Metody Lagrange'a i Hamiltona w Mechanice

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 3

Zmienne położenie punktów końcowych

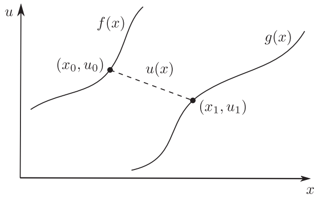
W niektórych zastosowaniach granice przedziału nie są określone i muszą być wyznaczone wraz ze stacjonarną funkcją (np. odległość pomiędzy krzywymi).

Niech $J[u] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u')dx$

oraz $u_0 = u(x_0) = f(x_0)$ i $u_1 = u(x_1) = g(x_1)$

Można pokazać, że rozwiązaniem tego problemu jest równanie E-L uzupełnione o następujące dwa warunki:

$$\left[F + (f' - u')\frac{\partial F}{\partial u'}\right]_{x=x_0} = \left[F + (g' - u')\frac{\partial F}{\partial u'}\right]_{x=x_1} = 0$$



Przykład: Znajdź najmniejszą odległość pomiędzy $f(x) = x - 3$ i $g(x) = e^x$

Dla funkcjonału odległości $I[u] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (u')^2}dx$ funkcją stajonarną na płaszczyźnie jest linia prosta $u(x) = c_1 x + c_2$.

Dodatkowe warunki prowadzą do równań:

$$\left.\begin{array}{l} (1 + c_1^2) + (c_1 - c_1^2) = 0 \\ c_1 e^{x_1} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c_1 = -1,\ x_1 = \ln 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x_1) = g(x_1) = 1$$

$$(x_1, u(x_1)) = (0, 1) \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = -x + 1$$

Ponieważ $(x_0, u_0) = (2, -1) \quad \Rightarrow \quad I[u] = \int_2^0 \sqrt{1 + (u')^2}\, dx = -2\sqrt{2}$

Funkcjonał zawierający pochodne wyższych rzędów

Rozważmy funkcjonał $I[u] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u', u'')dx$

Odpowiadające mu równanie E-L ma postać: $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right) = 0$

Jest to zwyczajne równanie różniczkowe czwartego rzędu, a więc potrzebne są cztery warunki brzegowe wynikające ze znikania wariacji $\delta u = 0$ oraz $\delta u' = 0$ na krańcach przedziału całkowania w punktach x_1 i x_2.

Naturalne warunki brzegowe w tym wypadku mają postać:

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right) - \frac{\partial F}{\partial u'}\right]_{x=x_1,x_2} = 0 \quad \text{oraz} \quad \left.\frac{\partial F}{\partial u''}\right|_{x=x_1,x_2} = 0$$

W ogólnym przypadku mamy: $I[u] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, u, u', u'', ..., u^{(n)}\right) dx$

Równanie E-L przyjmuje postać:

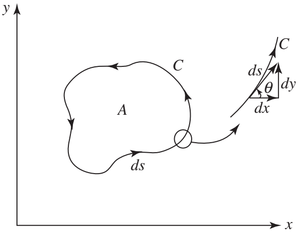
$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right) - ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial u^{(n)}}\right) = 0$$

Jest to zwyczajne równanie różniczkowe rzędu $2n$, wymagające $2n$ warunków brzegowych wynikających ze znikania wariacji $\delta u = 0$, $\delta u' = 0$, ..., $\delta u^{(n-1)} = 0$ na krańcach przedziału całkowania w punktach x_1 i x_2.

Funkcjonały z dwiema zmiennymi niezależnymi

Rozważmy funkcjonał w którym funkcja $u(x, y)$ zależy od dwóch zmiennych niezależnych x oraz y:

$$I[u] = \iint_A F(x, y, u, u_x, u_y)\, dxdy$$



Żądamy aby wariacja funkcjonału znikała ($\delta x = \delta y = 0$):

$$\delta I[u] = \iint\limits_A \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u_y \right] dxdy = 0$$

Z przemienności operacji wariacji i różniczkowania, oraz pochodnej iloczynu, mamy:

$$\iint\limits_A \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)\delta u + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\delta u \right] dxdy = 0$$

Korzystając z twierdzenia Greena, $\iint_A (P_x + Q_y) dxdy = \oint_C (Pdy - Qdx)$, możemy powyższe równanie przepisać w postaci:

$$\iint\limits_A \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right] \delta u dxdy + \oint\limits_C \left[\frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{dx}{ds} \right] \delta u ds = 0$$

Równanie E-L: $\dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0$

z warunkiem brzegowym $u(x, y) = u_0(x, y)$ na konturze C jeśli $\delta u = 0$.

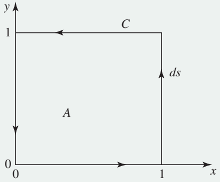
Jeśli $\delta u \neq 0$ na C, wtedy NWB na C ma postać: $\dfrac{\partial F}{\partial u_x}\dfrac{dy}{ds} - \dfrac{\partial F}{\partial u_y}\dfrac{dx}{ds} = 0$

Przykład: Znajdź równanie E-L dla funkcji stacjonarnej $u(x,y)$ funkcjonału $\iint_A \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_x u_y + u^2 + 2xu\right) dxdy$, gdzie obszar A to kwadrat $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Warunki brzegowe są zadane przez $u(0,y) = 3y$, $u(x,0) = 2x$ oraz jako NWB dla $x = 1$ lub $y = 1$.

Równanie E-L przyjmuje postać:

$$u + x - \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x + \frac{1}{2}u_y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}u_x\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u = x$$



Warunki brzegowe: zadane w postaci $u(0,y) = 3y$, $u(x,0) = 2x$ oraz NWB:

$$\begin{cases} x = 1: \; dx = 0, \; dy = ds, \; \dfrac{dx}{ds} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial F}{\partial u_x} = 0 \;\Rightarrow\; u_x + \dfrac{1}{2}u_y = 0 \\ y = 1: \; dx = -ds, \; dy = 0, \; \dfrac{dy}{ds} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial F}{\partial u_y} = 0 \;\Rightarrow\; u_x = 0 \end{cases}$$

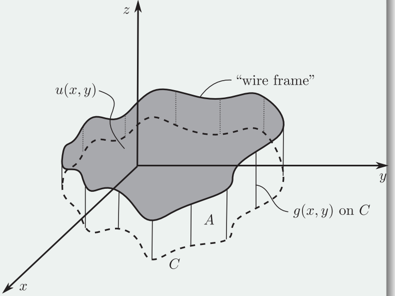
Minimalne powierzchnie - problem Plateau

W wielu problemach fizyki energia potencjalna jest proporcjonalna do powierzchni. Zastosowania m. in. w inżynierii molekularnej czy fizyce czarnych dziur.

Przykład: Najmniejsza powierzchnia rozpostarta na drucie opisanym funkcją $u(x,y) = g(x,y)$, którego rzut na płaszczyznę (x,y) jest krzywą C.

Chcemy zminimalizować funkcjonał powierzchni:

$$I[u] = \iint\limits_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dxdy$$



przy warunku brzegowym $u(x,y) = g(x,y)$ na konturze C.

Równanie E-L przyjmuje postać:

$$0 - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)^{-1/2}(2u_x)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)^{-1/2}(2u_y)\right] = 0$$

$$\left(1 + u_y^2\right) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + \left(1 + u_x^2\right) u_{yy} = 0$$

Równania Eulera dla wielu zmiennych zależnych

- Rozważamy funkcjonał zależny od dwóch zmiennych niezależnych (x, y) oraz dwóch zależnych $u(x, y),\ v(x, y)$ w postaci: $F(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y)$.

  Odpowiadające mu równania E-L mają postać:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial v_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial v_y}\right) = 0$$

  Ustalone lub naturalne warunki brzegowe na konturze C mają postać:

$$u(x, y) = u_0(x, y) \qquad \text{lub} \qquad \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{dx}{ds} = 0$$

$$v(x, y) = v_0(x, y) \qquad \text{lub} \qquad \frac{\partial F}{\partial v_x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{\partial v_y}\frac{dx}{ds} = 0$$

- Rozważamy sytuację w której F na postać $F(x, u_i(x), u_i'(x)),\ \ i = 1, 2, ..., n$.

  Odpowiadające mu równania E-L mają postać:

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial u_i'} = 0, \quad \text{dla } \ i = 1, 2, ..., n$$

  z warunkami brzegowymi $u_i(x_1) = u_i^1,\ u_i(x_2) = u_i^2$ lub $\left.\frac{\partial F}{\partial u_i'}\right|_{x_1} = \left.\frac{\partial F}{\partial u_i'}\right|_{x_2} = 0$

Przykład - dwie funkcje zależne

Przykład: Znajdź funkcje stacjonarne $u(x)$ i $v(x)$ funkcjonału:

$$I[u,v] = \int_0^{\pi/4} \left(v'^2 + v'u' + u^2 \right) dx$$

z warunkami brzegowymi $u(0) = 1$, $v(0) = 3/2$, $u(\pi/4) = 2$.

Równania E-L i ich rozwiązania:

$$\left.\begin{array}{l} v'' - 2u = 0 \\ u'' + 2v'' = 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; u'' + 4u = 0 \;\Rightarrow\; u(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

Z warunków brzegowych mamy: $u(x) = \cos(2x) + 2\sin(2x)$

Wstawiając do pierwszego z r. E-L otrzymujemy:

$$v(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) - \sin(2x) + c_3 x + c_4$$

Z warunku brzegowego $v(0) = 3/2$ otrzymujemy $c_4 = 2$.

Ponieważ nie jest podany warunek brzegowy dla $v(\pi/4)$, więc stosujemy NWB:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial v'}\right|_{x=\pi/4} = 0 \;\Rightarrow\; \left[u' + 2v'\right]_{x=\pi/4} = 0 \;\Rightarrow\; c_3 = 0$$

Ostatecznie mamy: $v(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x) - \sin(2x) + 2$

Równania E-L z więzami - więzy całkowe

Rozważmy funkcjonał $I[u] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,u,u')dx$, oraz załóżmy, że funkcja $u(x)$ podlega dodatkowemu ograniczeniu (więzowi) w postaci całki oznaczonej:

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x,u,u')dx = K \equiv const$$

Do znalezienia r. E-L wykorzystamy metodę współczynników Lagrange'a:

$$\delta\left\{\Lambda\left[\int_{x_1}^{x_2} G(x,u,u')dx - K\right]\right\} = \delta\left\{\Lambda\int_{x_1}^{x_2} G(x,u,u')dx\right\} = 0$$

Łącząc ten wynik z wariacją funkcjonału $I[u]$ otrzymujemy:

$$\delta\left[\int_{x_1}^{x_2} F(x,u,u')dx + \Lambda\int_{x_1}^{x_2} G(x,u,u')dx\right] \equiv \delta\int_{x_1}^{x_2} \tilde{F}(\Lambda,x,u,u')dx = 0$$

Rozszerzony funkcjonał $\tilde{F} \equiv F + \Lambda G$ spełnia standardowe r. E-L, przy czym współczynnik Lagrange'a Λ jest dodatkowym parametrem, który musi być wyznaczony z warunków początkowych $u(x_1) = u_1$, $u(x_2) = u_2$ oraz r. więzów.

Więzy w postaci całkowej

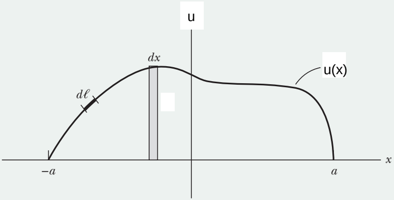
Przykład: Szukamy równania krzywej o zadanej długości l, która przechodząc przez punkty $(-a, 0)$ oraz $(a, 0)$ ogranicza wraz z odcinkiem osi x obszar o maksymalnej powierzchni.

Szukamy wartości stacjonarnej funkcjonału:

$$I[u] = \int F(x, u, u')dx = \int_{-a}^{a} u\, dx$$

z więzem w postaci całkowej:

$$\int G(x, u, u')dx = \int_{-a}^{a} [1 + u'^2]^{1/2} \mathrm{d}x = l$$



Równanie E-L dla $\tilde{F} = F + \Lambda G$ przyjmuje postać:

$$1 - \Lambda \frac{d}{dx}\left[\frac{u'}{(1 + u'^2)^{1/2}}\right] = 0 \quad \overset{\int dx}{\Rightarrow} \quad \frac{\Lambda u'}{(1 + u'^2)^{1/2}} = x - C_1$$

Po kolejnym przekształceniu i scałkowaniu otrzymujemy:

$$u(x) = \pm\sqrt{\Lambda^2 - (x - C_1)^2} + C_2 \quad \Rightarrow \quad (x - C_1)^2 + (u - C_2)^2 = \Lambda^2$$

Stałe C_1, C_2 i Λ wyznaczamy z warunków narzuconych przez więzy:
$C_1 = C_2 = 0$, $\Lambda = a$ oraz $a = l/\pi$.

Więzy algebraiczne i różniczkowe

Poszukujemy funkcji stacjonarnych $u(x)$ i $v(x)$ funkcjonału:

$$I[u,v] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,u,v,u',v')dx$$

podlegających więzom algebraicznym w postaci: $\phi(u,v) = 0$

lub więzom w postaci równania różniczkowego: $\phi(u,v,u',v') = 0$

Główną różnicą pomiędzy więzami w postaci całkowej i różniczkowej (algebraicznej) jest to, że te pierwsze charakteryzują cały przedział (x_1, x_2), a te ostatnie zależą od każdego punktu wewnątrz tego przedziału.

Dlatego w metodzie mnożników Lagrange'a, Λ jest efektywnie funkcją $\Lambda(x)$. Prowadzi to do funkcji rozszerzonej w postaci $\tilde{F} = F + \Lambda(x)\phi$

Z warunku znikania wariacji funkcjonału $\delta I[u,v] = 0$ otrzymujemy r. E-L dla funkcji $u(x)$ i $v(x)$.

Wariacja funkcji więzów daje: $\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\phi}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial\phi}{\partial v'}\delta v' = 0$

Mnożąc $\delta\phi$ przez $\Lambda(x)$ i całkując w zakresie od x_1 do x_2, otrzymujemy:

$$\int_{x_1}^{x_2} \Lambda(x) \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\delta v + \frac{\partial\phi}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial\phi}{\partial v'}\delta v' \right) dx = 0$$

Więzy algebraiczne i różniczkowe

Całkując przez części dwa ostatnie wyrazy otrzymujemy:

$$\int_{x_1}^{x_2} \Lambda(x)\frac{\partial\phi}{\partial u'}\delta u' dx = \left[\Lambda(x)\frac{\partial\phi}{\partial u'}\delta u\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\Lambda\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right)\delta u\, dx = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \Lambda(x)\frac{\partial\phi}{\partial v'}\delta v' dx = \left[\Lambda(x)\frac{\partial\phi}{\partial v'}\delta v\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\Lambda\frac{\partial\phi}{\partial v'}\right)\delta v\, dx = 0$$

Łącząc powyższe z $\delta I = \delta\int F dx = 0$, otrzymujemy:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) + \Lambda\frac{\partial\phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\Lambda\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right)\right]\delta u \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial v'}\right) + \Lambda\frac{\partial\phi}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\Lambda\frac{\partial\phi}{\partial v'}\right)\right]\delta v\right\} dx = 0$$

A stąd otrzymujemy:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) + \Lambda\frac{\partial\phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\Lambda\frac{\partial\phi}{\partial u'}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\tilde{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial v'}\right) + \Lambda\frac{\partial\phi}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\Lambda\frac{\partial\phi}{\partial v'}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\tilde{F}}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial v'}\right) = 0$$

Korzystając z powyższych r. E-L oraz z r. więzów wyznaczamy: $u(x)$, $v(x)$, $\Lambda(x)$.

Przykład: Znajdź funkcje stacjonarne dla funkcjonału:

$$I[u,v] = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}\left[(u')^2 + (v')^2\right] + uv \right\} dx$$

podlegające więzowi w postaci $\phi(u,v') = v' - u = 0$, przy warunkach brzegowych: $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, $v(0) = 0$, $v(1) = 0$.

Funkcja rozszerzona ma postać:

$$\tilde{F}(\Lambda, x, u, v, u', v') = F + \Lambda(x)\phi = \frac{1}{2}\left(u'^2 + v'^2\right) + uv + \Lambda(x)(v' - u)$$

R. E-L dla funkcji $u(x)$ i $v(x)$ przyjmują postać:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I:} & v - \Lambda - \dfrac{d}{dx}(u') = 0 \quad \Rightarrow \quad u'' - v = -\Lambda \\ \text{II:} & u - \dfrac{d}{dx}(v' + \Lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad v'' - u = -\Lambda' \end{array}\right\} \quad \underset{\text{I}-\text{II}}{\overset{\text{I}'}{\Longrightarrow}} \quad u''' - v' = v'' - u$$

Korzystając z równania więzów, $v' - u = 0$, otrzymujemy: $u''' - u' = 0$

Rozwiązanie ma postać: $u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3$

Z równania więzów znajdujemy: $v(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 x + c_4$

Stałe c_1 - c_4 wyznaczamy z warunków brzegowych:

$c_1 = e/(e-3)$, $c_2 = 1/(e-3)$, $c_3 = -(e+1)/(e-3)$, $c_4 = (e-1)/(e-3)$

Więzy algebraiczne i różniczkowe

W ogólnym przypadku n funkcji zależnych $(u_i(x),\ i = 1, ..., n)$ oraz m więzów postaci $(\phi_j(u_1, ..., u_n, u'_1, ..., u'_n) = 0,\ j = 1, ..., m)$ mamy $n + m$ równań:

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u'_i}\right) = 0, \quad i = 1, ..., n; \qquad \phi_j = 0, \quad j = 1, ..., m$$

gdzie $\tilde{F} = F + \sum_{j=1}^{m} \Lambda_j(x)\phi_j$

Z równań tych oraz z warunków brzegowych wyznaczamy nieznane funkcje stacjonarne $u_i(x)$ oraz mnożniki Lagrange'a $\Lambda_j(x)$.

Jeśli funkcją F jest lagrangian układu, $L = T - V$, to zasada wariacyjna prowadzi do wniosku, że całka po czasie z lagrangianu układu musi w ruchu rzeczywistym przyjmować wartość ekstremalną (zasada Hamiltona). Kiedy siły działające w układzie są zachowawcze to wówczas r. E-L przyjmują postać:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

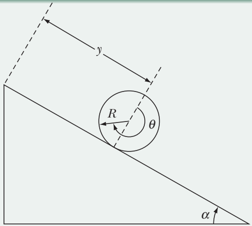
$i = 1, ..., n$, gdzie n jest liczbą stopni swobody, a q_i to współrzędne uogólnione.

Przykład: Dysk toczący się bez poślizgu po statycznej równi pochyłej.

Jako zmienne służące do opisu ruchu wybieramy y oraz θ.

Warunek toczenia się bez poślizgu zapiszemy jako więz:

$$y = R\theta \quad \Rightarrow \quad \phi(y,\theta) = y - R\theta = 0$$



Energia kinetyczna i potencjalna toczącego się dysku:

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2, \qquad V = -mgy\sin\alpha$$

$$\tilde{F} = T - V + \Lambda(t)\phi = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy\sin\alpha + \Lambda(t)(y - R\theta)$$

Równania E-L przyjmują postać:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I:} & mg\sin\alpha + \Lambda - \dfrac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \;\Rightarrow\; m\ddot{y} - mg\sin\alpha = \Lambda \\[2ex] \text{II:} & -R\Lambda - \dfrac{d}{dt}(I\dot{\theta}) = 0 \;\Rightarrow\; I\ddot{\theta} = -R\Lambda \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{I+II}]{\text{I}\cdot R} \left\{ \ddot{y} = R\ddot{\theta} \right\} \Rightarrow$$

$$\left(mR + \frac{I}{R}\right)\ddot{y} = mgR\sin\alpha \;\Rightarrow\; \ddot{y} = \frac{2}{3}g\sin\alpha,\; \ddot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{g\sin\alpha}{R},\; \Lambda(t) = -\frac{1}{3}mg\sin\alpha$$

Minimum, maksimum czy punkt siodłowy

- Równania E-L wynikają z żądania zerowania się wariacji funkcjonału i stanowią warunek konieczny jaki musi spełniać funkcja, aby funkcjonał przyjmował dla niej wartość stacjonarną (minimum, maksimum lub punkt siodłowy).
- O tym, która z powyższych sytuacji ma miejsce, decyduje zachowanie drugiej wariacji funkcjonału:

$$J(\alpha, u(x;\alpha)) = J(u(x)) + \left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha + \left.\frac{d^2J}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0}\frac{\alpha^2}{2!} + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

gdzie $\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial u'}\eta'(x)\right)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$

$$\left.\frac{d^2J}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\eta^2 + 2\eta\eta'\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial u'} + \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}\eta'^2\right)dx$$

- Funkcjonał $J[u]$ osiąga minimum (maksimum) dla funkcji stacjonarnej $u(x)$ spełniającej równanie E-L jeśli $\left.\frac{d^2J}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} > 0 \ (< 0)$ dla wszystkich $x \in [x_1, x_2]$ oraz dla każdej $\eta(x) \not\equiv 0$ która spełnia warunki $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.