+1	0	1	0	1	1	0	1	0

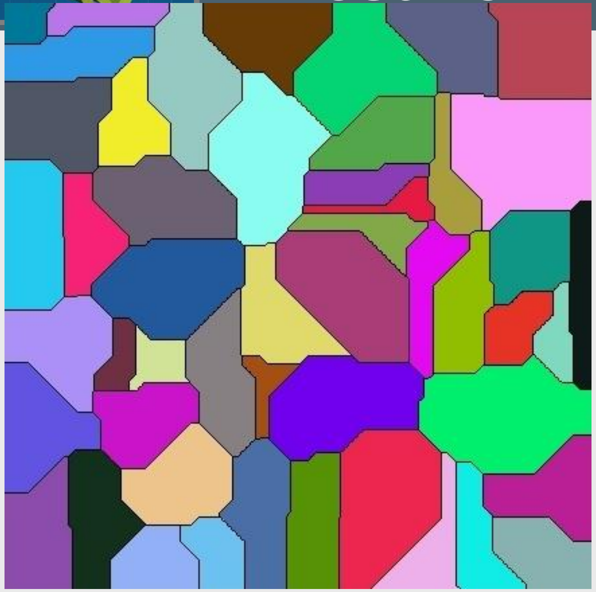
Przestrzeń 2 D automatów komórkowych.

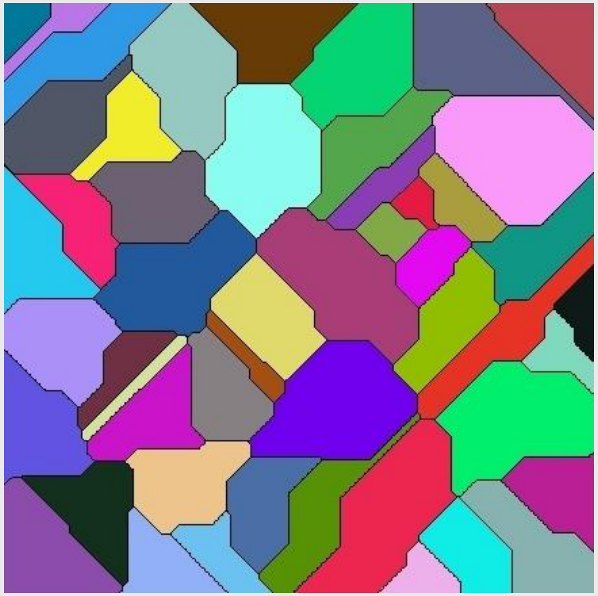
W tym przypadku kształt przestrzeni automatów komórkowych określony jest poprzez kształt pojedynczej komórki automatu.

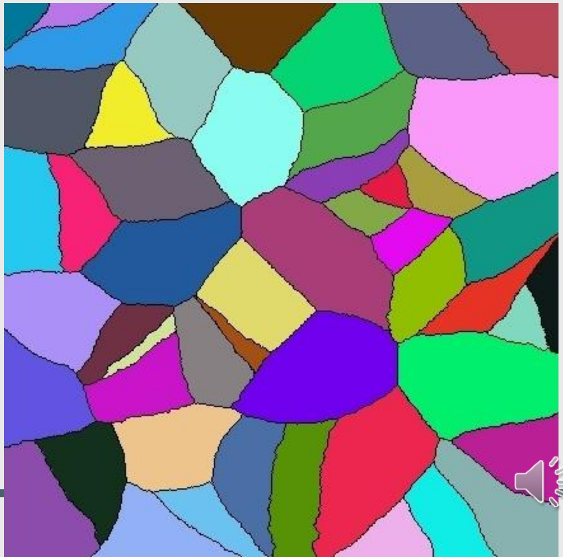
Zazwyczaj przyjmuje się kształt kwadratu, w konsekwencji czego kształt siatki automatów jest prostokątem, spotyka się jednak również komórki o innych kształtach.

Definiowanie sąsiedztwa w tym przypadku jest jedną z kluczowych spraw wpływających na uzyskiwane obliczenia.

Przestrzeń 2 D automatów komórkowych.

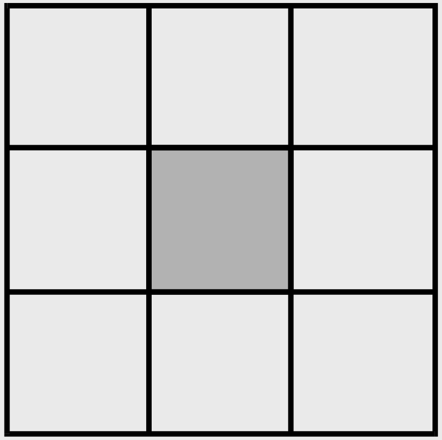




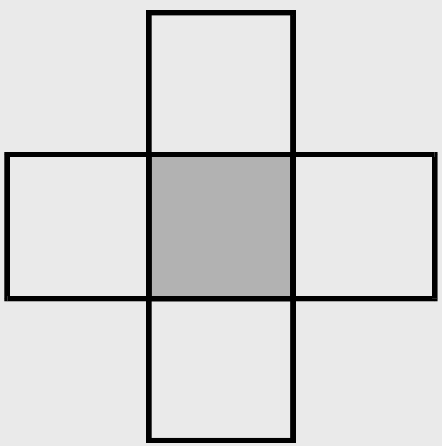


Przestrzeń 2 D automatów komórkowych.

Otoczenie



Otoczenie Moore'a



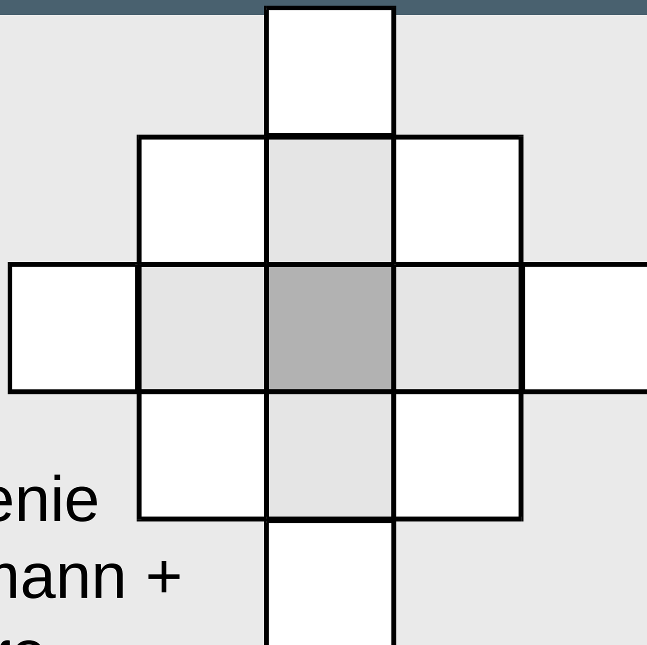
Otoczenie von Neumann'a

Zapis w formie reguł

$$\gamma_{i,j}^{t+\Delta t} = f\begin{pmatrix} \gamma_{i-1,j-1}^{t}, & \gamma_{i-1,j}^{t}, & \gamma_{i-1,j+1}^{t}, \\ \gamma_{i,j-1}^{t}, & \gamma_{i,j}^{t}, & \gamma_{i,j+1}^{t}, \\ \gamma_{i+1,j-1}^{t}, & \gamma_{i+1,j}^{t}, & \gamma_{i+1,j+1}^{t} \end{pmatrix}$$

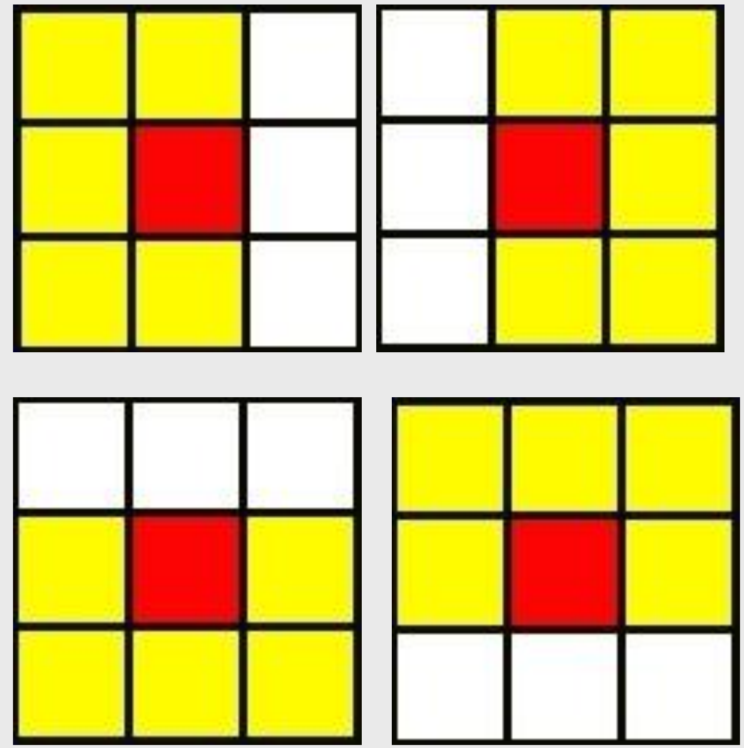
$$\gamma_{i,j}^{t+\Delta t} = f\begin{pmatrix} & \gamma_{i-1,j,}^{t} & \\ \gamma_{i,j-1,}^{t} & \gamma_{i,j,}^{t} & \gamma_{i,j+1}^{t} \\ & \gamma_{i+1,j,}^{t} & \end{pmatrix}$$

Przestrzeń 2 D automatów komórkowych.

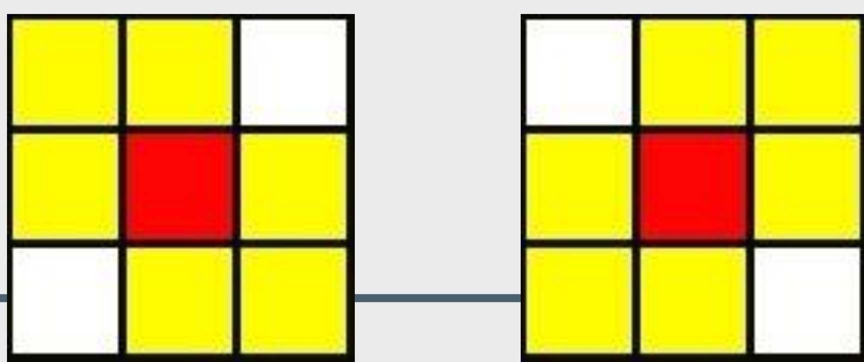


Otoczenie
von Neumann +
Moore

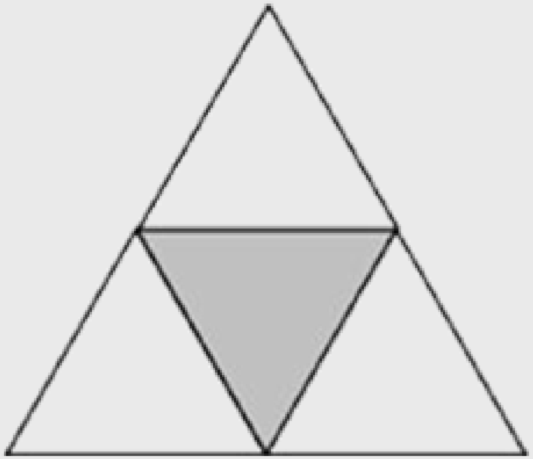
Otoczenie pentagonalne



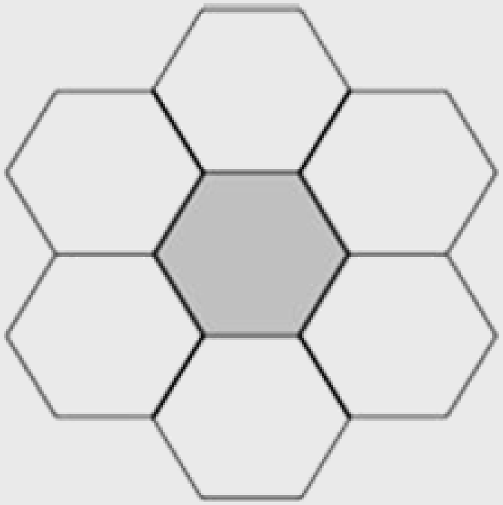
Otoczenie heksagonalne



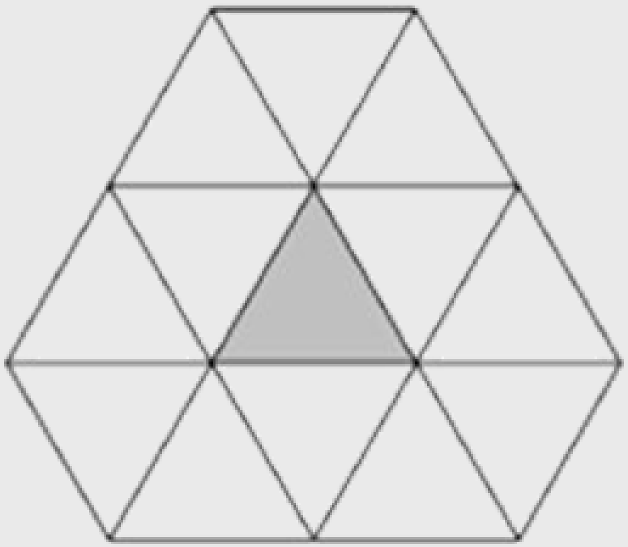
Przestrzeń 2 D automatów komórkowych.



Siatka trójkątna – sąsiednie krawędzie



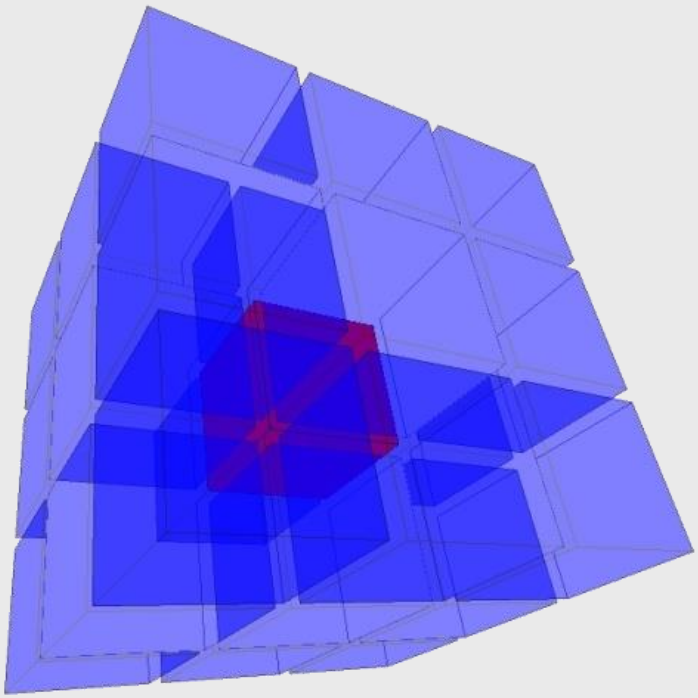
Siatka sześciokątna – sąsiednie krawędzie/węzły



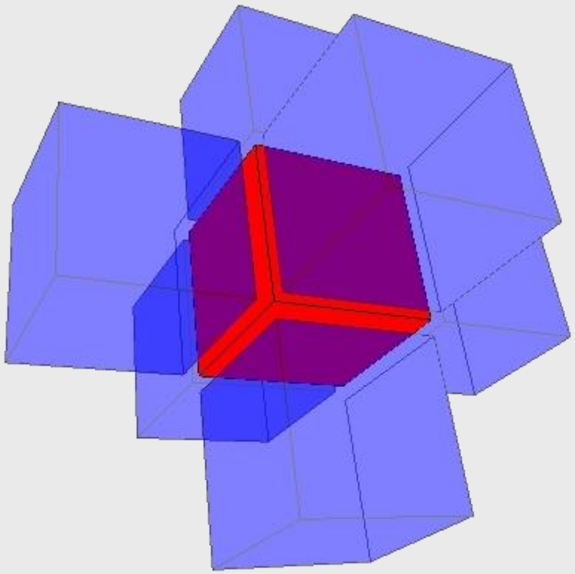
Siatka trójkątna – sąsiednie węzły

Przestrzeń 3 D automatów komórkowych.

Moore



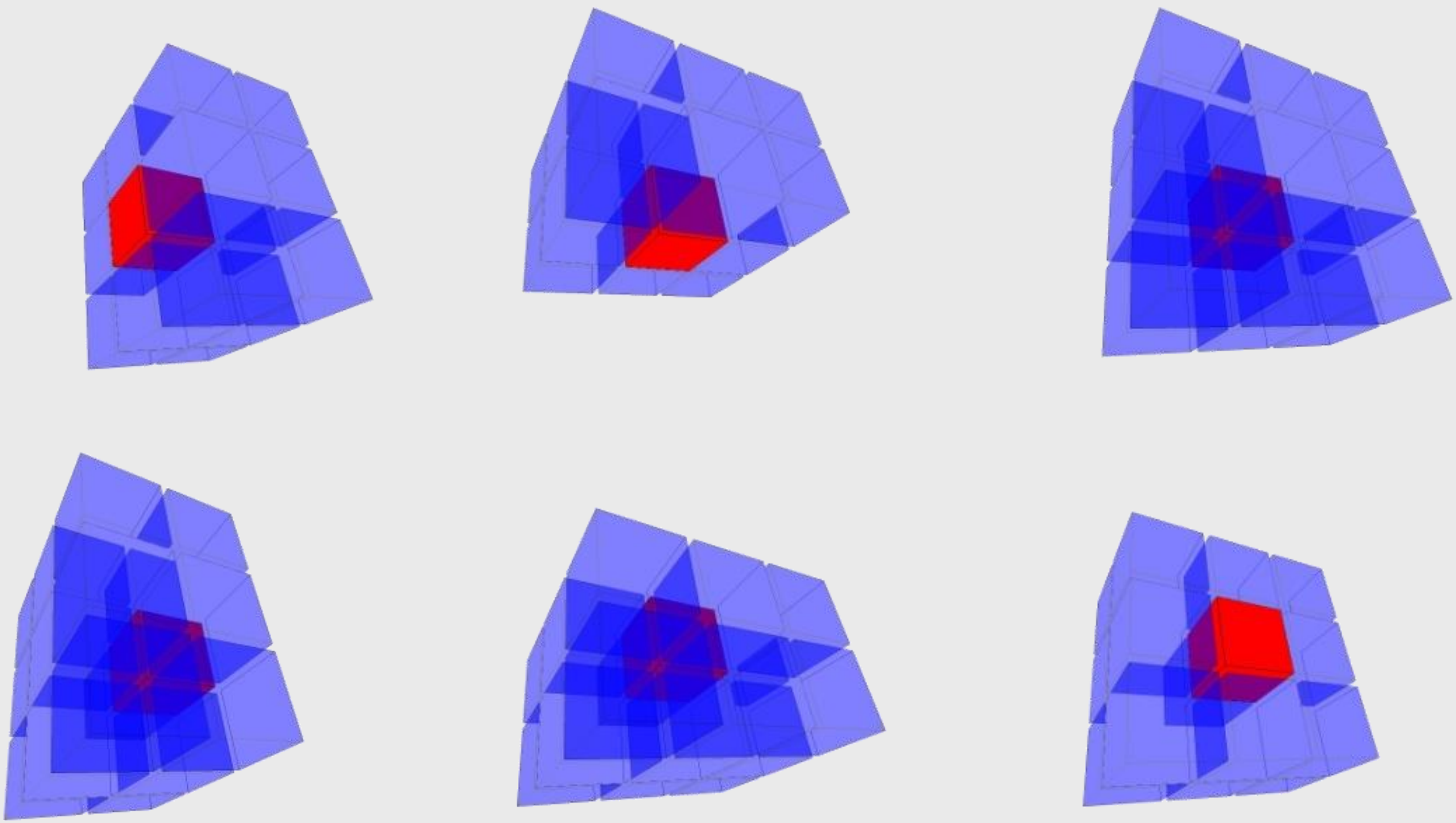
von Neumana



Zatem pojedyncza komórka otoczona jest poprzez 26 sąsiadów

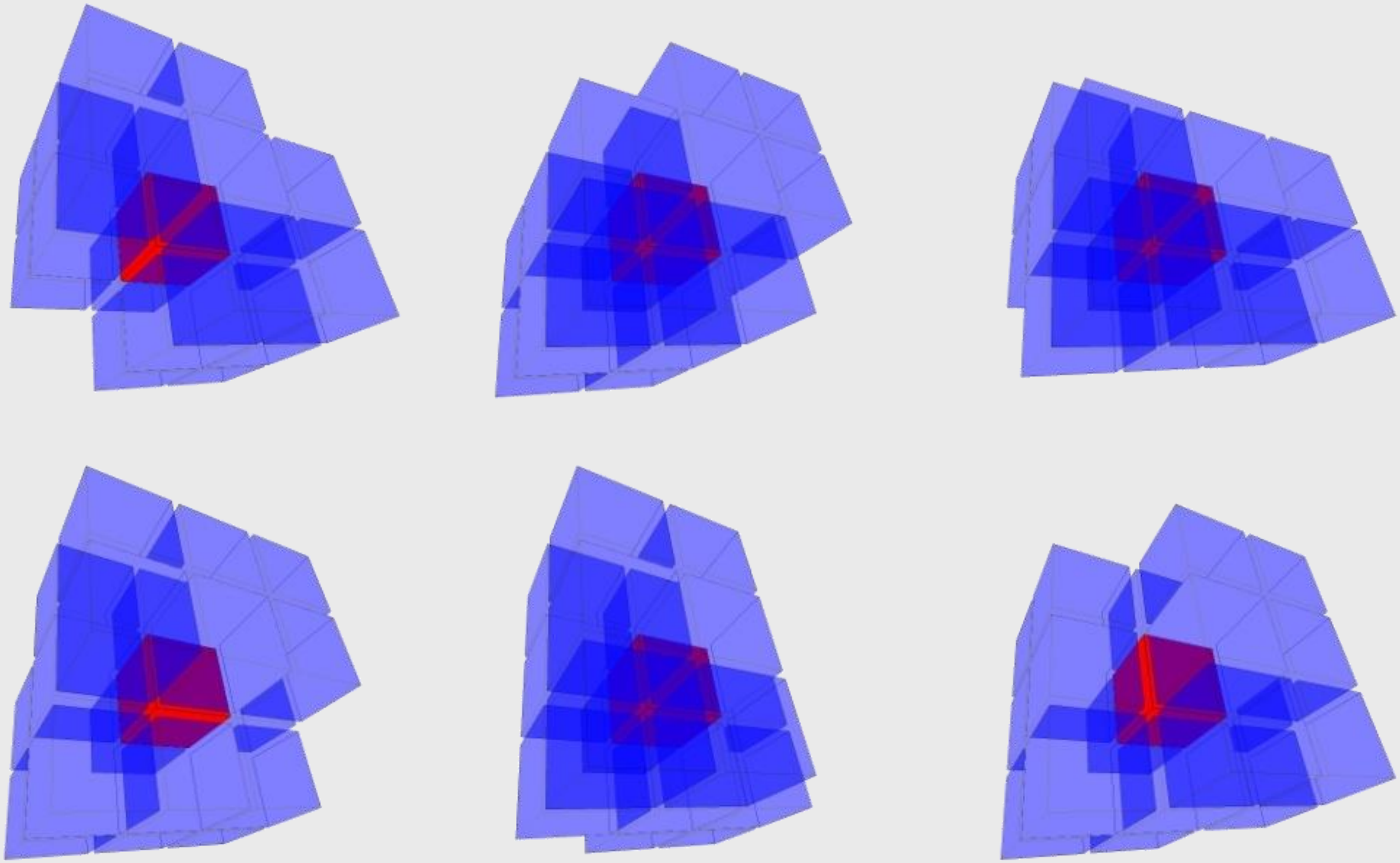
Przestrzeń 3 D automatów komórkowych.

Otoczenie pentagonalne

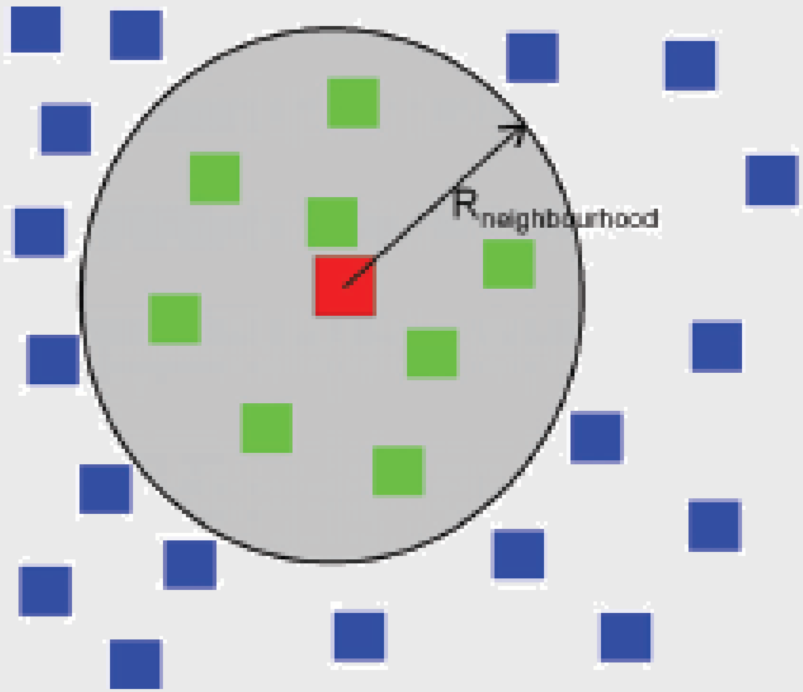


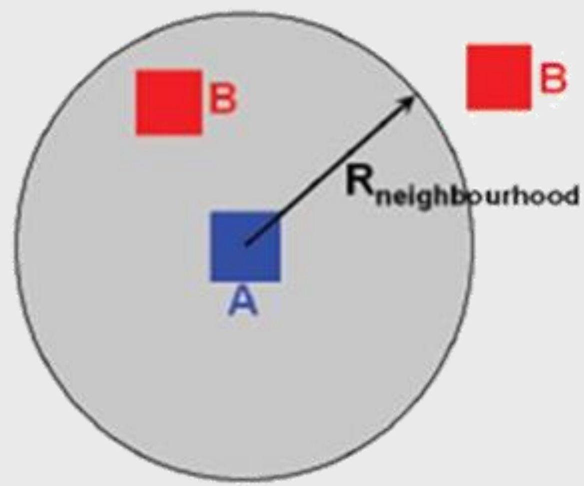
Przestrzeń 3 D automatów komórkowych.

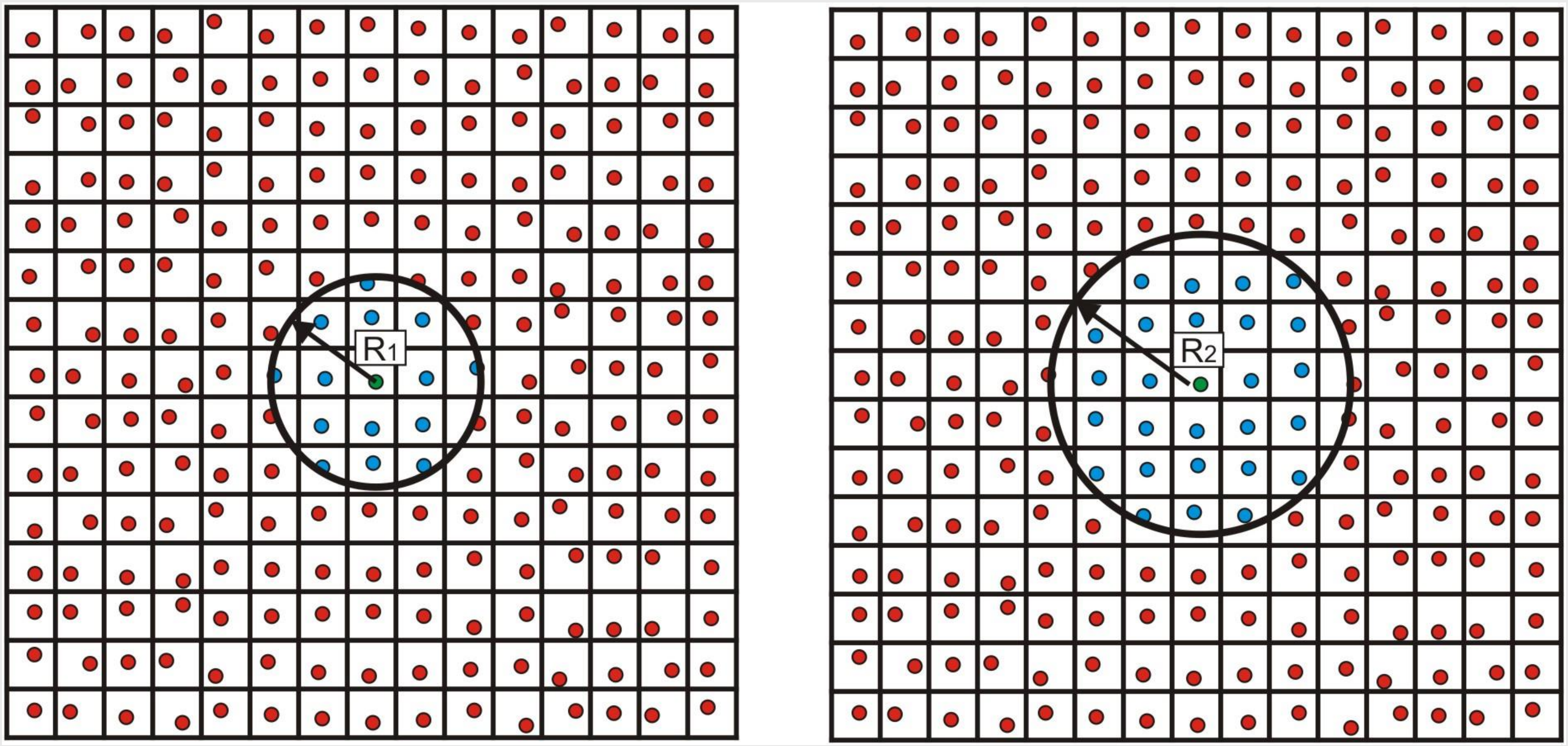
Otoczenie heksagonalne



Random CA



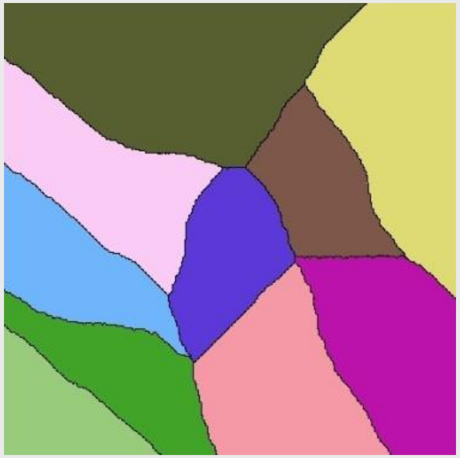



R1
R2

Warunki brzegowe

-Zamknięte pochłaniające

siatka jest zdefiniowana w taki sposób, ze brzegi siatki wypełnione są z góry ustalona wartością, która poprzez funkcje przejścia ustala wpływ na zachowanie automatu. W praktyce, symulując np. umieranie komórek, po przekroczeniu krawędzi siatki przestaje ona istnieć.

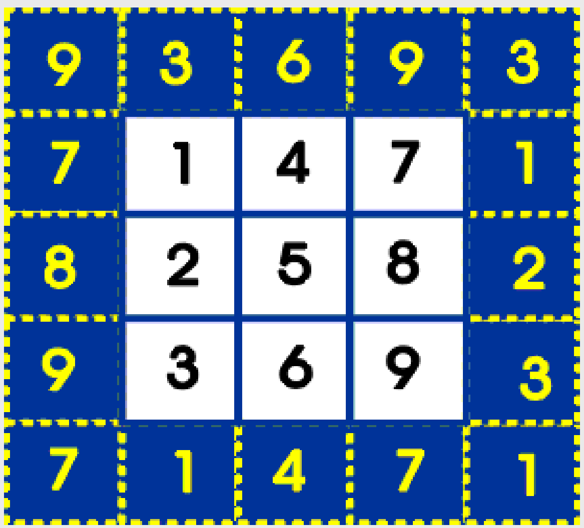


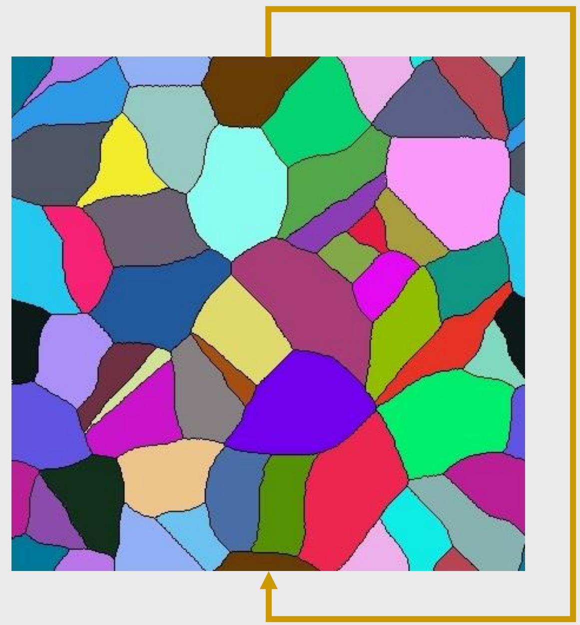
-Zamknięte odbijające

Warunki brzegowe na krawędzi siatki tworzą barierę (stan przeciwny do danego), od której funkcje przejścia się odbijają wnosząc ponownie swój wkład do zmieniających się stanów komórek w przestrzeni CA.

Warunek periodyczny

Definiuje zamkniętą siatkę komórek w taki sposób że każda komórka która znajduje się na krawędzi siatki ma za sąsiada komórkę po przeciwnej stronie siatki.





Periodyczne warunki brzegowe zapewniają ciągłość przestrzeni

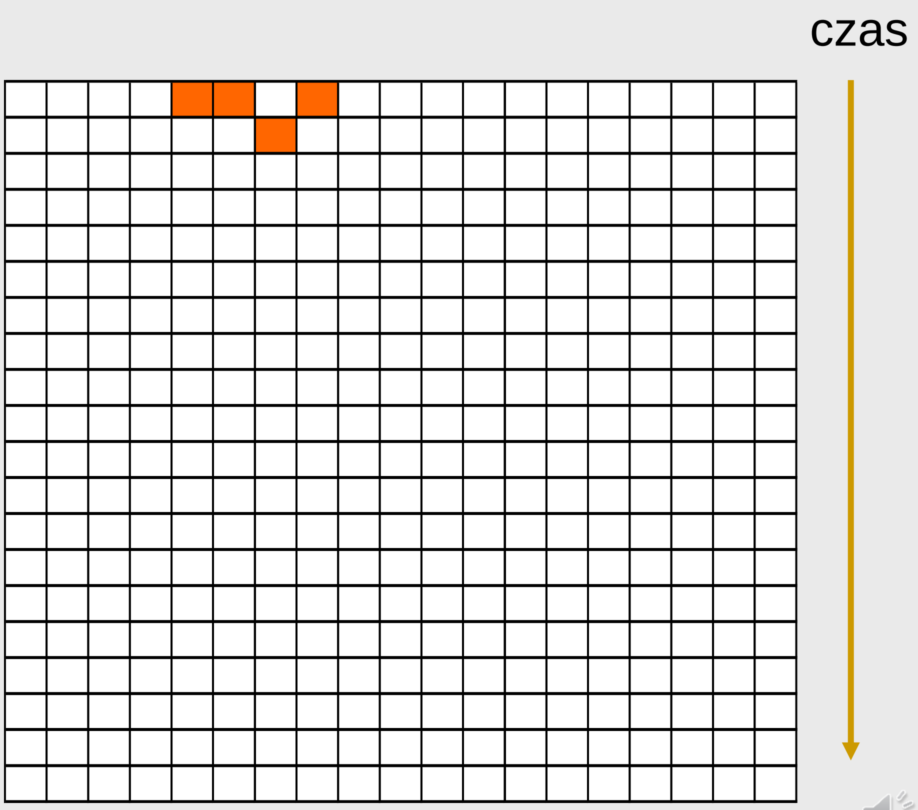
Jeszcze o notacji (*k*,*r*)

Poznana notacja nie jest precyzyjna:
-nie podaje wymiaru sieci, jest niejednoznaczne czy np. dla automatu dwuwymiarowego otoczenie jest otoczeniem von Neumanna czy Moore'a.

Głównie używa się jej w przypadku automatów jednowymiarowych.

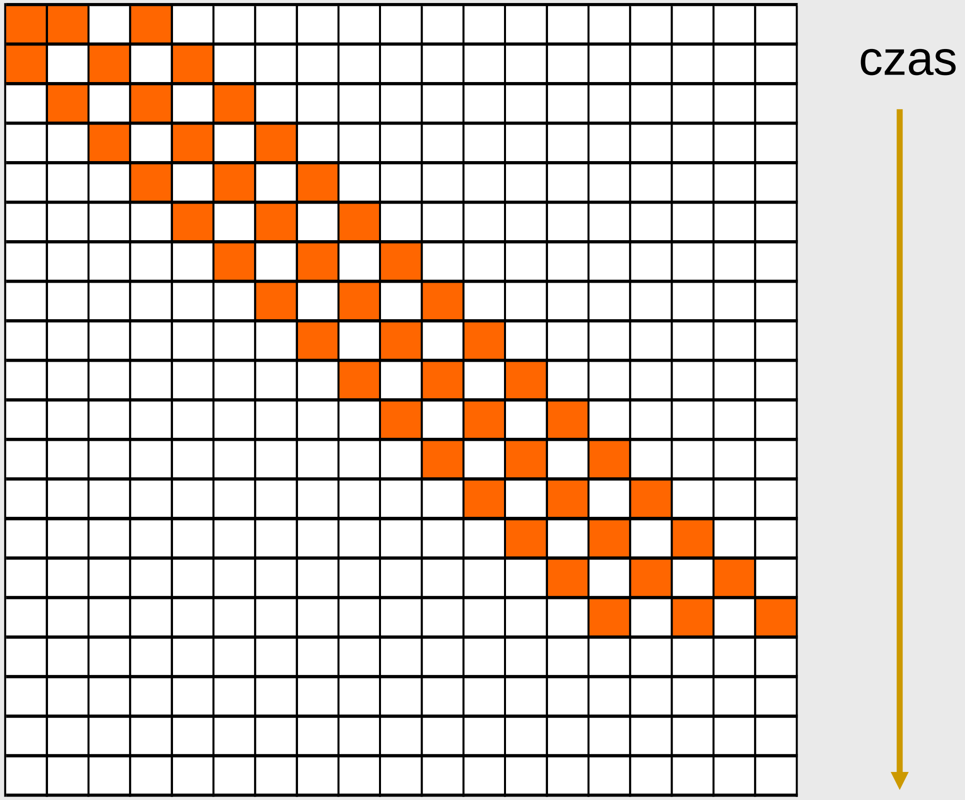
Klasyfikacja automatów - Wolfram

Klasyfikację swoją oparł na długiej obserwacji kolejnych stanów sieci, oraz na chaotycznie ustalanych konfiguracjach początkowych.

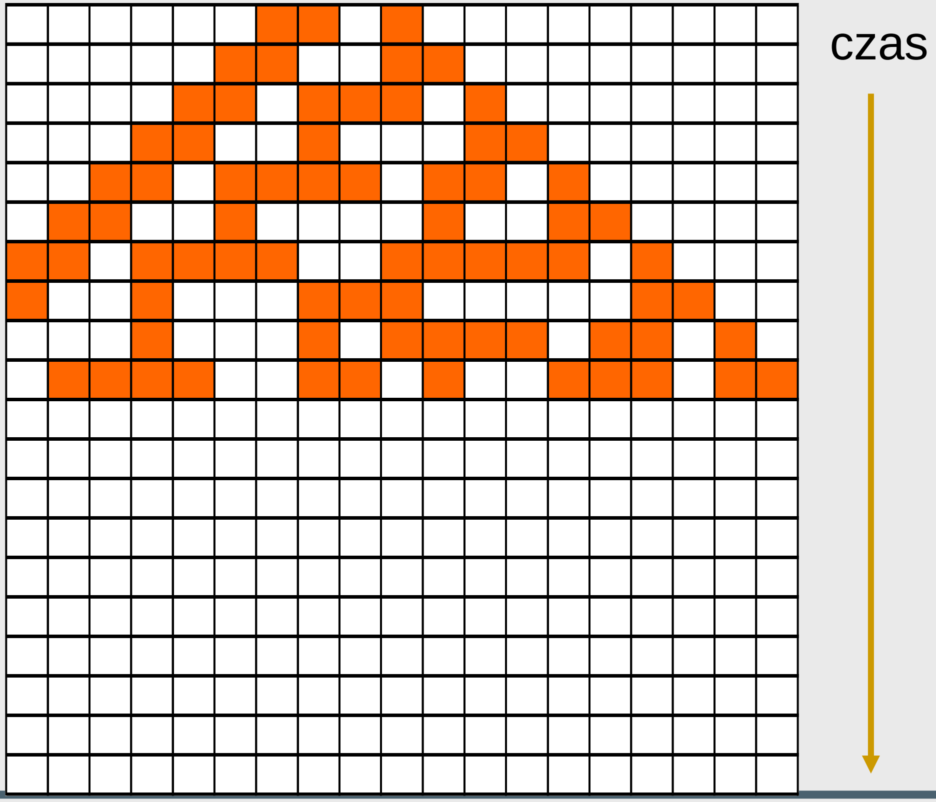


Klasa 1 – automat komórkowy ewoluuje do stanu jednorodnego, osiągając punkty graniczne w których stan wszystkich komórek jest taki sam i nie zmienia się w przestrzeni czasu

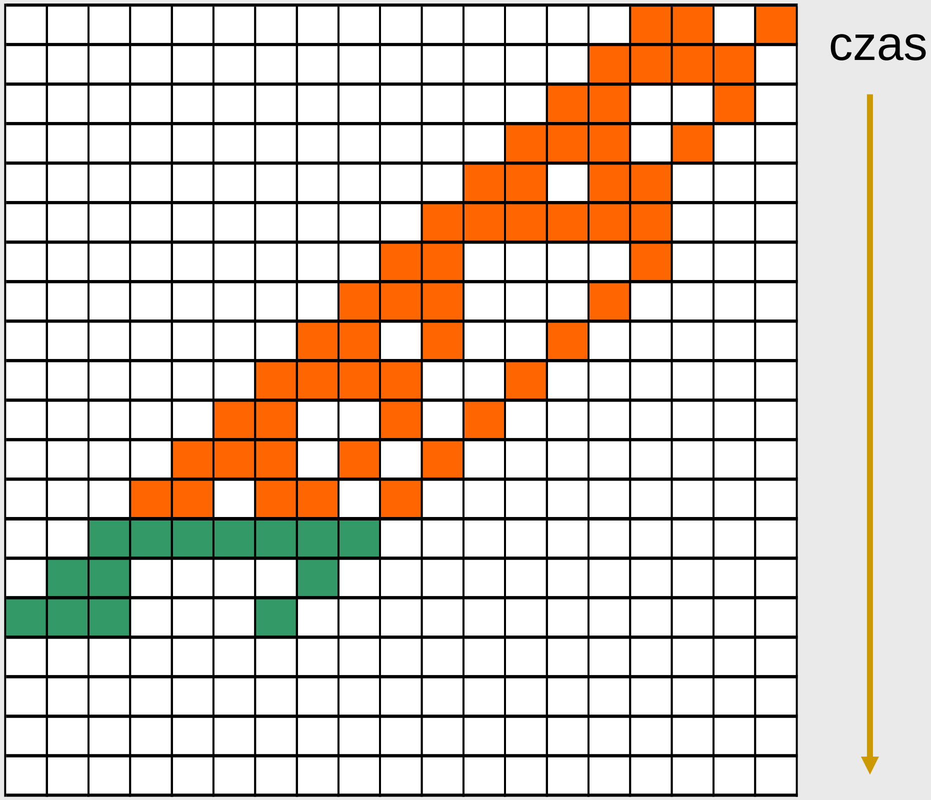
Klasa 2 – automat komórkowy dąży do prostych struktur periodycznych



Klasa 3 – automat komórkowy na drodze ewolucji w przestrzeni czasu osiąga stan zachowań chaotycznych, tworząc skomplikowane wzory. Klasa ta jest bardzo wrażliwa na wszelkie zakłócenia czy też zmiany warunków otoczenia



Klasa 4 – automat komórkowy na drodze ewolucji w przestrzeni czasu osiąga stan trwałych konfiguracji o długich czasach życia.



Problem czasu obliczeń i rozmiaru przestrzeni

Założenie nieskończonego rozmiaru przestrzeni *D*, i nieskończonego czasu obserwacji *t*.

• Jeżeli założymy nieskończony czas obliczeń każdy automat okaże się periodyczny.

• Jeżeli założymy nieskończony rozmiar przestrzeni *D* a skończony czas obserwacji, to wówczas istnieje możliwość zaobserwowania zachowania chaotycznego.

Rodzaje automatów

Automat probabilistyczne

Analogicznie jak automat deterministyczny ale zmiana stanu komórki w oparciu o regułę przejścia zawiera elementy probabilistyczne

Automaty totalistyczne

Automat komórkowy nazywany jest **totalistycznym** jeżeli jego reguła zmiany stanu zależy od stanu jej samej i sumy stanów komórek w sąsiedztwie. Inna nazwa: automaty głosujące, zliczające

Automaty totalistyczne zewnetrznie

Automat komórkowy nazywany jest **totalistycznym zewnętrznie** jeżeli jego reguła zmiany stanu zależy *wyłącznie* od sumy stanów komórek w sąsiedztwie.

Otoczenia oznacza się podając litery symbolizujące otoczenie oraz liczby określające ile np. „jedynek” musi być w sąsiedztwie aby dana komórka przeszła w stan „jeden”.

Litery oznaczające otoczenia to pierwsze litery francuskich liczebników określających ilość sąsiadów:

2 – **D**eux
3 – **T**rois
4 – **Q**uatre
8 – **H**uit

2D Moore

1 => gdy 3 jedynki

H3

3D Neuman

1 => gdy 6 jedynki

S6

Przykłady

Automaty elementarne

Automat deterministyczny
Stany komórek: 0 lub 1 (k=2)
Otoczenie: najbliżsi sąsiedzi (r=1)
Reguła przejścia: stan komórki w czasie t +1 zależy od stanu komórek sąsiednich i jej samej w czasie t

Reguła przejścia w tym przypadku uwzględnia stan 3 komórek ($2r+1$) każda może mieć dwa stany. Czyli reguła przejścia musi być określona dla 2^3 =8 różnych konfiguracji.

Każda z otrzymanych konfiguracji ma 2 stany, to w rezultacie daje 2^8 = 256 sposobów określenia reguły przejścia.

Automaty komórkowe jedno-wymiarowe

Reguła 90

Ewolucja w czasie

t	1 1 1	1 1 0	1 0 1	1 0 0	0 1 1	0 1 0	0 0 1	0 0 0
t+1	0	1	0	1	1	0	1	0

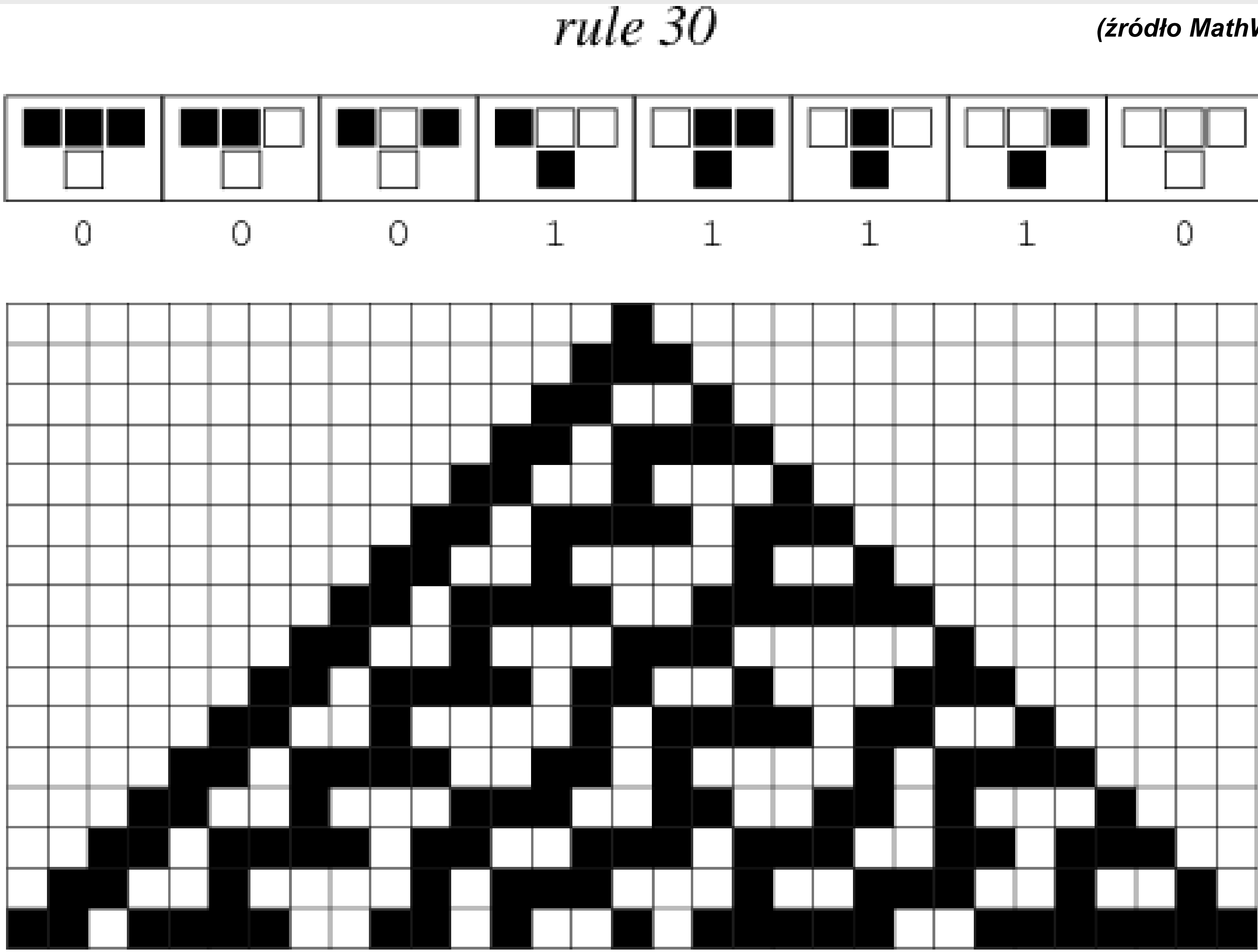
01011010

$2^7\ 2^6\ 2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$

$2^1+2^3+2^4+2^6 = 2+8+16+64 =$ **90**

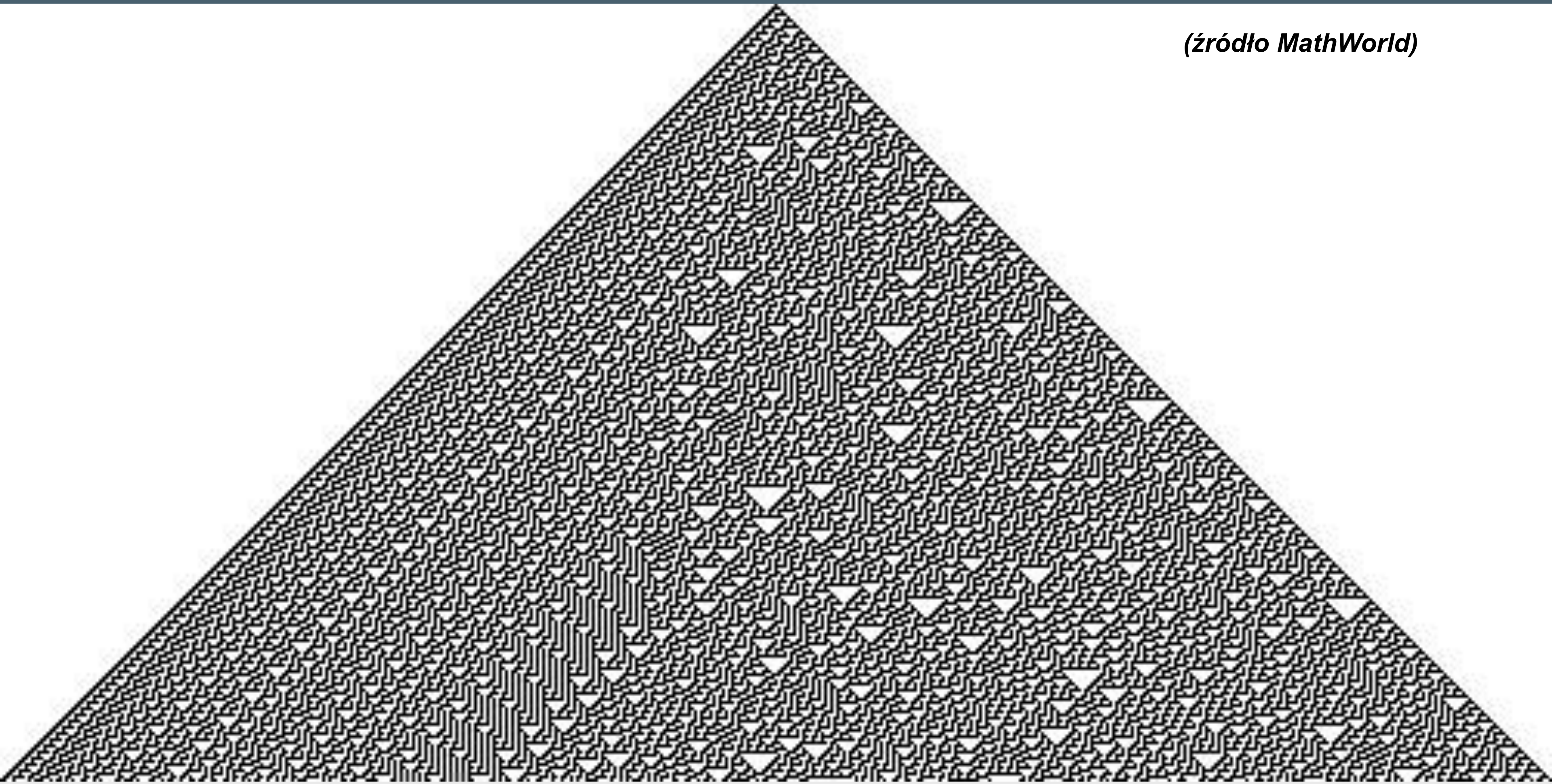
Automaty komórkowe jedno-wymiarowe

(źródło MathWorld)



randomizer1

Automaty komórkowe jedno-wymiarowe



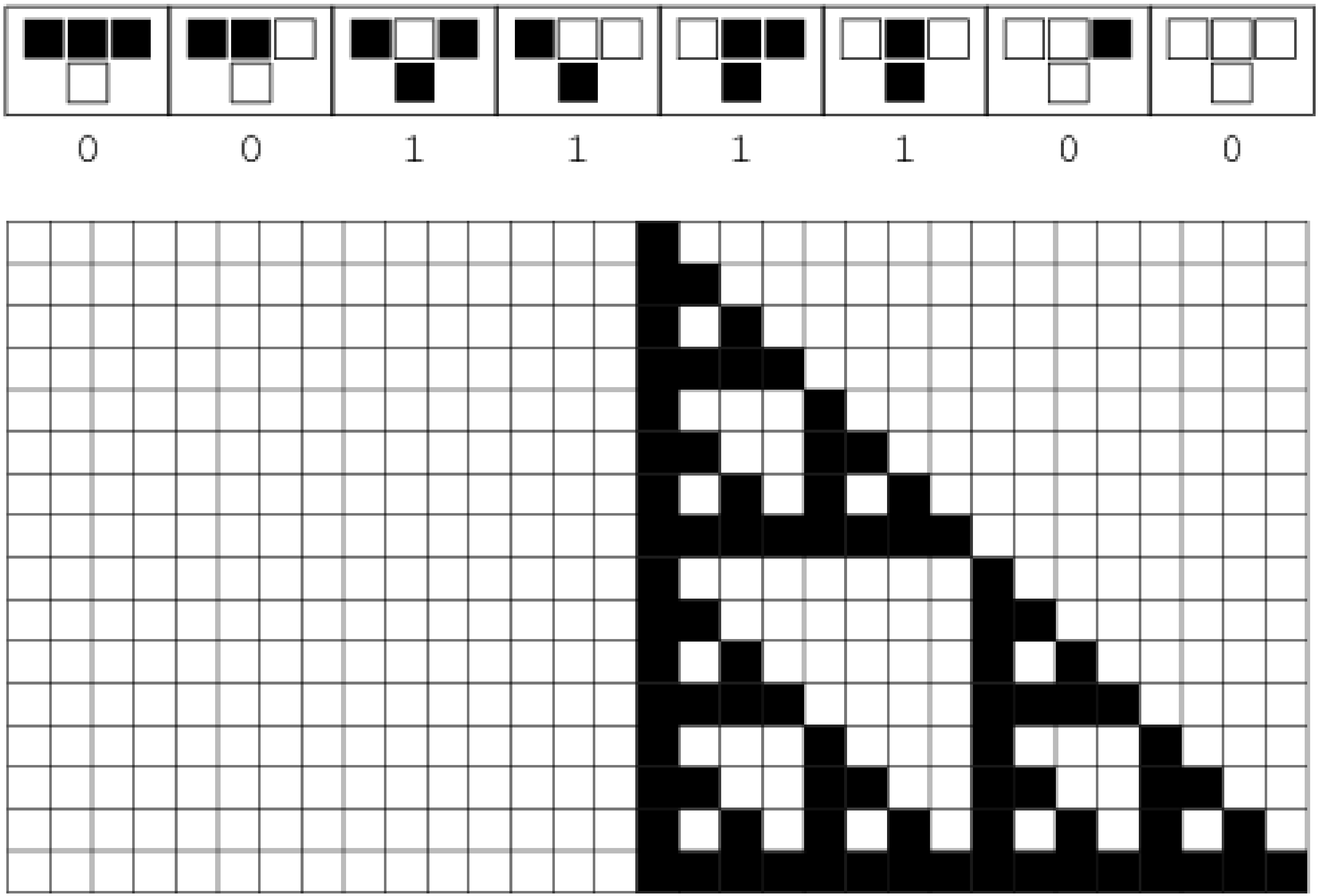
(źródło MathWorld)

250 iteracji

Automaty komórkowe jedno-wymiarowe

rule 60

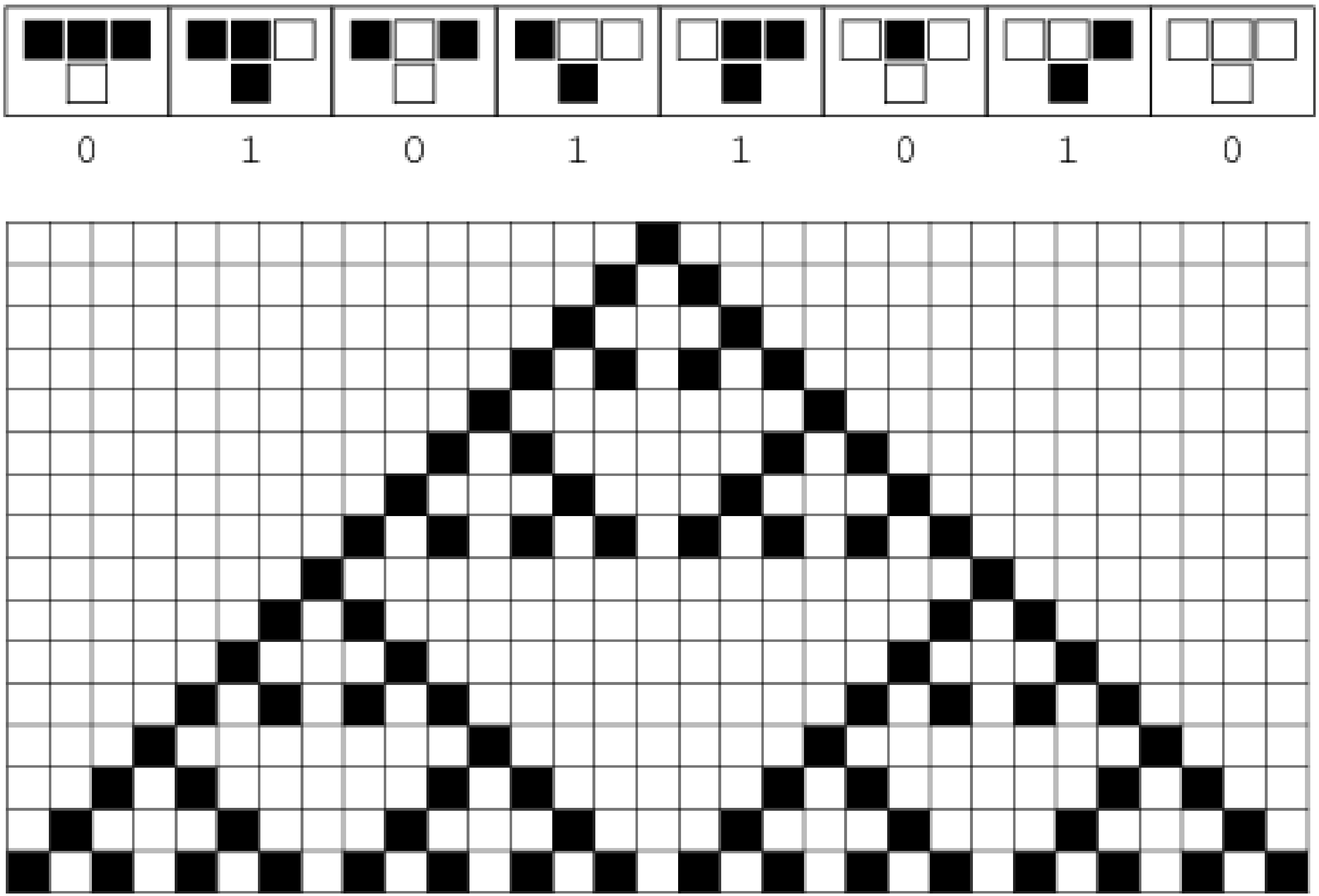
(źródło MathWorld)



Automaty komórkowe jedno-wymiarowe

rule 90

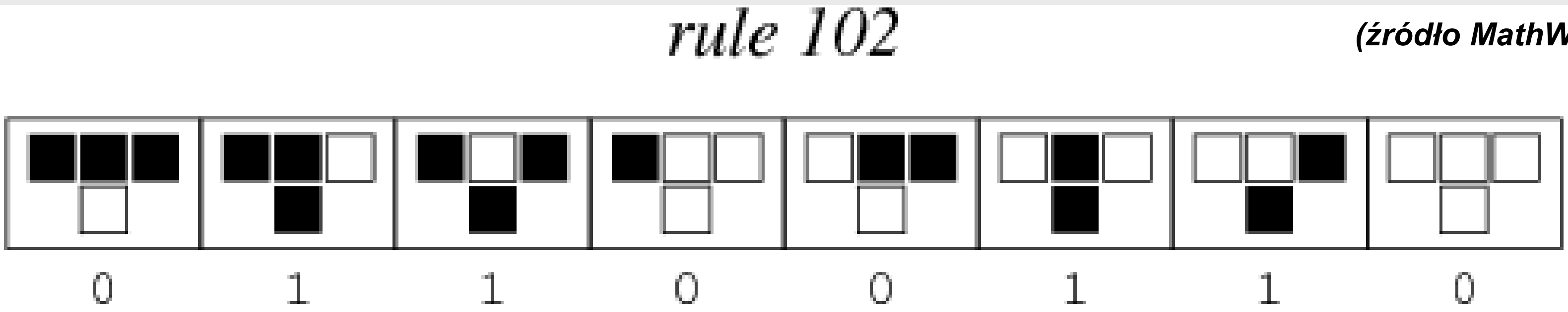
(źródło MathWorld)

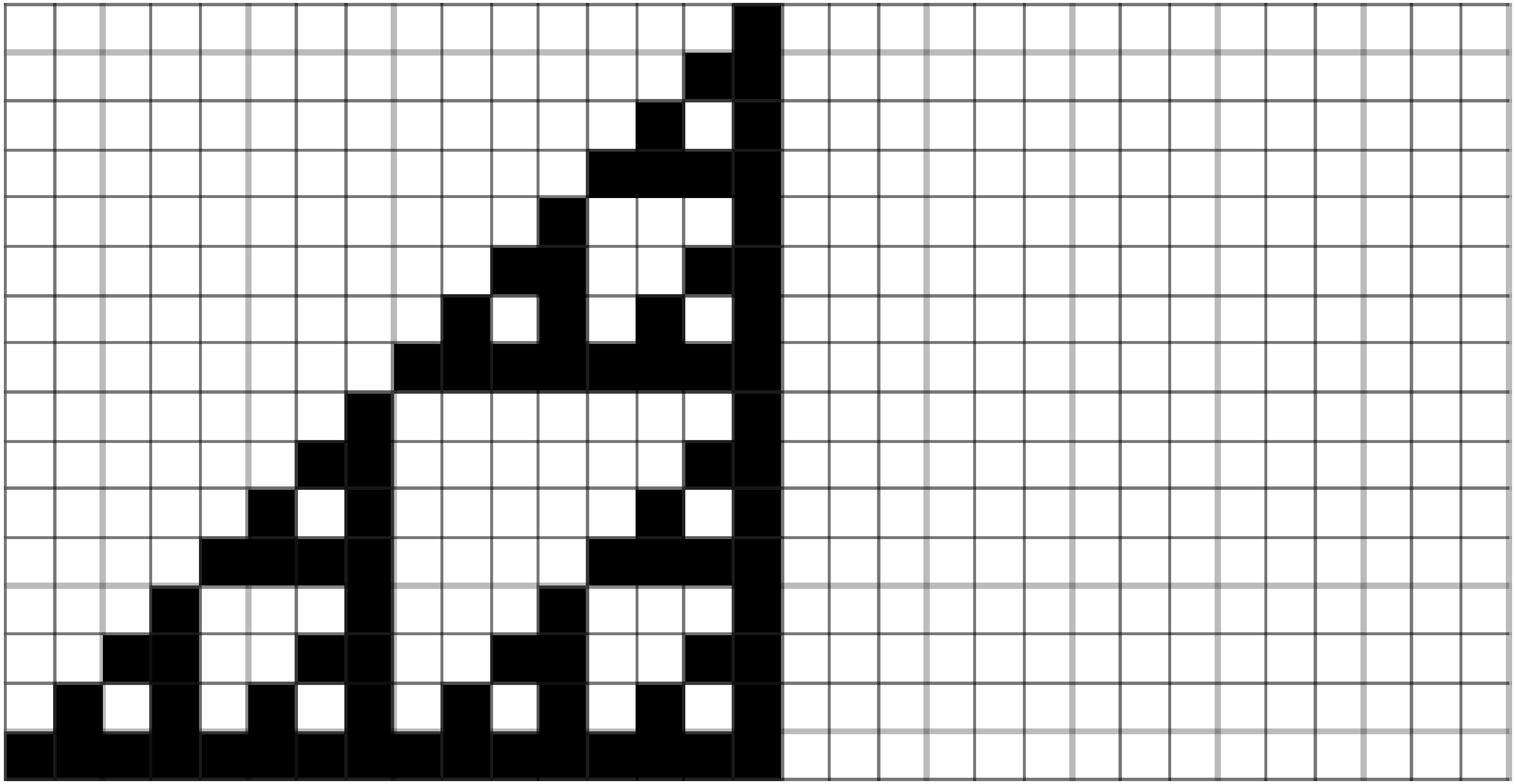


Pascal Triangles

Automaty komórkowe jedno-wymiarowe

(źródło MathWorld)

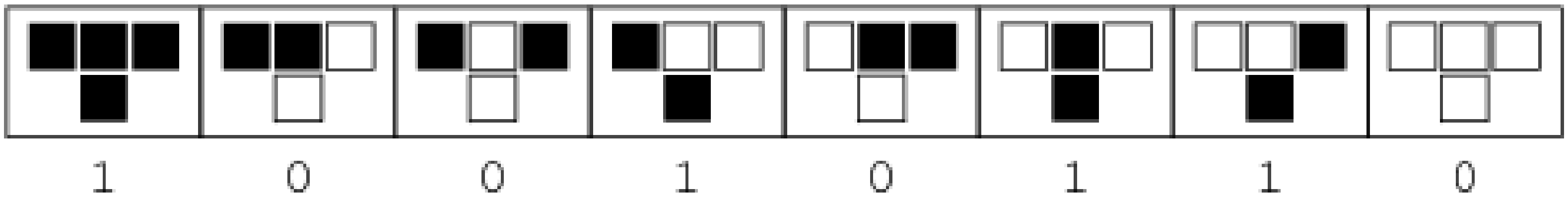


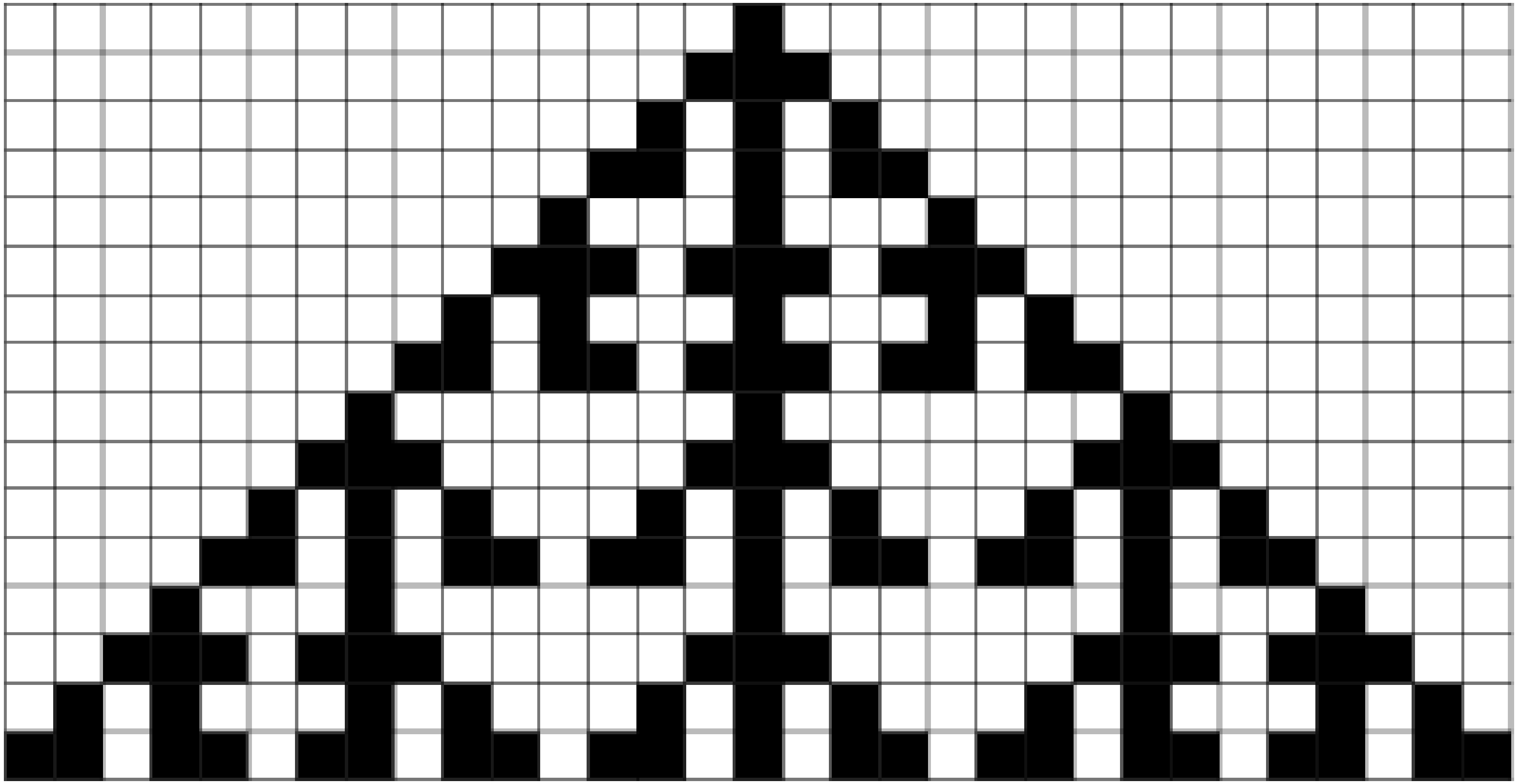


Automaty komórkowe jedno-wymiarowe

rule 150

(źródło MathWorld)



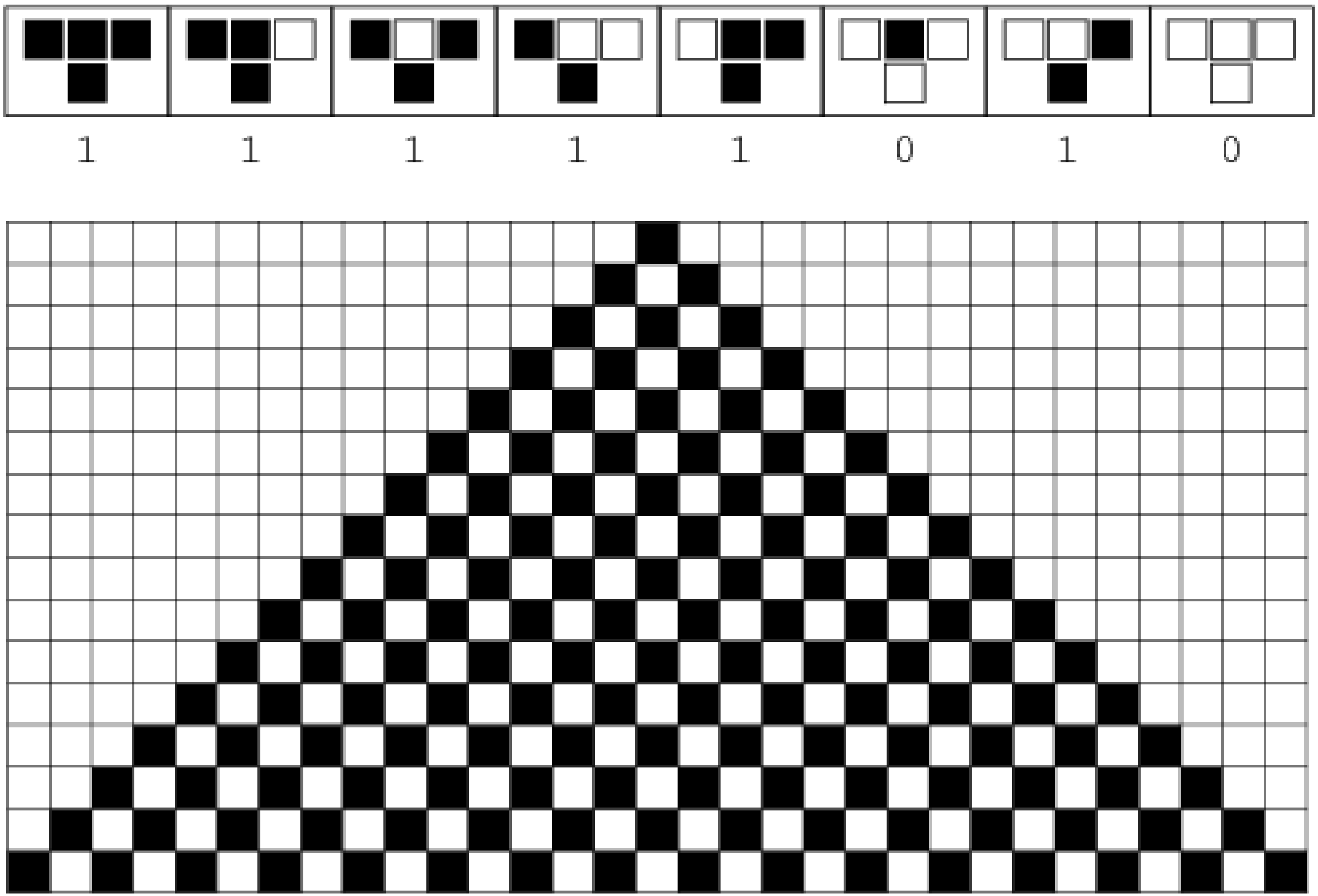


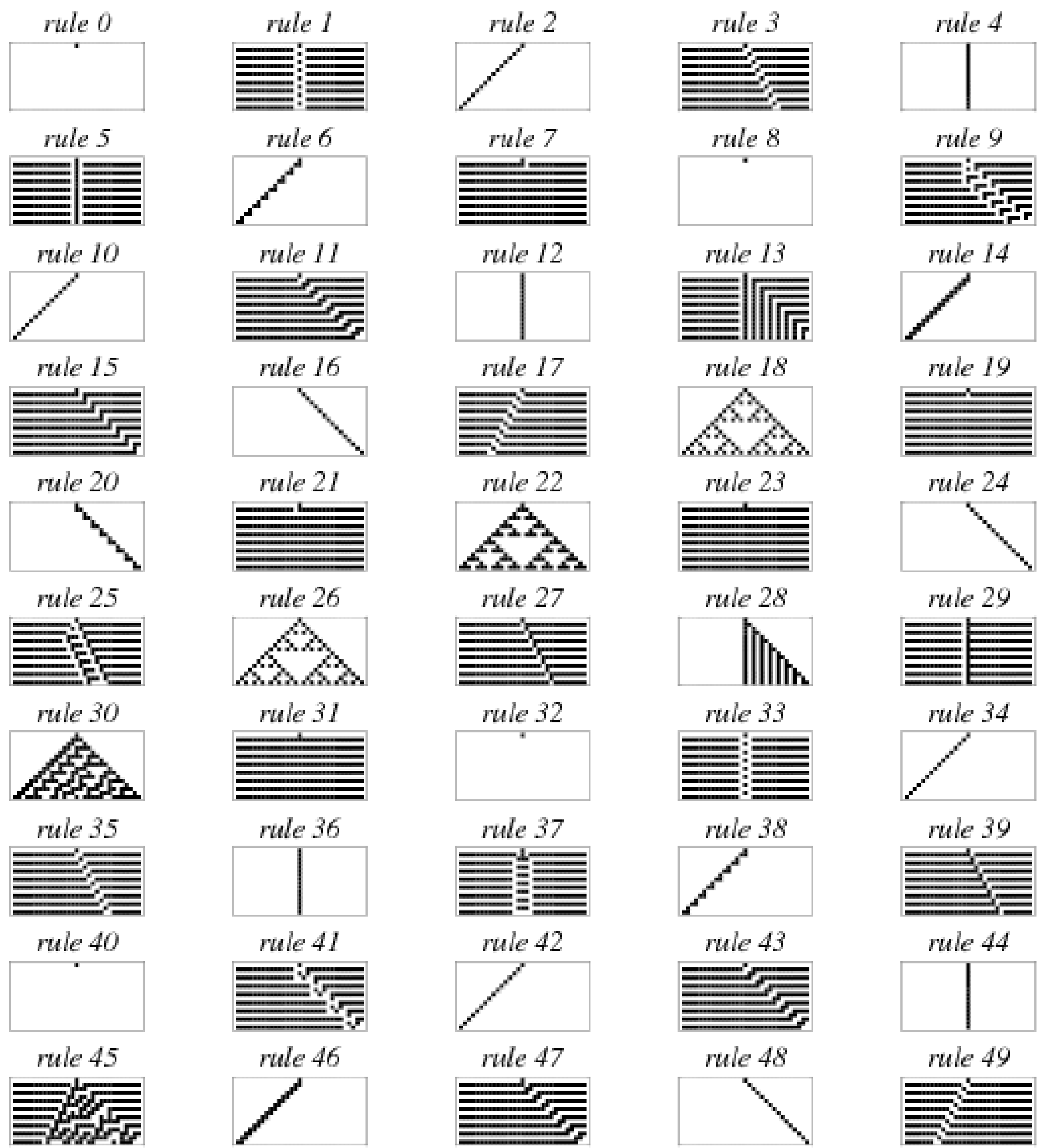
Linear B

Automaty komórkowe jedno-wymiarowe

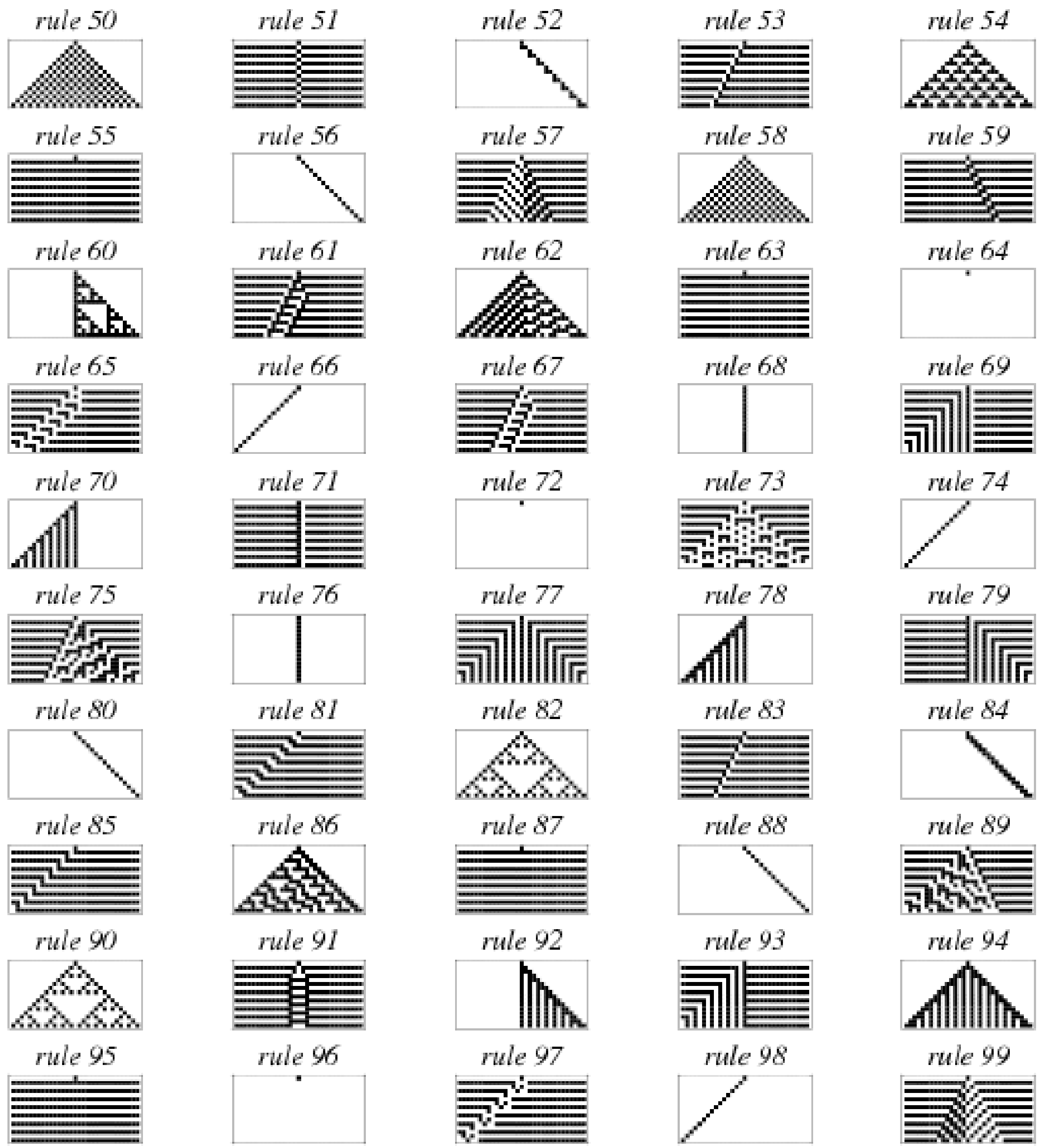
rule 250

(źródło MathWorld)

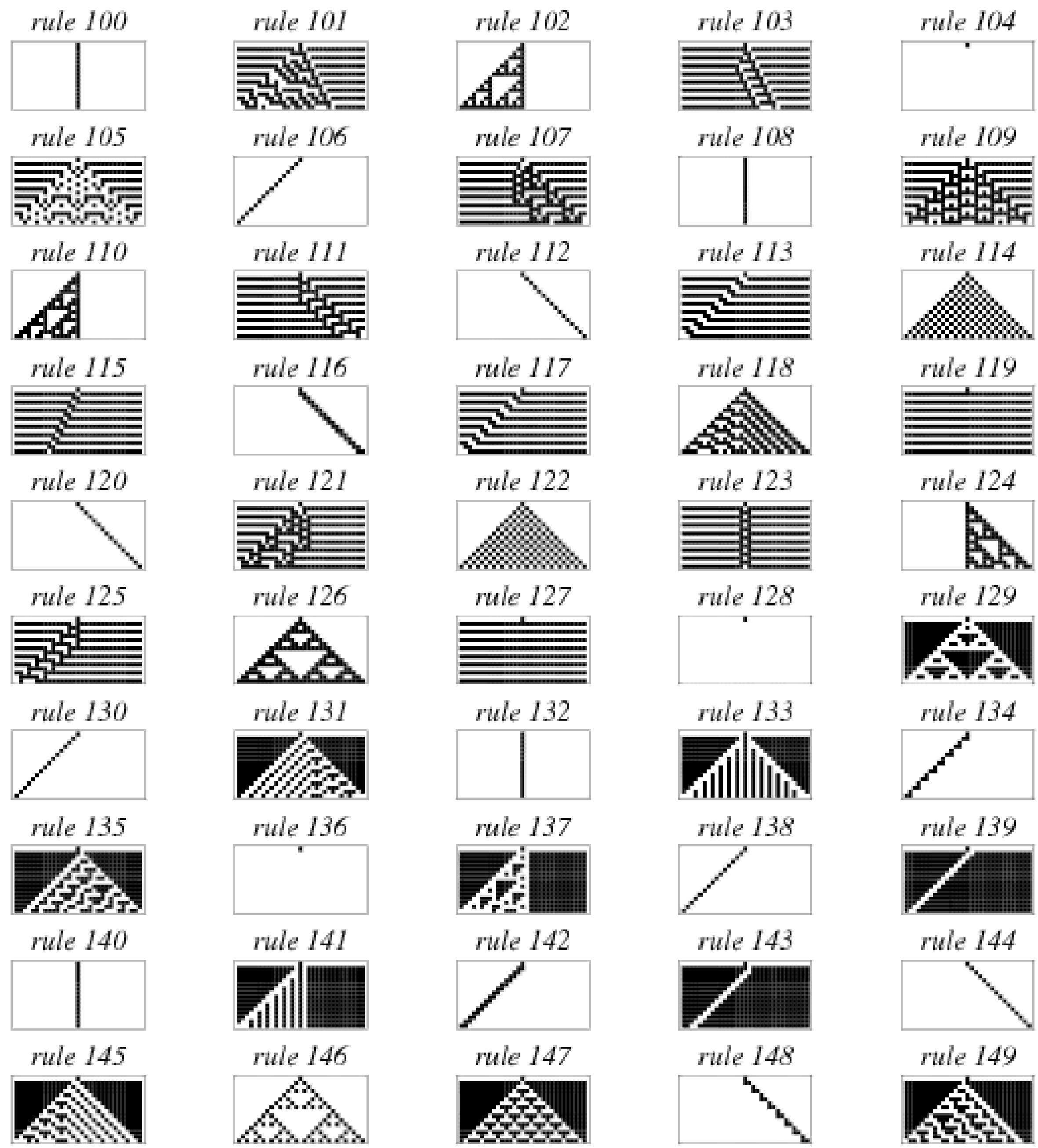




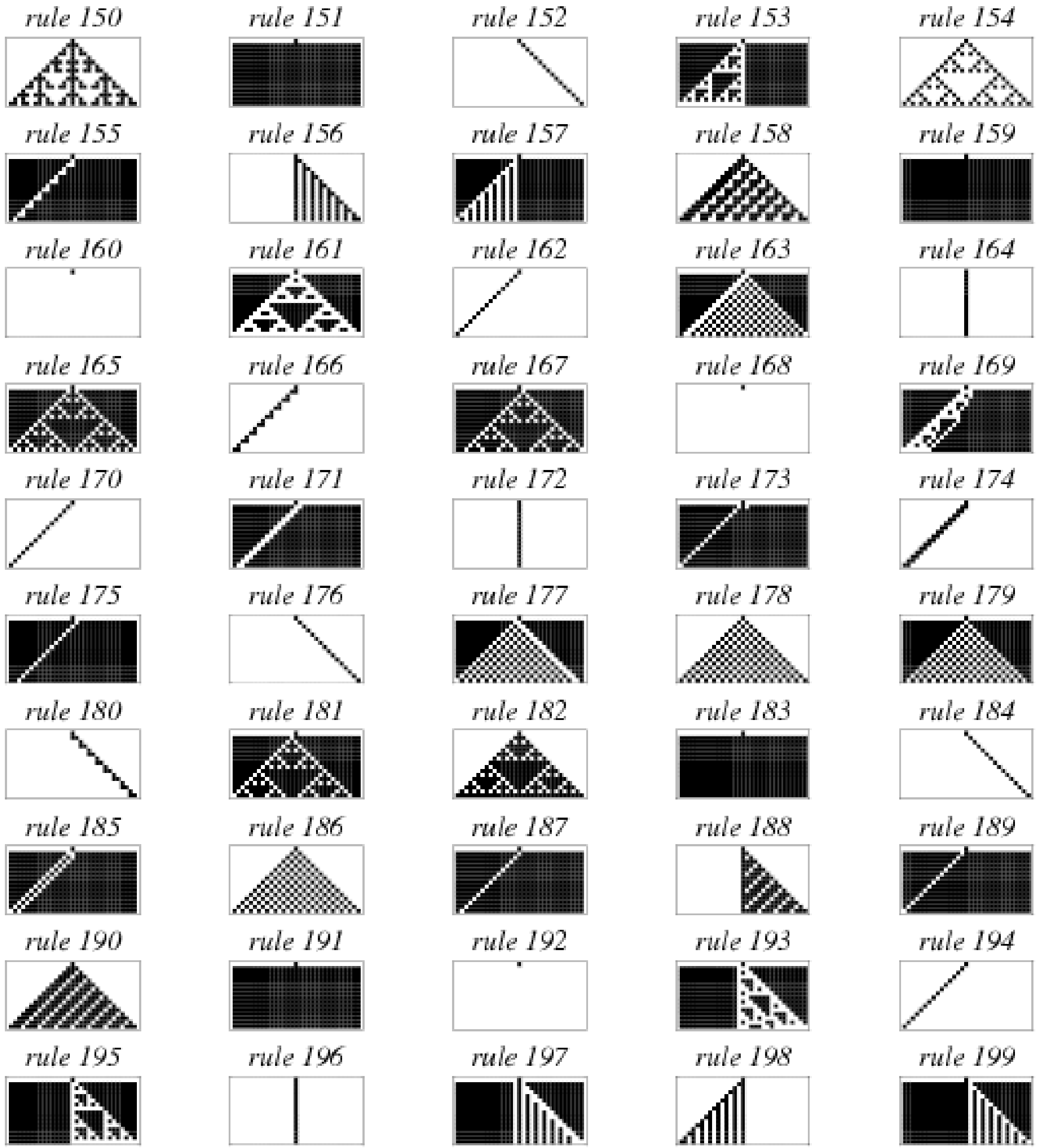
(źródło MathWorld)



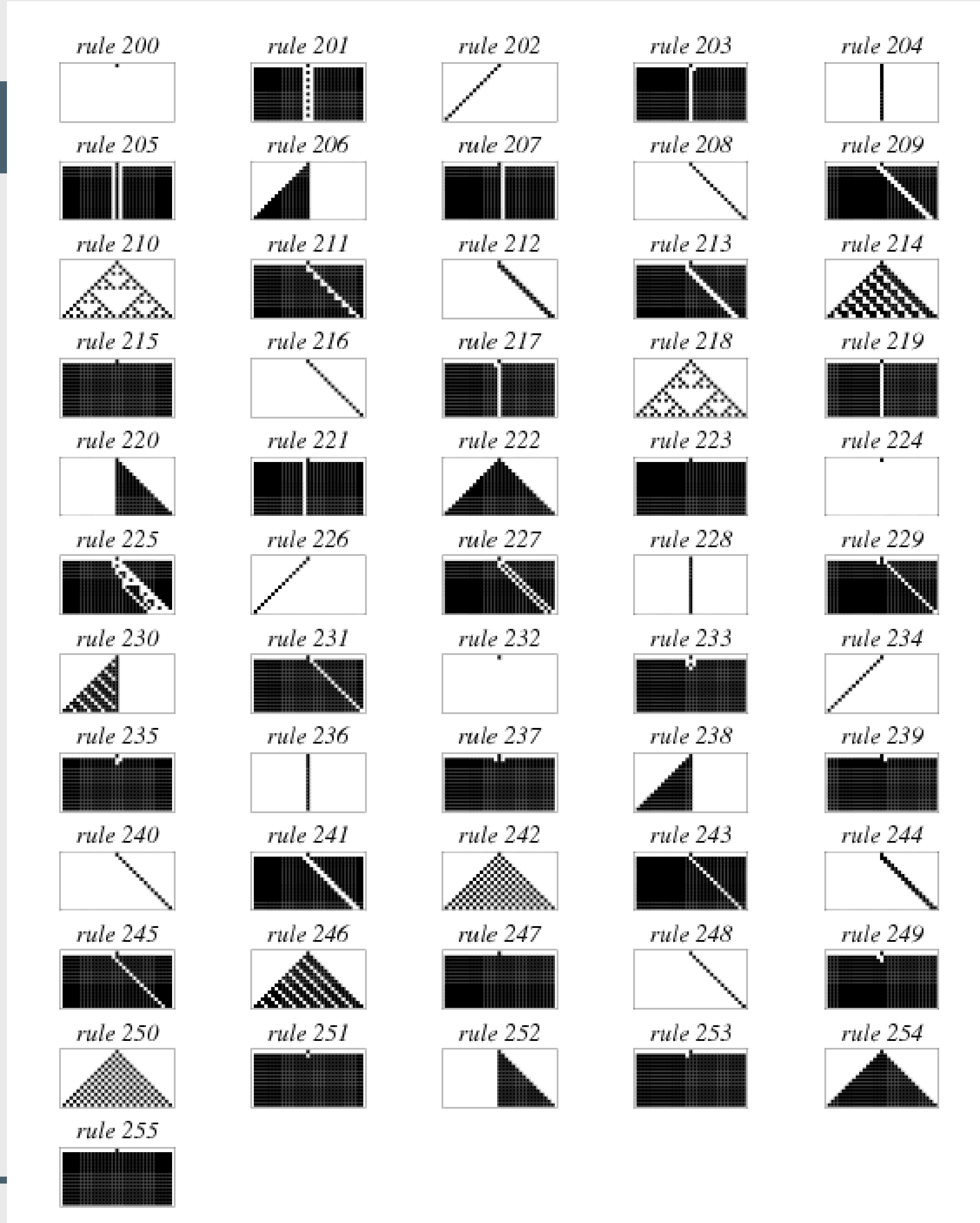
(źródło MathWorld)



(źródło MathWorld)



(źródło MathWorld)



(źródło MathWorld)