

## Zestaw 10 / Transformacje kanoniczne, teoria Hamiltona-Jacobiego:

1. Układ mechaniczny o dwóch stopniach swobody posiada hamiltonian:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \left( \frac{p_1 - p_2}{2q_1} \right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2$$

- (a) Pokaż, że transformacja kanoniczna do nowych współrzędnych  $Q_1, Q_2, P_1, P_2$ , dla której  $Q_1 = q_1^2, Q_2 = q_1 + q_2$ , ma funkcję generującą  $S(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1^2 P_1 + (q_1 + q_2) P_2 + f(q_1, q_2)$ , gdzie  $f$  jest dowolną funkcją.
- (b) Dobierz funkcję  $f$  tak, aby nowy hamiltonian nie zależał od współrzędnych  $Q_1$  i  $Q_2$ . Wskazówka: założyć, że  $f = f(q_1 + q_2)$ .
- (c) Korzystając z (b) znajdź rozwiązanie równań ruchu we współrzędnych  $q_1, q_2, p_1, p_2$ .
2. (a) (Lim 2083) Znajdź rozwiązanie  $S(q, \alpha, t)$  równania Hamiltona-Jacobiego dla cząstki opisanej hamiltonianem  $H = \frac{1}{2}p^2$ . Znajdź transformacje kanoniczne  $q = q(\beta, \alpha)$  oraz  $p = p(\beta, \alpha)$  gdzie  $\beta$  i  $\alpha$  są odpowiednio przetransformowanymi współrzędną i pędem.
- (b) Rozważmy zmodyfikowany hamiltonian  $H_1 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$ . W tym przypadku  $\alpha$  będzie zależeć od czasu. Korzystając z transformacji znalezionej w punkcie (a), wyraż przetransformowany hamiltonian  $\tilde{H}$  poprzez  $\alpha, \beta$  oraz  $t$ . Znajdź  $\beta(t)$  i  $\alpha(t)$  oraz pokaż, że rozwiązania  $q[\beta(t), \alpha(t)], p[\beta(t), \alpha(t)]$  równań ruchu dla hamiltonianu  $H_1$  opisują ruch oscylatora harmonicznego.
3. (Goldstein) Pokaż, że funkcja

$$S = \frac{m\omega}{2} (q^2 + \alpha^2) \operatorname{ctg} \omega t - \frac{m\omega q \alpha}{\sin \omega t}$$

jest rozwiązaniem równania Hamiltona-Jacobiego dla prostego oscylatora harmonicznego o hamiltonianie

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$$

Pokaż, że funkcja ta generuje poprawne rozwiązanie dla ruchu oscylatora harmonicznego.

4. (Goldstein, Greiner, ...) Korzystając z metody Hamiltona-Jacobiego rozwiąż problem rzutu ukośnego. Znajdź równanie trajektorii i zależność współrzędnych od czasu zakładając, że cząstka została wystrzelona w chwili  $t = 0$  z początku układu, z prędością  $v_0$  i pod kątem  $\alpha$ .