Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

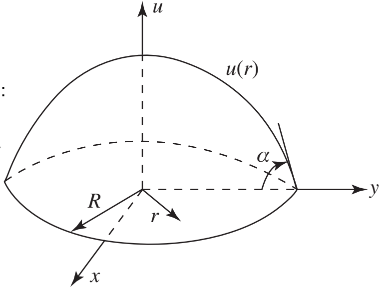
Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 2

Przykład - kształt kropli wody na płaskim stole

Kropla ma symetrię osiową względem osi pionowej u.
Jej kształt wynika z minimalizacji energii potencjalnej cieczy w polu grawitacyjnym oraz związanej z napięciem powierzchniowym na granicy ciecz-gaz ($dl = \sqrt{dr^2 + du^2}$):



$$E_g = mgh = \int_{r=R}^{r=0} \rho g u(r) \left(\pi r^2 du\right) = \pi\rho g \int_R^0 r^2 u(r) \frac{du}{dr}\, dr$$

$$E_s = \sigma S = \int_{r=R}^{r=0} \sigma(2\pi r\, dl) = 2\pi\sigma \int_R^0 r\sqrt{1 + [u'(r)]^2} dr$$

Szukamy funkcji $u(r)$, która minimalizuje całkowitą energię, przy narzuconych ograniczeniach:

$$E[u(r)] = E_g + E_s = \pi \int_R^0 \left\{ \rho g r^2 u(r) u'(r) + 2\sigma r \sqrt{1 + [u'(r)]^2} \right\} dr$$

Ograniczeniem (więzem) jest ustalona objętość kropli: $V = \pi \int_{r=R}^{r=0} r^2 du = \pi \int_R^0 r^2 u'(r)\, dr$

Dodatkowo mamy warunki brzegowe: $\left.\dfrac{du}{dr}\right|_{r=R} = u'(R) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \left.\dfrac{du}{dr}\right|_{r=0} = 0, \quad u(R) = 0$

Kąt α wyznacza się z równania Younga ($\sigma_{sg} = \sigma_{sl} + \sigma_{lg} \cos\alpha$).

Jest to problem wariacyjny, w którym minimalizujemy całkę oznaczoną, przy narzuconych więzach.

Ekstrema funkcji algebraicznych

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji $f(x)$ jest $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$.

Warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum funkcji jest:

- Jeśli $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} < 0$ wtedy funkcja $f(x)$ ma lokalne maksimum w $x = x_0$
- Jeśli $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0$ wtedy funkcja $f(x)$ ma lokalne minimum w $x = x_0$
- Jeśli $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} = 0$ wtedy funkcja $f(x)$ może mieć w x_0 lokalne minimum (np. $f(x) = x^4$ w $x = 0$) lub lokalne maksimum (np. $f(x) = -x^4$ w $x = 0$), lub nie mieć ani jednego ani drugiego (np. $f(x) = x^3$ w $x = 0$).

Warunkiem koniecznym aby punkt (x_0, y_0) był punktem stacjonarnym funkcji $f(x, y)$ jest aby:

$$df = f_x dx + f_y dy = 0 \quad \text{czyli} \quad f_x = f_y = 0 \quad \text{w tym punkcie.}$$

Możliwe zachowania funkcji $f(x, y)$ w punkcie stacjonarnym (x_0, y_0):

- lokalne maksimum gdy $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ oraz $f_{xx} < 0$,
- lokalne minimum gdy $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ oraz $f_{xx} > 0$,
- punkt siodłowy gdy $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$,
- każde z powyższych jest możliwe gdy $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$.

Ekstrema funkcji z więzami i współczynniki Lagrange'a

Punkt stacjonarny funkcji n-zmiennych $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ musi spełniać warunek:

$$df = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + ... + f_{x_n} dx_n = 0$$

Ponieważ dx_1, dx_2, ..., dx_n są dowolne więc musi zachodzić $f_{x_1} = 0,\ f_{x_2} = 0, ...,\ f_{x_n} = 0$

Rozważmy punkt stacjonarny funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$ z więzem $g(x, y, z) = c$.

Ponieważ c jest stałą, więc: $dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0$

Ponieważ $df = 0$ oraz $dg = 0$, więc także (Λ - stała, współczynnik Lagrange'a):

$$df + \Lambda dg = (f_x + \Lambda g_x)dx + (f_y + \Lambda g_y)dy + (f_z + \Lambda g_z)dz = 0$$

Ponieważ $g(x, y, z) = c$, więc x, y, z nie są niezależne, a dx, dy oraz dz nie są dowolne.
W szczególności zakładając, że np. $g_z \neq 0$ oraz wybierając $\Lambda = -f_z/g_z$:

$$(f_x + \Lambda g_x)dx + (f_y + \Lambda g_y)dy = 0$$

Zmienne x oraz y są niezależne, a więc współczynniki przy dx oraz dy muszą znikać niezależnie.
Podsumowując, mamy cztery równania z których wyliczamy x_0, y_0, z_0 oraz Λ:

$$f_x + \Lambda g_x = 0, \quad f_y + \Lambda g_y = 0, \quad f_z + \Lambda g_z = 0, \quad g(x, y, z) = c$$

- Znajdowanie punktu stacjonarnego funkcji $f(x, y, z)$ podlegającego więzowi $g(x, y, z) = c$ sprowadza się więc do znalezienia punktu stacjonarnego funkcji rozszerzonej:

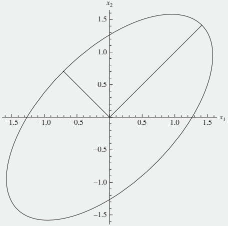
$$\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y, z) + \Lambda g(x, y, z) \quad (\text{lub } \tilde{f} = f + \Lambda(g - c)).$$

- Dodatkowe więzy można uwzględnić w podobny sposób, przy czym każdy więz jest związany z własnym współczynnikiem Lagrange'a.

Współczynniki Lagrange'a

Przykład: Znajdź obie półosie elipsy $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 8$.

Idea: znajdziemy punkty na elipsie położone najbliżej i najdalej od początku układu współrzędnych.
Tworzymy funkcję rozszerzoną odległości od początku układu z więzem w postaci równania elipsy:



$$\tilde{f}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \Lambda(3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 8)$$

Obliczamy pochodne:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f}_{x_1} &= 2x_1 + \Lambda(6x_1 - 2x_2) = 0 \\ \tilde{f}_{x_2} &= 2x_2 + \Lambda(-2x_1 + 6x_2) = 0 \end{aligned}\right\} \overset{\lambda=-1/\Lambda}{\Rightarrow} \left\{\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\ -x_1 + 3x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}\right.$$

Rozwiązujemy problem własny: $\left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= 2, \ \ \vec{u}_1 = (1,1)^{\mathrm{T}} \\ \lambda_2 &= 4, \ \ \vec{u}_2 = (-1,1)^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right.$

Wektory $\vec{u}_1$ oraz $\vec{u}_2$ są wzajemnie prostopadłe i wyznaczają kierunki osi elipsy.

Rozważmy wektor $\vec{u}_1$ - wybierając $x_1 = c_1$ i $x_2 = c_1$ oraz wstawiając do równania elipsy otrzymujemy $c_1 = \pm\sqrt{2}$.

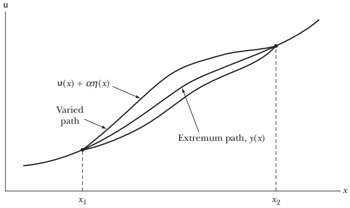
Podobnie dla wektora $\vec{u}_2$ wybierając $x_1 = -c_2$ oraz $x_2 = c_2$ otrzymujemy $c_2 = \pm 1$

A więc dłuższa oś elipsy skierowana jest wzdłuż wektora $\vec{u}_1$, a krótsza wzdłuż $\vec{u}_2$.

Podstawy rachunku wariacyjnego

Celem rachunku wariacyjnego jest znalezienie funkcji $u(x)$ dla której funkcjonał

$$J[u] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, u(x), u'(x)]dx$$



osiąga ekstremum (wartość stacjonarną).

Rozważmy funkcję $u(x,\alpha) = u(x) + \alpha\eta(x)$, przy czym $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

Warunkiem koniecznym aby funkcjonał J zależny od parametru α:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F[x, u(x,\alpha), u'(x,\alpha)]dx$$ osiągał wartość stacjonarną jest $$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$$

Przykład: Rozważmy funkcję $F = (du/dx)^2$ gdzie $u(x) = x$. Niech $\eta(x) = \sin x$. Pokaż, że dla $x_1 = 0$ i $x_2 = 2\pi$, $J(\alpha)$ osiąga wartość stacjonarną dla $\alpha = 0$.

$$J(\alpha) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{du(x,\alpha)}{dx}\right)^2 dx = \int_0^{2\pi} (1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2\cos^2 x)\, dx = 2\pi + \alpha^2\pi$$

Widać, że $J(\alpha) \geqslant J(0)$ oraz że spelniony jest warunek istnienia ekstremum.

Równanie Eulera-Lagrange'a

Z warunku koniecznego istnienia wartości stacjonarnej wynika, że:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{x_1}^{x_2} F[x, u(x), u'(x)]\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial \alpha} \right) dx$$

Ponieważ $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \eta(x)$ i $\frac{\partial u'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dx}$ więc $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial u'}\frac{d\eta}{dx} \right) dx$

Całkując drugi wyraz przez części

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial u'}\frac{d\eta}{dx}\, dx = \frac{\partial F}{\partial u'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\eta(x)\, dx$$

otrzymujemy:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial u}\eta(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\eta(x) \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} \right)\eta(x)\, dx$$

Ponieważ $\eta(x)$ jest dowolną funkcją, więc warunkiem zerowania się całki jest:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \qquad \text{(równanie Eulera-Lagrange'a)}$$

Jest to warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału J.

Notacja stosowana w rachunku wariacyjnym

- Różniczka zupełna funkcji $f(x,y,z)$ to: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$
- Różniczka zupełna funkcji $F(x,u,u')$ to: $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial u'}du'$
- Wariacja funkcji $F(x,u(x),u'(x))$ to:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' = \left\{ \delta x \equiv 0 \right\} = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'$$

- Punkt stacjonarny funkcji $f(x,y,z)$ to punkt (x_0,y_0,z_0) w którym $df = 0$.
- Funkcją stacjonarną funkcjonału $J[u]$ jest funkcja $u(x)$ dla której $\delta J = 0$.
- Zasady rachunku wariacyjnego dla sum i iloczynów są analogiczne jak dla pochodnych, np.

$$\delta(F_1 F_2) = F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1$$

- Wyprowadzenie r. Eulera-Lagrange'a z wykorzystaniem notacji wariacyjnej:

$$J[u] = \int_{x_1}^{x_2} F[x,u(x),u'(x)]dx \;\Rightarrow\; \delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} F[x,u,u']dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta F[x,u,u']dx = 0$$

$$\delta u' = (\delta u)' \;\Rightarrow\; \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}(\delta u)' \right] dx = \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u dx = 0$$

Ponieważ $\delta u(x_1) = \delta u(x_2) = 0$ oraz u, a więc także δu, są dowolne wewnątrz przedziału, więc wyrażenie podcałkowe musi być tożsamościowo równe zero, aby znikała wariacja $\delta J = 0$.

Funkcja stacjonarna funkcjonału

Przykład: Znajdź funkcję stacjonarną funkcjonału $J[u] = \int_0^1 \left[(xu')^2 + 2u^2\right] dx$, która spełnia warunki brzegowe $u(0) = 0$ oraz $u(1) = 2$.

Równanie Eulera przyjmuje postać:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; 4u - \frac{d}{dx}\left(2x^2u'\right) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x^2u'' + 2xu' - 2u = 0$$

Jest to rówanie Cauchy-Eulera, którego ogólne rozwiązanie to $u(x) = x^m$

Równanie charakterystyczne ma postać:

$$x^2m(m-1)x^{m-2}+2xmx^{m-1}-2x^m = 0 \;\;\Rightarrow\;\; m^2+m-2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; m_{1,2} = -2,\, 1$$

Ogólne rozwiązanie równania Eulera ma więc postać: $u(x) = c_1x + \dfrac{c_2}{x^2}$

Z warunków brzegowych wyznaczamy $c_1 = 2$ oraz $c_2 = 0$, czyli $u(x) = 2x$.

Dla każdej funkcji $u(x)$, funkcjonał $J[u]$ przyjmuje pewną stałą wartość (całka oznaczona), w szczególności dla funkcji stacjonarnej mamy:

$$J[u] = \int_0^1 \left[(xu')^2 + 2u^2\right] dx = \int_0^1 \left[(2x)^2 + 8x^2\right] dx = \left. 4x^3\right|_0^1 = 4$$

Dla każdej innej funkcji $u(x)$ wartość funkcjonału $J[u]$ będzie większa.

Równanie Eulera-Lagrange'a

Rozwijając różniczkę zupełną w r. E-L można je zapisać w postaci:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u'} - \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}u' - \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}u'' = 0$$

Przykład: Znajdź równanie krzywej na płaszczyźnie, wzdłuż której odległość pomiędzy dwoma punktami (x_1, y_1) i (x_2, y_2) jest najmniejsza.

Długość krzywej łączącej dwa punkty na płaszczyźnie dana jest przez:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Funkcjonał ten osiąga minimum gdy spełnia r. E-L:

$$F = \sqrt{1 + y'^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$$

A więc szukaną krzywą jest linia prosta: $y = ax + b = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$

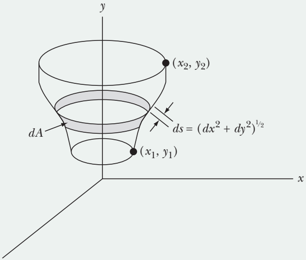
Jeśli funkcjonał F nie zależy bezpośrednio od u, wtedy w ogólności mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial u'} = c \quad \Rightarrow \quad u' = g(x; c)$$

Zastosowania rachunku wariacyjnego

Przykład: Znajdź równanie linii łączącej punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) która po obrocie wokół koplanarnej osi minimalizuje zakreśloną powierzchnię.

Pole powierzchni utworzonej w ten sposób wynosi:



$$A = \int 2\pi x \, \mathrm{d}s = 2\pi \int x(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{1/2} =$$

$$= 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x(1 + y'^2)^{1/2} \mathrm{d}x$$

Ponieważ w tym problemie $F = x(1 + y'^2)^{1/2}$, więc równanie Eulera daje:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{xy'}{(1 + y'^2)^{1/2}}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{xy'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = const \equiv a$$

Całkując ostatnie równanie dostajemy: $y = \int \frac{a \, \mathrm{d}x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} = a \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + b$

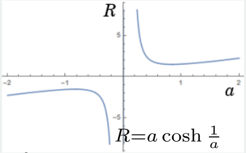
gdzie stałe a oraz b wyznaczamy z warunków aby krzywa przechodziła przez ustalone punkty.

Niech $(x_1, y_1) = (R, -L)$ oraz $(x_2, y_2) = (R, L)$, wtedy:

$$x = a\cosh\frac{y-b}{a} \quad\Rightarrow\quad \cosh\frac{L-b}{a} = \cosh\frac{-L-b}{a} \quad\Rightarrow\quad b = 0$$

Rozwiązanie ma więc postać:

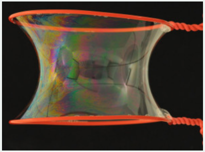
$$x = a\cosh\frac{y}{a}$$

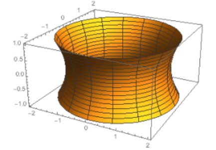


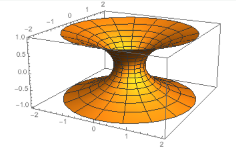
Dla $L = 1$ mamy minimum $R_0 = 1.50888$ dla $a = 0.83356$

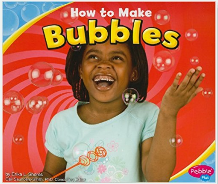
Dla $R < R_0$ nie istnieje stabilne rozwiązanie.

Dla $R > R_0$ istnieją dwa rozwiązania, z których powierzchnia "płytsza" jest stabilna, a "głębsza" nie odpowiada wartości minimalnej i jest niestabilna. Rysunki poniżej są dla $R = 2$.



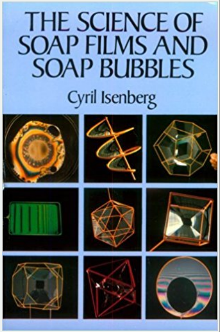






Capstone Press, 2011

Age range: $4 - 8$



Dover Publications, 1992

Age range: > 8

Inna postać równania Eulera

Dla dowolnej funkcji $F(u, u', x)$ mamy:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial u'}\frac{du'}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} = u'\frac{\partial F}{\partial u} + u''\frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{\partial F}{\partial x}$$

Korzystając z powyższej relacji znajdujemy:

$$\frac{d}{dx}\left(u'\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = u''\frac{\partial F}{\partial u'} + u'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - u'\frac{\partial F}{\partial u} + u'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}$$

Korzystając z równania E-L możemy powyższy związek przepisać w postaci:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(F - u'\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0$$

W szczególności, jeśli F nie zależy wprost od x, tzn. $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, wtedy mamy:

$$F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = const$$

Uwaga: Każde rozwiązanie powyższego równania różniczkowego, nie będące stałą, spełnia równanie Eulera. Rozwiązanie stałe może, ale nie musi, spełniać równania Eulera (zawsze trzeba to sprawdzić!).

Przykład: Znajdź funkcję $y(x)$ dla której $I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{1+y}\, dx$ osiąga wartość stacjonarną.

Ponieważ funkcja podcałkowa nie zależy od x, więc równanie E-L przyjmuje posatać:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{1+y} - y'\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{1+y} = c \quad \Rightarrow \quad (1+y)^2(1+y'^2) = \frac{1}{c^2}$$

A stąd otrzymujemy:

$$y'^2 = \frac{1-c^2(1+y)^2}{c^2(1+y)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{c(1+y)}{\sqrt{1-c^2(1+y)^2}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

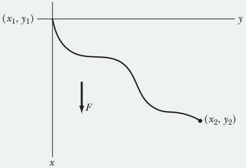
$$-\frac{1}{c}\sqrt{1-c^2(1+y)^2} = x + c' \quad \Rightarrow \quad (x+c')^2 + (1+y)^2 = \frac{1}{c^2}$$

gdzie c oraz c' są stałymi.

Zastosowania rachunku wariacyjnego

Znajdź równanie rynny ewakuacyjnej, tzn. krzywej wzdłuż której ciało zsuwając się bez tarcia przebędzie daną długość w najkrótszym czasie (problem brachistochrony)

Czas potrzebny na przebycie odcinka krzywej od (x_1, y_1) do (x_2, y_2) dany jest przez:



$$T = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{ds}{v} = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gx}} = \int_{x_1=0}^{x_2} \left(\frac{1 + y'^2}{2gx} \right)^{1/2} dx$$

Ponieważ w tym problemie $F = \left(\dfrac{1 + y'^2}{x} \right)^{1/2}$, więc równanie E-L daje:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = const \equiv \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'^2}{x(1 + y'^2)} = \frac{1}{2a}$$

Przekształcając ostatnie równanie do postaci: $y = \displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(2ax - x^2)^{1/2}}$

oraz wykonując zmianę zmiennych $x = a(1 - \cos\theta)$ otrzymujemy:

$$y = \int a(1 - \cos\theta)\mathrm{d}\theta = a(\theta - \sin\theta)$$

Są to równania parametryczne cykloidy.

Naturalne warunki brzegowe

Załóżmy, że wartości funkcji $u(x)$ są nieustalone na brzegach przedziału (x_1, x_2), co oznacza, że $\delta u(x_{1,2}) \neq 0$. W tej sytuacji wariacja funkcjonału prowadzi do równania E-L oraz tzw. naturalnych warunków brzegowych (NWB):

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right]\delta u dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x_1} = \left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x_2} = 0$$

Przykład: Dany jest funkcjonał $J[u] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[-(u')^2 + u^2 + 2ux\right]dx$.
Znajdź funkcję stacjonarną $u(x)$ gdy $u(0)$ oraz $u(\pi/2)$ nie są znane.

Równanie E-L przyjmuje postać:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad u + x - \frac{d}{dx}(-u') = 0 \quad \Rightarrow \quad u'' + u = -x$$

Rozwiązania równania jednorodnego i niejednorodnego przyjmują postać:

$$u_h(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x \qquad \text{oraz} \qquad u_p(x) = -x$$

Naturalne warunki brzegowe: $\left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x=0} = -u'(0) = 0$ oraz $\left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_{x=\pi/2} = -u'(\pi/2) = 0$

prowadzą do: $c_1 = 1$ oraz $c_2 = -1$

Ostatecznie otrzymujemy: $u(x) = \sin x - \cos x - x$