

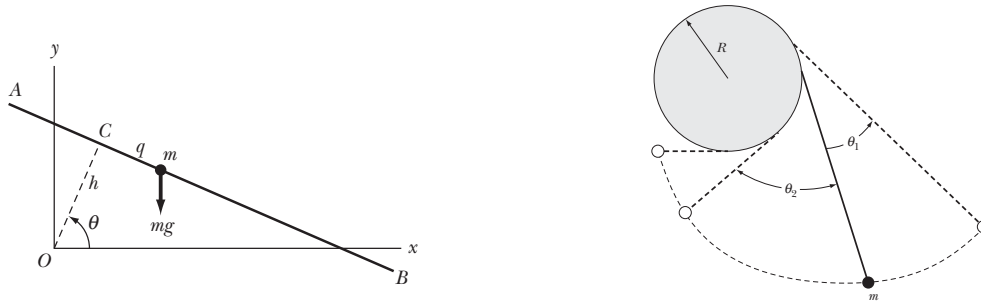
Zestaw 4 / Równania Lagrange'a i Hamiltona:

1. Cząstka o masie m może się swobodnie ślizgać wzdłuż drutu AB (rysunek) którego odległość od początku układu wynosi h . Linia OC obraca się wokół początku układu ze stałą prędkością kątową $\dot{\theta} = \omega$. Do opisu pozycji cząstki wykorzystujemy zmienne uogólnione θ (rysunek) oraz odległość q od punktu C. Zakładając, że na cząstkę działa siła grawitacji oraz, że warunki początkowe dane są przez $\theta(0) = 0$, $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$, pokaż, że zależność współrzędnej q od czasu dana jest przez:

$$q(t) = \frac{g}{2\omega^2} (\cosh \omega t - \cos \omega t)$$

Znajdź Hamiltonian układu i porównaj go z całkowitą energią. Czy energia jest zachowana w tym ruchu?

2. Wahadło skonstruowano w ten sposób, że masa m została zawieszona na nierozciągliwej i nieważkiej nici o długości l , której drugi koniec przymocowano do najwyższego punktu pionowego dysku o promieniu R gdzie $R < l/\pi$ (rysunek). Znajdź równanie ruchu wahadła oraz wyznacz okres jego małych drgań. Znajdź położenie linii względem której wychylenie kątowe wahadła w obie strony jest takie samo. Umieść początek układu współrzędnych w środku dysku, a jako współrzędną uogólnioną wybierz kąt θ jaki tworzy z osią y promień wodzący ostatniego punktu styku linki z dyskiem.



3. Wahadłem sferycznym nazywamy masę m zawieszoną na nierozciągliwej i nieważkiej nici o długości a , poruszającej się w polu grawitacyjnym. Różni się ona od zwykłego wahadła matematycznego tylko tym, że ruch nie jest ograniczony do płaszczyzny. Wybierając jako współrzędne uogólnione kąty polarny θ oraz azymutalny ϕ , znajdź równania Hamiltona dla tego problemu.
4. Cząstka o masie m porusza się pod wpływem siły grawitacji wzdłuż spirali $z = k\theta$, $r = \text{const}$ gdzie k jest stałą, a oś z jest skierowana pionowo. Znajdź równania ruchu Hamiltona.
5. Dwie masy m_1 i m_2 są połączone bezmasową sprężyną o długości b i stałej sprężystości k . Układ spoczywa na gładkim stole i może się zarówno obracać jak i wykonywać drgania. (a) Znajdź równania Lagrange'a, (b) znajdź pędy uogólnione odpowiadające współrzędnym cyklicznym, (c) znajdź równania ruchu Hamiltona.
6. Punktowa masa m porusza się w potencjale o symetrii cylindrycznej $V(\rho, z)$. Znajdź Hamiltonian oraz kanoniczne równania ruchu w układzie obracającym się ze stałą prędkością kątową ω względem osi symetrii potencjału. Wyniki przedstaw we współrzędnych kartezjańskich oraz cylindrycznych.