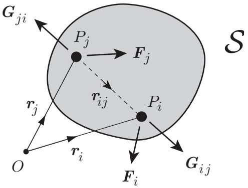
Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 12



Twierdzenie: W dowolnym ruchu układu, zmiana jego energii kinetycznej w danym przedziale czasu jest równa całkowitej pracy wykonanej nad układem przez siły zewnętrzne i wewnętrzne.

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{G}_{ij} \right] \cdot \vec{v}_i$$

Twierdzenie: W dowolnym ruchu układu szybkość zmiany pędu jest równa całkowitej sile zewnętrznej działającej na układ.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} (\vec{G}_{ij} + \vec{G}_{ji}) = \vec{F}$$

Twierdzenie: W dowolnym ruchu układu, szybkość zmian momentu pędu względem ustalonego punktu jest równa całkowitemu momentowi siły zewnętrznej działającej na ten układ.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) \right) = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \left(m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} \right) + \dot{\vec{r}}_i \times (m_i \vec{v}_i) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} (\vec{r}_i \times \vec{G}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{G}_{ji}) = \vec{K}_O$$

Moment siły i moment pędu

Moment siły działający na układ cząstek wzgledem początku układu O:

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Moment siły względem dowolnego punktu A o promieniu wodzącym $\vec{a}$:

$$\vec{K}_A = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{a}) \times \vec{F}_i = \vec{K}_O - \vec{a} \times \vec{F}$$

Uwaga: Moment siły nie zależy od wyboru punktu A jeśli $\vec{F} = 0$.

Moment pędu układu cząstek względem początku układu O:

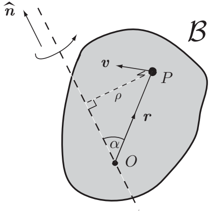
$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

Moment pedu względem dowolnego punktu A o promieniu wodzącym $\vec{a}$:

$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{a}) \times (m_i \vec{v}_i) = \vec{L}_O - \vec{a} \times \vec{P}$$

Uwaga: Moment pędu nie zależy od wyboru punktu A jeśli $\vec{P} = 0$.

Energia kinetyczna bryły sztywnej

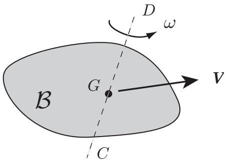


Definicja: Bryłą sztywną nazywamy ciało, w którym odległości pomiędzy dowolnymi dwoma cząstakmi nie zmieniają się w czasie: $|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)| = c_{ij}$

Wektor prędkości kątowej określony jest przez $\vec{\omega} = \pm\omega\hat{n}$

Energia kinetyczna ruchu obrotowego wokół osi:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_i (\omega \rho_i)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \right) \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2$$



Energia kinetyczna względem środka masy:

$$T_G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i - \vec{V}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \right) \cdot \vec{V} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \vec{V} \cdot \vec{V} = T - \frac{1}{2} M V^2$$

Całkowita energia kinetyczna w dowolnym ruchu bryły sztywnej:

$$T = T_G + \frac{1}{2} M V^2$$

Moment pędu bryły sztywnej

Moment pędu dla bryły sztywnej obracającej się wokół ustalonej osi $\{O, \vec{n}\}$:

$$\vec{L}_O \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i (\vec{v}_i \cdot \hat{\vec{\phi}}) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \right) \omega = I\omega$$

II zasada dynamiki dla bryły sztywnej:

Zmiana w czasie całkowitego momentu pędu ciała względem dowolnego ustalonego punktu A jest równa momentowi wypadkowej siły zewnętrznej działającej na to ciało wzgledem tego punktu:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{K}_A$$

Moment pędu bryły sztywnej względem środka masy:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_G &= \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V}) = \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_r \vec{r}_i \times \vec{v}_i - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{V} - \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \vec{R} \times \vec{V} = \\
&= \vec{L}_O - \vec{R} \times (M\vec{V})
\end{aligned}$$

Moment pędu bryły sztywnej

A więc całkowity moment pędu bryły sztywnej względem osi przechodzącej przez początek układu O dany jest przez:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_G + \vec{R} \times (M\vec{V})$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego, w ogólnym przypadku, gdy środek masy ciała porusza się z prędkością $\vec{V}$ przyjmuje postać:

$$\vec{K}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\vec{R} \times \vec{V}) + \frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t} = M\vec{R} \times \dot{\vec{V}} + \frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t}$$

Ponieważ $\vec{K}_O = \vec{K}_G + \vec{R} \times \vec{F}$, więc w szczególności zachodzi:

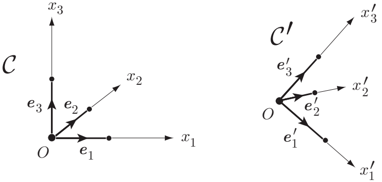
$$\vec{K}_G = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t} + \vec{R} \times \left(M\dot{\vec{V}} - \vec{F}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t}$$

Do opisu ruchu bryły sztywnej pod wpływem znanych sił wystarczają równania opisujące dynamikę środka masy:

$$M\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{K}_G$$

Transformacje ortogonalne

Rozważmy współrzędne wektora $\vec{v}$ w dwóch układach kartezjańskich o tym samym początku:



$$\vec{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3 = \mathrm{E}\cdot\vec{\mathrm{v}}$$

$$\vec{v} = v_1'\hat{e}_1' + v_2'\hat{e}_2' + v_3'\hat{e}_3' = \mathrm{E}'\cdot\vec{\mathrm{v}}'$$

gdzie

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E}' = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \hat{e}_1' & \hat{e}_2' & \hat{e}_3' \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathrm{v}}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$$

Transformacja współrzędnych wektora pomiędzy układami dana jest przez:

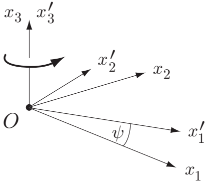
$$\vec{\mathrm{v}}' = \mathrm{E}'^{-1}\cdot\mathrm{E}\cdot\vec{\mathrm{v}} \equiv \mathrm{A}\cdot\vec{\mathrm{v}} \quad \text{gdzie} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1'\cdot\hat{e}_1 & \hat{e}_1'\cdot\hat{e}_2 & \hat{e}_1'\cdot\hat{e}_3 \\ \hat{e}_2'\cdot\hat{e}_1 & \hat{e}_2'\cdot\hat{e}_2 & \hat{e}_2'\cdot\hat{e}_3 \\ \hat{e}_3'\cdot\hat{e}_1 & \hat{e}_3'\cdot\hat{e}_2 & \hat{e}_3'\cdot\hat{e}_3 \end{pmatrix}$$

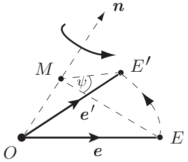
Macierz transformacji współrzędnych wektora jest macierzą ortogonalną:

$$\mathrm{A}^{-1} = \left(\mathrm{E}'^{-1}\cdot\mathrm{E}\right)^{-1} = \left(\mathrm{E}'^{T}\cdot\mathrm{E}\right)^{-1} = \mathrm{E}^{-1}\cdot\left(\mathrm{E}'^{T}\right)^{-1} = \mathrm{E}^{T}\cdot\mathrm{E}'^{-1\,T} = \left(\mathrm{E}'^{-1}\cdot\mathrm{E}\right)^{T} = \mathrm{A}^{T}$$

Przykład: Macierz transformacji dla obrotu wokół osi Ox_3 o kąt ψ:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





Obrót wokół dowolnej osi $\{O, \hat{n}\}$ o kąt ψ:

$$\begin{aligned} &\hat{e} = \hat{e}^{\parallel} + \hat{e}^{\perp} && \text{gdzie} && \hat{e}^{\parallel} = (\hat{e}\cdot\hat{n})\hat{n}, \quad \hat{e}^{\perp} = \hat{e} - (\hat{e}\cdot\hat{n})\hat{n} \\ &\hat{e}' = \hat{e}'^{\parallel} + \hat{e}'^{\perp} && \text{gdzie} && \hat{e}'^{\parallel} = \hat{e}^{\parallel} \\ & && && \hat{e}'^{\perp} = \cos\psi\hat{e}^{\perp} + \sin\psi\left(\hat{n}\times\hat{e}^{\perp}\right) = \\ & && && \quad = \cos\psi(\hat{e} - (\hat{e}\cdot\hat{n})\hat{n}) + \sin\psi(\hat{n}\times\hat{e}) \end{aligned}$$

A więc $\hat{e}' = \cos\psi\hat{e} + (1-\cos\psi)(\hat{e}\cdot\hat{n})\hat{n} + \sin\psi(\hat{n}\times\hat{e})$

Macierz transformacji dla obrotu wokół dowolnej osi $\{O, \hat{n}\}$ o kąt ψ:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\psi + (1-\cos\psi)n_1^2 & (1-\cos\psi)n_1n_2 + n_3\sin\psi & (1-\cos\psi)n_1n_3 - n_2\sin\psi \\ (1-\cos\psi)n_2n_1 - n_3\sin\psi & \cos\psi + (1-\cos\psi)n_2^2 & (1-\cos\psi)n_2n_3 + n_1\sin\psi \\ (1-\cos\psi)n_3n_1 + n_2\sin\psi & (1-\cos\psi)n_3n_2 - n_1\sin\psi & \cos\psi + (1-\cos\psi)n_3^2 \end{pmatrix}$$

gdzie n_1, n_2, n_3 to współrzędne wektora $\hat{n}$ w bazie $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.

Odbicie względem płaszczyzny

Rozważmy odbicie układu wzgledem płaszczyzny przechodzącej przez jego początek O określonej za pomocą wektora normalnego $\hat{n}$:

$$\begin{aligned} \hat{e} &= \hat{e}^{\parallel} + \hat{e}^{\perp} \qquad \text{gdzie} \quad \hat{e}^{\parallel} = (\hat{e}\cdot\hat{n})\hat{n}, \;\; \hat{e}^{\perp} = \hat{e} - (\hat{e}\cdot\hat{n})\hat{n} \\ \hat{e}' &= \hat{e}'^{\parallel} + \hat{e}'^{\perp} \quad \text{gdzie} \quad \hat{e}'^{\parallel} = -\hat{e}^{\parallel}, \;\; \hat{e}'^{\perp} = \hat{e}^{\perp} \end{aligned}$$

A więc $\quad \hat{e}' = \hat{e} - 2(\hat{e}\cdot\hat{n})\hat{n}$

Macierz transformacji dla odbicia względem płaszczyzny przechodzącej przez początek układu i określonej przez wektor normalny $\hat{n}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1-n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_2n_1 & 1-2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_3n_1 & -2n_3n_2 & 1-2n_3^2 \end{pmatrix}$$

gdzie n_1, n_2, n_3 to współrzędne wektora $\hat{n}$ w bazie $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.

Twierdzenie: Każda transformacja ortogonalna jest albo obrotem albo zlożeniem odbicia i obrotu współrzędnych.

Dowód: $I = \mathrm{A}^T\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad \det I = \det \mathrm{A}^T\mathrm{A} = \det \mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad \det \mathrm{A} = \pm 1$

$$\det \mathrm{A} = (\hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2)\cdot\hat{e}'_3 = \begin{cases} +1 & \text{dla układu prawoskrętnego (obrót)} \\ -1 & \text{dla układu lewoskrętnego (odbicie i obrót)} \end{cases}$$

Skalary, wektory, tensory

Rozważamy dwa ortogonalne, kartezjańskie układy współrzędnych $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$, o tym samym początku O.

Definicja: Skalrem φ nazywamy liczbę rzeczywistą, która w każdym z układów współrzędnych przyjmuje tą samą wartość: $\varphi' = \varphi$.

Przykład: skalary: masa, długość odcinka; ale np. suma współrzędnych punktu nie jest skalarem!

Definicja: Wektorem nazywamy układ trzech liczb $\{v_1, v_2, v_3\}$ zwanych jego współrzędnymi jeśli przy przejściu pomiędzy układami $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ transformuje się zgodnie z formułą:

$$\vec{\mathrm{v}}' = \mathrm{A} \cdot \vec{\mathrm{v}} \quad \text{czyli} \quad v_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} v_j$$

Przykład: wektor: współrzędne punktu $\{b_1, b_2, b_3\}$, prędkość $\{\dot{b}_1, \dot{b}_2, \dot{b}_3\}$, itp.; ale np. $\{2b_1, b_2, b_3\}$ nie jest wektorem!

Definicja: Tensorem stopnia n nazywamy układ 3^n liczb rzeczywistych które transformują się pomiędzy układami $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ zgodnie z regułą:

$$t'_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \sum_{j_1=1}^{3} \sum_{j_2=1}^{3} \cdots \sum_{j_n=1}^{3} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} t_{j_1 j_2 \cdots j_n}$$

Operacje na tensorach:

- iloczyn zewnętrzny tensorów: $t_{ijklm} = u_{ij} v_{klm}$

  Przykład: $t_{ij} = u_i v_j = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_1 v_3 \end{pmatrix}$

- kontrakcja tensora: $w_{ij} = \sum_{m=1}^{3} t_{ijmm}$

Transformacja wektora prędkości kątowowej:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \Omega \cdot \vec{r} \quad \text{gdzie} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Można pokazać, że Ω jest tensorem drugiego stopnia, natomiast współrzędne $\vec{\omega}$ transformują się zgodnie z regułą:

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \\ \omega_3' \end{pmatrix} = (\det \mathrm{A}) \mathrm{A} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Prędkość kątowa $\vec{\omega}$ jest pseudowektorem.

Tensor momentu bezwładności

Definicję tensora drugiego stopnia można zapisać w postaci macierzowej:

$$t'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ik} a_{jl} t_{kl} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{ik} t_{kl} a_{lj}^{T} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{T}' = \mathrm{A} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{A}^{T}$$

Moment pędu bryły sztywnej względem początku układu:

$$\vec{L}_O = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times (m_\alpha \vec{v}_\alpha)$$

Ponieważ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}$

$$(\vec{r} \times \vec{v})_i = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \omega_i - (x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3) x_i =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{3} x_k x_k\right) \omega_i - \left(\sum_{j=1}^{3} x_j \omega_j\right) x_i = \sum_{j=1}^{3} \left(\left(\sum_{k=1}^{3} x_k x_k\right) \delta_{ij} - x_i x_j \right) \omega_j$$

więc $L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij} \omega_j$ gdzie $I_{ij} = \sum_{\alpha} m \left(\left(\sum_{k=1}^{3} x_k x_k\right) \delta_{ij} - x_i x_j \right)$

Wielkość I_{ij} nazywana jest tensorem momentu bezwładności ciała względem punktu O.

W postaci macierzowej: $\vec{\mathrm{L}}_O = \mathrm{I} \cdot \vec{\omega}$

Uwaga: W ogólności wektory $\vec{\omega}$ i $\vec{\mathrm{L}}_O$ nie mają tych samych kierunków.

Podsumowanie:

- Elementy diagonalne tensora momentu bezwładności I_{11}, I_{22}, I_{33} są momentami bezwładości ciała względem osi Ox_1, Ox_2, Ox_3, np.:

$$I_{11} = \sum m\left(\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\delta_{11} - x_1 x_1\right) = \sum m\left(x_2^2 + x_3^2\right) = \sum m\rho^2$$

- Elementy pozadiagonalne noszą nazwę iloczynów bezwładności.

Energia kinetyczna ruchu obrotowego: $T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \cdot \mathrm{I} \cdot \vec{\omega}$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \sum_{i=1}\left(\sum_{j,k=1} \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k \sum_{l,m=1} \varepsilon_{ilm}\omega_l x_m\right) =$$

$$= \sum_{j,k,l,m} \omega_j x_k \omega_l x_m \sum_i \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \sum_{j,k,l,m} \omega_j x_k \omega_l x_m (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) =$$

$$= \sum_{j,k} (\omega_j \omega_j x_k x_k - \omega_j x_j \omega_k x_k) = \sum_{j,k} \omega_j \left(\delta_{jk} \sum_i x_i x_i - x_j x_k\right) \omega_k$$

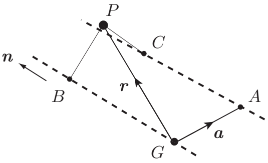
Własności momentu bezwładności

Twierdzenie: Niech I_G będzie momentem bezwładności ciała o masie M względem osi przechodzącej przez jej środek masy. Wówczas moment bezwładności względem dowolnej osi do niej równoległej i odległej o a dany jest przez:

$$I = I_G + Ma^2$$

Dowód:

Rozważmy dwie równoległe osie $\{G, \hat{n}\}$ i $\{A, \hat{n}\}$ oraz dowolny punkt P.



$$\begin{aligned}
PB^2 &= GP^2 - GB^2 = |\vec{r}|^2 - (\vec{r}\cdot\hat{n})^2 \\
PC^2 &= AP^2 - AC^2 = |\vec{r}-\vec{a}|^2 - \left((\vec{r}-\vec{a})\cdot\hat{n}\right)^2 = \\
&= (\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{r}-\vec{a}) - \left(\vec{r}\cdot\hat{n} - \vec{a}\cdot\hat{n}\right)^2 = \\
&= |\vec{r}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{a} - (\vec{r}\cdot\hat{n})^2 = PB^2 + a^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{a}
\end{aligned}$$

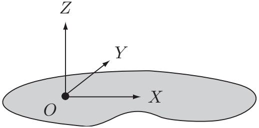
Mnożąc stronami przez m i sumując po wszystkich cząstkach otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
I &= I_G + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) a^2 - 2\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\cdot\vec{a} = I_G + Ma^2 - 2\vec{a}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \\
&= I_G + Ma^2 - 2\vec{a}\cdot(M\vec{R}) = I_G + Ma^2
\end{aligned}$$

Własności momentu bezwładności

Twierdzenie: Rozważmy płaskie ciało, leżące w płaszczyźnie XY kartezjańs- kiego układu współrzędnych. Momenty bezwładności względem trzech wzaje- mnie prostopadłych osi układu współrzędnych związane są relacją:

$$I_{OZ} = I_{OX} + I_{OY}$$



Dowód:

Ponieważ dla dowolnego punktu ciała zachodzi:

$$\rho_z^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2$$

więc mnożąc obustronnie przez masę i sumując po wszystkich cząstkach otrzymujemu tezę.

Reguły przydatne przy obliczaniu momentów bezwładności:

- moment bezwładności nie ulega zmianie jeśli masa jest przesuwana równolegle do osi obrotu (np. m.b. walca i dysku o tej samej masie i promieniu są takie same).
- jeśli wkład kilku części ciała do momentu bezwładności jest taki sam, a masy tych części są równe, to fomuła na moment bezwładności części jest taka sama jak całości (np. kula i półkula - zakładając, że każde z tych ciał ma taką samą masę).