Zestaw 7 / Drgania tłumione, wymuszone, rezonans:

1. Dwie masy m_1 i m_2 połączone sprężyną o stałej k mogą ślizgać się bez tarcia po poziomej powierzchni. Znajdź okres drgań tego układu.

2. Oscylacje galwanometru spełniają równanie:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Galwanometr, który wskazuje $x = a$ zostaje odłączony od układu i chcemy aby jego wskazówka możliwie szybko znalazła się w przedziale $-\epsilon a \leqslant x \leqslant \epsilon a$, gdzie ϵ jest małą stałą dodatnią. Jaką wartość powinien mieć parametr β? Jedną z możliwości jest wybranie wartości β takiej aby pierwsze minimum pojawiło się dla $x = -\epsilon a$. Pokaż, że mozna to osiągnąc wybierając

$$\beta = \omega_0 \left[1 + \left(\frac{\pi}{\ln(1/\epsilon)}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Jeśli β ma powyższą wartość, pokaż, że czas potrzebny na to aby wskazówka znalazła się w pierwszym minimum jest w przybliżeniu równy $\tau_0 = \ln(1/\epsilon)/\omega_0$.

3. Blok o masie M jest połączony z drugim blokiem o masie m za pomocą sprężyny o swobodnej długości $8a$. Układ znajduje się w położeniu równowagi, kiedy pierwszy blok spoczywa na podłodze a sprężyna i drugi blok znajdują się pionowo nad nim, przy czym sprężyna ma wtedy długość $7a$. Górny blok zostaje dociśniety do dołu do położenia kiedy sprężyna ma połowę swojej naturalnej długości i puszczony swobodnie. Pokaż, że dolny blok oderwie się od podłogi jeśli $M < 2m$. W przypadku gdy $M = 3m/2$ znajdź czas po którym dolny blok oderwie się od podłogi.

4. Cząstka o masie m znajduje się w spoczynku na końcu sprężyny o stałej k zwisającej z nieruchomego uchwytu. W chwili $t = 0$ na masę zaczyna działać stała siła zewnętrzna F skierowana w dół i działa przez okres t_0. Pokaż, że po ustaniu działania tej siły położenie masy względem punktu równowagi x_0 opisane jest przez:

$$x - x_0 = \frac{F}{k}\left[\cos\omega_0(t - t_0) - \cos\omega_0 t\right] \quad \text{gdzie} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

5. (a) Znajdź odpowiedź oscylatora harmonicznego z tłumieniem, tzn. $x(t)$, na siłe wymuszającą postaci (funkcja Heaviside'a):

$$H(t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a, & t > t_0 \end{cases}$$

(b) Korzystając z liniowości znajdź odpowiedź układu na funkcję impulsową:

$$I(t_0, t_1) = H(t_0) - H(t_1) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \text{ i } t > t_1 \\ a, & t_0 < t < t_1 \end{cases}$$

w przypadku (i) słabego, (ii) silnego tłumienia.

6. Znajdź odpowiedź oscylatora harmonicznego na siłe wymuszającą postaci:

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ i } t > \pi/\omega \\ a\sin\omega t, & 0 < t < \pi/\omega \end{cases}$$

7. Znajdź odpowiedź $x(t)$ oscylatora harmonicznego z tłumieniem, początkowo znajdującego się w spoczynku w stanie równowagi, który poddano działaniu siły

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a\,\dfrac{t}{\tau}, & 0 < t < \tau \\ a, & t > \tau \end{cases}$$

8. Znajdź rozwinięcie w szereg Fouriera i narysuj sumę czterech pierwszych wyrazów, funkcji

$$F(t) = \begin{cases} \sin\omega t, & 0 < t < \pi/\omega \\ 0, & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$