Zestaw 3 / Równania Lagrange'a:

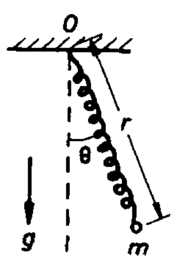
1. **Na bezmasowej sprężynie o długości swobodnej l_0 zawieszono masę m (rysunek). Układ znajduje się w polu grawitacyjnym i może się poruszać jedynie w płaszczyźnie pionowej. Zapisz lagranżjan układu i znajdź równania ruchu dla zmiennych θ oraz $\lambda = (r - r_0)/r_0$, gdzie r_0 jest długością spoczynkową sprężyny na której wisi masa m. Wprowadź oznaczenia $\omega_s^2 = k/m$ oraz $\omega_p^2 = g/r_0$. Znajdź rozwiązania równań ruchu w przybliżeniu małych drgań (harmonicznych).**

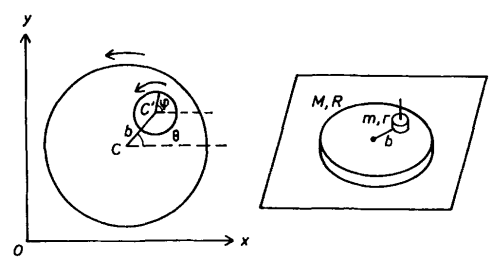
2. **Dysk o masie M i promieniu R ślizga się bez tarcia po poziomej powierzchni. Drugi dysk o masie m i promieniu r jest zamocowany na osi przechodzącej przez jego środek w punkcie oddalonym ob od środka dużego dysku, tak że może się obracać bez tarcia (rysunek). Znajdź równania ruchu układu. Jako współrzędne uogólnione wybierz współrzędne (x, y) środka większego dysku oraz kąty obrotu większego θ i mniejszego ϕ dysku.**

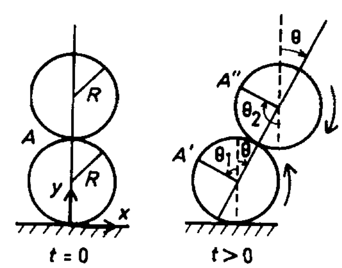
3. **Jednorodny walec o masie M i promieniu R spoczywa na pziomej powierzchni, a na nim umieszczono drugi, identyczny walec (rysunek). Górnemu walcowi nadano infinitezymalne wychylenie z położenia równowagi. Zakładając, że oba walce toczą się bez poślizgu znajdź (a) lagranżjan układu, (b) stałe ruchu, oraz (c) pokaż, że dopóki walce pozostają w kontakcie zachodzi:**

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12g(1-\cos\theta)}{R(17 + 4\cos\theta - 4\cos^2\theta)}$$

gdzie θ jest kątem jaki tworzy płaszczyżna w której leżą osie walców z pionem.



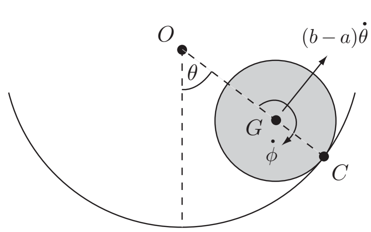


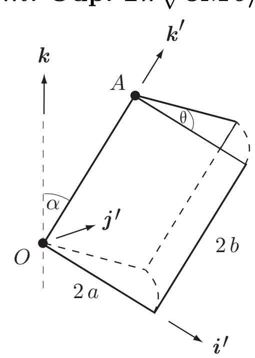


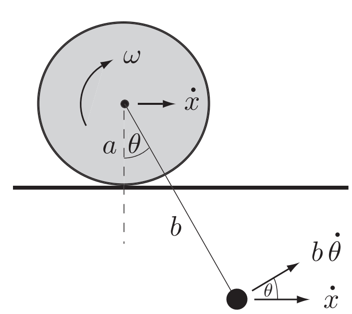
4. **Pełny cylinder o promieniu a może toczyć się bez poślizgu po wewnętrznej powierzchni nieruchomego, wydrążonego walca o promieniu $b > a$ (rysunek). Znajdź równanie ruchu cylindra oraz okres jego małych drgań. (Odp. $T = 2\pi\sqrt{3(b-a)/(2g)}$).**

5. **Jednorodne, prostokątne drzwi o szerokości $2a$ mogą się swobodnie wahać na zawiasach. Drzwi są wadliwie zamontowane, a linia mocowania zawiasów tworzy z pionem kąt α (rysunek). Znajdź równanie ruchu dla kąta θ wychylenia drzwi z położenia równowagi oraz okres małych drgań. Odp. $T = 4\pi\sqrt{a/(3g\sin\alpha)}$**

6. **Jednorodny dysk o masie M i promieniu a moze toczyć się bez poślizgu po poziomym torze. Do osi dysku została zaczepiona nierozciągliwa i nieważka nić o długości b, na której zawieszono masę m (rysunek). Cały układ może poruszać się jedynie w płaszczyźnie pionowej. Wybierając jako współrzędne uogólnione przesunięcie poziome x środka dysku, oraz kąt θ jaki rworzy nić z pionem, zapisz równania Lagrange'a. Pokaż, że x jest współrzędną cykliczną i znajdź odpowiadający jej zachowany pęd p_x. Czy p_x jest poziomą składową zwykłego pędu układu? Znajdź okres małych wahań masy m. Odp. $2\pi\sqrt{3Mb/g/(3M+2m)}$**



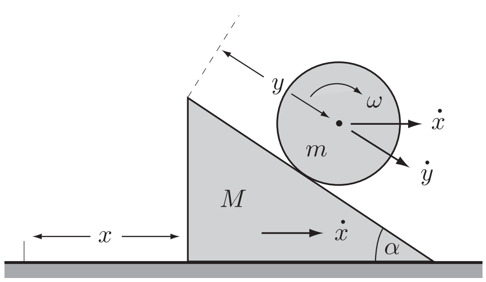


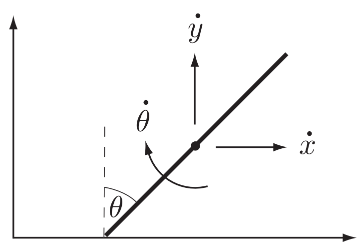


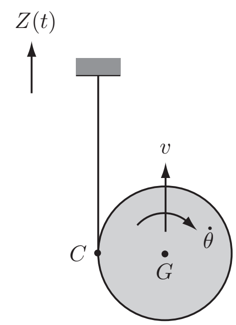
7. Jednorodna kula o masie m stacza się bez poślizgu z równi pochyłej o masie M i kącie nachylenia α (rysunek). Równia może poruszać się bez tarcia po poziomej powierzchni. Wybierając jako współrzędne uogólnione przesunięcie równi x względem ustalonego punktu, oraz położenie środka kuli y względem początku równi, zapisz równania Lagrange'a oraz znajdź przyspieszenie równi względem ziemi oraz przyspieszenie środka kuli względem równi.

8. Pręt o długości $2a$ oparty jest jednym końcem o podłogę po której może się ślizgać bez tarcia (rysunek). Początkowo pręt tworzy kąt α z pionem, a następnie zostaje puszczony swobodnie po czym porusza się w płaszczyźnie pionowej. Wybierając jako współrzędne uogólnione poziome przesunięcie x środka pręta oraz kąt θ jaki tworzy pręt z pionem, zapisz równania Lagrange'a. Pokaż, że x jest stałe w tym ruchu oraz uzasadnij, że równanie na θ jest równoważne równaniu wynikającemu z zasady zachowania energii. Znajdź siłę reakcji N podłoża na pręt jako funkcję θ. Odp. $N = mg(4 + 3\cos^2\theta - 6\cos\alpha\cos\theta)/(1 + 3\sin^2\theta)^2$

9. Na jednorodny cylinder nawinięto lekką, nierozciągliwą nić (yo-yo). Swobodny koniec linki zamocowany jest do uchwytu, tak, że yo-yo porusza się pionowo, oraz prosty odcinek linki także jest pionowy (rysunek). Uchwyt porusza się w kierunku pionowym ruchem zadanym przez funkcję $Z(t)$. Wybierając jako współrzędną uogólnioną kąt obrotu θ yo-yo zapisz odpowiednie równanie Lagrange'a. Znajdź przyspieszenie yo-yo. Jakie przyspieszenie musi mieć uchwyt aby yo-yo pozostawało w spoczynku. Zakładając, że cały układ rozpoczyna ruch ze stanu spoczynku, znajdź wyrażenie na zależność całkowitej energii $E = T + V$ od czasu. Odp. $E = \frac{1}{6}m(\dot{Z}^2 + 2gZ)$







10. Cząstka o masie m jest zawieszona na lekkiej, nierozciągliwej nici przechodzącej przez pierścień umieszczony pionowo pod punktem zamocowania linki do uchwytu (rysunek). Cząstka porusza się w płaszczyźnie pionowej, a linka jest zawsze napięta. W pewnym momencie uchwyt zaczyna poruszać się do góry zgodnie z funkcją $Z(t)$. W efekcie cząstka porusza się jak zwykłe wahadło którego długość zależy od czasu jak $a - Z(t)$ gdzie a jest pewną dodatnią stałą. Wybierając jako współrzędną uogólnioną kąt θ pomiędzy linką i pionem znajdź odpowiednie równanie Lagrange'a. Znajdź funkcję energii h oraz całkowitą energię E układu i pokaż, że $h = E - m\dot{Z}^2$. Czy istnieje jakaś wielkość zachowana w tym ruchu?

11. Jednorodna obręcz o masie M może się ślizgać bez tarcia po poziomej powierzchni. Po obręczy może się poruszać robak o masie m. Układ jest w spoczynku kiedy robak zaczyna się poruszać (rysunek). O jaki kąt obróci się obręcz kiedy robak wykona jedno okrążenie obręczy? Jako współrzędne uogólnione w tym problemie proszę wybrać: współrzędne (X, Y) środka obręczy oraz kąt θ obrotu obręczy względem położenia początkowego. Punkt A na rysunku jest ustalonym punktem na obręczy, który w chwili początkowej wraz ze środkiem obręczy wyznaczał linię równoległą do położa. Kąt ϕ niech oznacza kąt o jaki przesunął się robak względem obręczy. Uwaga: ϕ nie jest współrzędną uogólniona, ale znaną funkcją czasu.