Zestaw 2 / Rachunek wariacyjny:

1. **Znajdź wartość stacjonarną funkcjonału $J[y] = \int_1^2 \frac{y'^2}{x^3} dx$, jeśli spełnione są warunki brzegowe $y(1) = 3$ i $y(2) = 18$. Pokaż, że znaleziona wartość stacjonarna jest globalnym minimum.**

2. **Samolot porusza się w płaszczyźnie (x, z) z punktu $(-a, 0)$ do $(a, 0)$, przy czym $z = 0$ oznacza poziom ziemi. Koszt lotu samolotu na wysokości z wynosi $\exp(-kz)$ na jednostkę odległości, gdzie $k > 0$ jest znaną stałą. Znajdź wartość stacjonarną w problemie polegającym na minimalizacji całkowitego kosztu podróży.**

3. **Linią geodezyjną nazywamy najkrótszą odległość pomiędzy dwoma punktami. Znajdź linie geodezyjne łączące dwa dowolne punkty na powierzchni: (a) sfery, (b) walca, (c) stożka. W zależności od problemu wygodnie posłużyć się współrzędnymi sferycznymi lub cylindrycznymi.**

4. **Zgodnie z zasadą Fermata promień światła porusza się pomiędzy dwoma punktami po trajektorii która minimalizuje czas jego podróży. Rozważmy promień rozchodzący się w medium, którego współczynnik załamania dany jest przez $n = n_0 \left(1 + \frac{z}{a}\right)^{1/2}$, gdzie n_0 oraz a są dodatnimi stałymi. Załóżmy, że promień światła przechodząc przez początek układu współrzędnych porusza się poziomo. Pokaż, że trajektoria tego promienia nie jest linią prostą lecz parabolą $z = x^2/4a$.**

5. **Producent płynu do prania musi wyprodukować objętość X płynu w czasie T. Niech $x(t)$ oznacza objętość płynu wyprodukowaną po czasie t. Załóżmy, że koszt produkcji na jednostkę objętości dany jest przez $\alpha + \beta\dot{x}$, natomiast koszt magazynowania na jednostkę czasu przez γx, gdzie α, β i γ są dodatnimi stałymi. Całkowity koszt produkcji opisany jest funkcjonałem:**

   $$K = \int_0^X (\alpha + \beta\dot{x}) dx + \int_0^T \gamma x dt = \int_0^T \left[(\alpha + \beta\dot{x})\dot{x} + \gamma x\right] dt$$

   Znajdź funkcję $x(t)$ określającą optymalną szybkość produkcji. W obliczeniach przyjmij $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $T = 4$ oraz warunki brzegowe $x(0) = 0$ i $x(4) = X$.

6. **Rozważmy funkcjonał:**

   $$I[u, v] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(u')^2 + (v')^2 + 2u'v'\right] dx$$

   z warunkami brzegowymi $u(00) = 0$, $v(1) = 1$ oraz pozstałymi naturalnymi warunkami brzegowymi. Wyznacz równania E-L dla tego funkcjonału oraz wszystkie pozostałe warunki brzegowe. Spróbuj również znaleźć jawne postacie funkcji $u(x)$ i $v(x)$.

7. **Znajdź równanie E-L które spełnia funkcja stacjonarna $u(x)$ dla funkcjonału**

   $$I[u] = \int_0^1 \left[(\sqrt{x}u')^2 - (xu)^2\right] dx$$

   przy warunkach brzegowych $u(0) = 0$ i $u(1) = 0$ oraz więzie całkowym $\int_0^1 (xu)^2 dx = 1$. Spróbuj również znaleźć jawną postać funkcji $u(x)$.

8. **Rozważmy kabel o masie na jednostkę długości ρ zawieszony pomiędzy punktami (x_1, u_1) oraz (x_2, u_2) i znajdujący się w polu grawitacyjnym o natężeniu g. Wyznacz kształt $u(x)$ jaki przyjmie kabel w stanie równowagi, wiedząc że jego długość wynosi ℓ.**