

Matematyczne Metody FIZYKI I

Wykład 10

Przestrzeń wektorowa z iloczynem skalarnym

Definicja: Przestrzeń wektorową \mathcal{V} w której określony jest iloczyn skalarny pomiędzy wektorami nazywamy **przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym**.

Definicja: Niech \vec{u} oraz \vec{v} będą wektorami w przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym \mathcal{V} , przy czym $\vec{v} \neq \mathbf{0}$. **Projekcją (rzutem) ortogonalną** wektora \vec{u} na wektor \vec{v} nazywamy:

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$$

Definicja: Zbiór wektorów S w przestrzeni wektorowej \mathcal{V} z iloczynem skalarnym nazywamy **ortogonalnym** jeśli dowolne dwa wektory w tym zbiorze są wzajemnie ortogonalne. Jeśli dodatkowo wektory w S są jednostkowe, to zbiór S nazywamy **ortonormalnym**.

Uwaga: Jeśli zbiór S tworzy bazę w \mathcal{V} to taką bazę nazywamy odpowiednio **bazą ortogonalną** lub **ortonormalną**.

Uwaga: Aby z bazy która nie jest ortogonalna, utworzyć bazę ortonormalną należy do wektorów tej bazy zastosować metodę ortonormalizacji Grama-Schmidta.

Twierdzenie: Zbiór $S = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$ niezerowych wektorów ortogonalnych jest liniowo niezależny.

$$\mathbf{D}: \mathbf{0} = \langle c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n, \vec{v}_i \rangle = c_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_i \rangle + \dots + c_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle + \dots + c_n \langle \vec{v}_n, \vec{v}_i \rangle \Rightarrow c_i = \mathbf{0}$$

Podprzestrzenie ortogonalne

Definicja: Podprzestrzenie \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 przestrzeni wektorowej \mathcal{V} nazywamy ortogonalnymi jeśli dla wszystkich wektorów $\vec{v}_1 \in \mathcal{S}_1$ i $\vec{v}_2 \in \mathcal{S}_2$ zachodzi $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$.

Przykład: $\mathcal{S}_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T\right)$ $\mathcal{S}_2 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T\right)$

Definicja: Jeśli \mathcal{S} jest podprzestrzenią \mathcal{V} , to ortogonalnym dopełnieniem przestrzeni \mathcal{S} nazywamy podprzestrzeń: $\mathcal{S}^\perp = \{\vec{u} \in \mathcal{V} : \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0, \vec{v} \in \mathcal{S}\}$

Przykład: Znajdź dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni \mathcal{S} przestrzeni \mathcal{R}^4 napiętej przez kolumny macierzy \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T \vec{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{S}^\perp = \text{span} \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

A więc $\mathcal{S}^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$

Definicja: Niech \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 będą podprzestrzeniami \mathcal{V} . Jeśli dowolny wektor $\vec{v} \in \mathcal{V}$ można jednoznacznie zapisać jako sumę wektorów $\vec{s}_1 \in \mathcal{S}_1$ i $\vec{s}_2 \in \mathcal{S}_2$ wtedy mówimy, że \mathcal{V} jest sumą prostą podprzestrzeni \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 co zapisujemy jako $\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$.

Przykład: Przestrzenie \mathcal{S}_1 i \mathcal{S}_2 oraz \mathcal{S} i \mathcal{S}^\perp z powyższych przykładów.

Rzut wektora na podprzestrzeń

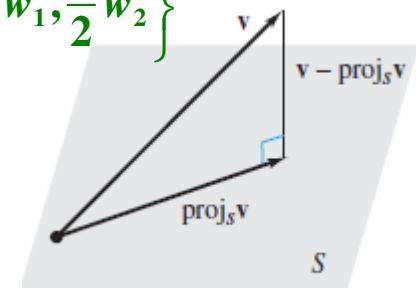
Definicja: Niech $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_t\}$ będzie ortonormalną bazą w podprzestrzeni \mathcal{S} przestrzeni wektorowej \mathcal{V} . Projekcją (rzutem) wektora $\vec{v} \in \mathcal{V}$ na podprzestrzeń \mathcal{S} nazywamy:

$$\text{proj}_{\mathcal{S}} \vec{v} = \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle \vec{u}_2 + \dots + \langle \vec{u}_t, \vec{v} \rangle \vec{u}_t$$

Przykład: Znajdź rzut wektora $\vec{v} = (1, 1, 3)^T$ na podprzestrzeń \mathcal{S} przestrzeni \mathcal{R}^3 napiętą przez wektory $\vec{w}_1 = (0, 3, 1)^T$ oraz $\vec{w}_2 = (2, 0, 0)^T$.

Znajdujemy ortonormalną bazę w podprzestrzeni \mathcal{S} : $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \vec{w}_1, \frac{1}{2} \vec{w}_2 \right\}$

$$\text{proj}_{\mathcal{S}} \vec{v} = \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle \vec{u}_2 = \frac{6}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Twierdzenie: Niech będzie dana macierz A o wymiarach $m \times n$, wówczas:

- $\mathcal{R}(A)$ oraz $\mathcal{N}(A^T)$ są ortogonalnymi podprzestrzeniami \mathcal{R}^m

$$\mathbf{D:} \vec{v} \in \mathcal{R}(A); \vec{u} \in \mathcal{N}(A^T) \Rightarrow \exists \vec{x}: \vec{v} = A\vec{x}; A^T \vec{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}^T A\vec{x} = (A^T \vec{u})^T \vec{x} = 0$$

- $\mathcal{R}(A^T)$ oraz $\mathcal{N}(A)$ są ortogonalnymi podprzestrzeniami \mathcal{R}^n
- $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T) = \mathcal{R}^m$ $\mathbf{D:} \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T) \Rightarrow \mathcal{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^T)$
- $\mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}^n$

Odwzorowanie liniowe

Definicja: Niech \mathcal{V} i \mathcal{W} będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $Q = \mathcal{R}$ lub \mathcal{C} .

Funkcję $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ nazywamy **odwzorowaniem (transformacją) liniowym** przestrzeni \mathcal{V} w \mathcal{W} , jeśli dla dowolnych $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ oraz dowolnej stałej $c \in Q$ spełnione są warunki:

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \quad T(c \vec{v}) = c T(\vec{v})$$

Uwaga: Definiujemy transformacje **zerową i identycznościową** jako: $O(\vec{v}) \equiv \vec{0}$ i $I(\vec{v}) \equiv \vec{v}$

Przykład: Czy funkcja $T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$ jest transformacją liniową $\mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$.

$$\begin{aligned} T(\vec{u} + \vec{v}) &= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = ((u_1 + v_1) - (u_2 + v_2), (u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2)) = \\ &= ((u_1 - u_2) + (v_1 - v_2), (u_1 + 2u_2) + (v_1 + 2v_2)) = \\ &= ((u_1 - u_2), (u_1 + 2u_2)) + ((v_1 - v_2), (v_1 + 2v_2)) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \end{aligned}$$

$$T(c \vec{u}) = T(cu_1, cu_2) = (cu_1 - cu_2, cu_1 + 2cu_2) = c(u_1 - u_2, u_1 + 2u_2) = cT(\vec{u})$$

Przykład: Czy podane funkcje są transformacjami liniowymi $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$.

- $f(x) = \sin(x)$ $\sin(x_1 + x_2) \neq \sin(x_1) + \sin(x_2)$
- $f(x) = x^2$ $(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$
- $f(x) = x + 1$ $x_1 + x_2 + 1 \neq x_1 + 1 + x_2 + 1$

Odwzorowanie liniowe

Własności odwzorowań liniowych:

- $T(\vec{0}) = \vec{0}$ **D:** $T(\vec{0}) = T(0\vec{v}) = 0T(\vec{v}) = \vec{0}$
- $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$ **D:** $T(-\vec{v}) = T(-1\vec{v}) = (-1)T(\vec{v}) = -T(\vec{v})$
- $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$
- $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n \Rightarrow T(\vec{v}) = c_1T(\vec{v}_1) + c_2T(\vec{v}_2) + \dots + c_nT(\vec{v}_n)$

Definicja: Jądrem odwzorowania liniowego nazywamy przeciwobraz wektora zerowego z przestrzeni \mathcal{W} : $\text{Ker } T = \{\vec{v} \in \mathcal{V} : T(\vec{v}) = \vec{0}_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}\}$

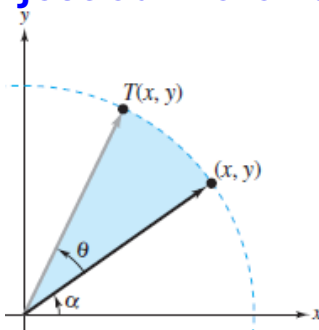
Definicja: W przypadku gdy $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, odwzorowanie liniowe nazywamy **operatorem liniowym** w \mathcal{V} .

Twierdzenie: Niech będzie dana macierz rzeczywista A o wymiarach $m \times n$.

Odwzorowanie $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ jest odwzorowaniem liniowym.

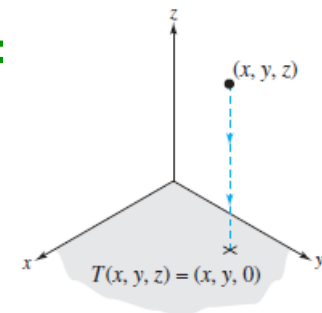
Przykład: Obrót w \mathcal{R}^2 :

$$Q(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$



Rzut na płaszczyznę xy :

$$P(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$



Reprezentacja macierzowa

Wprowadźmy bazy, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ w \mathcal{V} oraz $\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m\}$ w \mathcal{W} . Wówczas odwzorowanie liniowe T działając na wektory bazy \mathcal{B} produkuje liniową kombinację wektorów bazy \mathcal{B}' :

$$T(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \vec{f}_i = \alpha_{1j} \vec{f}_1 + \alpha_{2j} \vec{f}_2 + \dots + \alpha_{1m} \vec{f}_m$$

Liczba α_{ij} jest i -tą składową wektora $T(\vec{e}_j)$ w bazie \mathcal{B}' i oznaczamy $[T(\vec{e}_j)]_{\mathcal{B}'}$.

Tablicę liczb $[\alpha_{ij}]$ czyli macierz A o $\dim \mathcal{W}$ wierszach i $\dim \mathcal{V}$ kolumnach nazywamy **reprezentacją macierzową** odwzorowania T w bazach \mathcal{B} i \mathcal{B}' , i oznaczamy $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left([T(\vec{e}_1)]_{\mathcal{B}'} \mid [T(\vec{e}_2)]_{\mathcal{B}'} \mid \dots \mid [T(\vec{e}_n)]_{\mathcal{B}'} \right)$$

W przypadku operatorów liniowych w przestrzeni \mathcal{V} mamy: $T(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{e}_i$

Zapiszemy relację $\vec{y} = T(\vec{x})$ za pomocą współrzędnych w bazie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$:

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i = T\left(\sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{e}_i \Rightarrow y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$$

W innej bazie $\{\vec{e}'_i\}$ w której współrzędne wektorów \vec{x}, \vec{y} oraz A są x'_i, y'_i oraz α'_{ij} ta sama relacja geometryczna $\vec{y} = T(\vec{x})$ ma postać:

$$y'_i = \sum_{j=1}^n \alpha'_{ij} x'_j$$

Reprezentacja macierzowa

Przykład: Znajdź reprezentację macierzową operatora rzutowania $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

w bazach:

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T(\vec{e}_1)(\vec{e}_2)(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underbrace{\hspace{10em}}_{[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$$

Przykład: Znajdź współrzędne wektora $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (1, 2, 3)^T$ w bazie \mathcal{B}'

$$(\mathcal{B}' | \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) = (I | P^{-1})$$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (1, 2, 3)^T \Rightarrow [\vec{v}]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (-6, 8, -3)^T$$

Przykład: Znajdź $[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}'}$ gdzie $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (1, 2, 3)^T$

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [\vec{v}]_{\mathcal{B}'}$$

Ważne klasy macierzy kwadratowych

- macierz symetryczna: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
- macierz antysymetryczna: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$
 $\det \mathbf{A}^T = \det(-\mathbf{A}) \Rightarrow \det \mathbf{A} = (-1)^n \det \mathbf{A}$
a więc dla n nieparzystych $\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A} \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0$
- macierz ortogonalna: $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$
 $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \det \mathbf{I} \Rightarrow \det \mathbf{A}^T \det \mathbf{A} = 1 \Rightarrow (\det \mathbf{A})^2 = 1 \Rightarrow \det \mathbf{A} = \pm 1$
- macierz hermitowska: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$
 $\det \mathbf{A}^\dagger = \det \mathbf{A} \Rightarrow \det(\mathbf{A}^{*T}) = \det \mathbf{A} \Rightarrow (\det \mathbf{A})^* = \det \mathbf{A} \in \mathcal{R}$
- macierz antyhermitowska: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\dagger$
- macierz normalna to dla której zachodzi: $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$
- macierz unitarna: $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{I}$
 $\det(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}) = \det \mathbf{I} \Rightarrow \det \mathbf{A}^{*T} \det \mathbf{A} = 1 \Rightarrow (\det \mathbf{A})^* \det \mathbf{A} = 1$
 $\Rightarrow |\det \mathbf{A}|^2 = 1$
- macierz unimodularna: $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{I}$ oraz $\det \mathbf{A} = 1$

Zmiana bazy i transformacje podobieństwa

Macierz przejścia pomiędzy dwoma bazami $\{\vec{e}_i\}$ i $\{\vec{e}'_i\}$ zdefiniowaliśmy przez:

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^n c_{ji} \vec{e}_j \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{E}'$$

Natomiast transformacje współrzędnych dowolnego wektora przy zmianie bazy mają wówczas postać:

$$x_j = \sum_{i=1}^n x'_i c_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{C} \vec{x}'$$

Znajdziemy teraz prawa transformacyjne dla macierzy reprezentujących operatory liniowe przy zmianie bazy. Równanie operatorowe $\vec{y} = T(\vec{x})$ można zapisać jako równanie macierzowe w każdej z baz $\vec{y} = \mathbf{A} \vec{x}$ oraz $\vec{y}' = \mathbf{A}' \vec{x}'$

Korzystając ze związków określających transformacje współrzędnych wektorów mamy:

$$\mathbf{C} \vec{y}' = \mathbf{A} \mathbf{C} \vec{x}' \quad \Rightarrow \quad \vec{y}' = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \vec{x}'$$

Relację pomiędzy macierzami \mathbf{A} i \mathbf{A}' określoną przez $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$ nazywamy **transformacją podobieństwa**. O macierzach \mathbf{A} i \mathbf{A}' mówimy, że są **podobne**.

Uwaga: Macierze podobne reprezentują ten sam operator liniowy T w różnych bazach. dlatego wszystkie własności operatora niezależne od bazy posiadają też macierze \mathbf{A} i \mathbf{A}' .

Własności macierzy podobnych

Ogólne własności transformacji podobieństwa $A' = S^{-1}AS$

■ $A = I \Rightarrow A' = I$ D: $A' = S^{-1}IS = S^{-1}S = I$

■ $\det A = \det A'$

D: $\det A' = \det(S^{-1}AS) = \det S^{-1} \det A \det S = \det A \det(S^{-1}S) = \det A$

■ $\text{Tr } A = \text{Tr } A'$

D: $\text{Tr } A' = \sum_i A'_{ii} = \sum_{i,j,k} (S^{-1})_{ij} A_{jk} S_{ki} = \sum_{i,j,k} S_{ki} (S^{-1})_{ij} A_{jk} = \sum_{j,k} \delta_{kj} A_{jk} = \sum_j A_{jj} = \text{Tr } A$

W przypadku gdy S jest macierzą unitarną, tzn. $S^{-1} = S^\dagger$ wtedy: $A' = S^{-1}AS = S^\dagger AS$

Transformacje unitarne przekształcają bazy ortonormalne w bazy ortonormalne:

$$\langle \vec{e}'_i | \vec{e}'_j \rangle = \left\langle \sum_k S_{ki} \vec{e}_k \left| \sum_r S_{rj} \vec{e}_r \right. \right\rangle = \sum_k S_{ki}^* \sum_r S_{rj} \langle \vec{e}_k | \vec{e}_r \rangle = \sum_k S_{ki}^* \sum_r S_{rj} \delta_{kr} = \sum_k S_{ki}^* S_{kj} = (S^\dagger S)_{ij} = \delta_{ij}$$

Dla transformacji unitarnych mamy:

■ $A^\dagger = \pm A \Rightarrow (A')^\dagger = (S^\dagger AS)^\dagger = S^\dagger A^\dagger S = \pm S^\dagger AS = \pm A'$

■ $A^\dagger = A^{-1} \Rightarrow (A')^\dagger A' = (S^\dagger AS)^\dagger (S^\dagger AS) = S^\dagger A^\dagger S S^\dagger AS = S^\dagger A^\dagger AS = S^\dagger IS = S^\dagger S = I$

Problem własny

Problemem własnym dla macierzy kwadratowej $A_{n \times n}$ nazywamy znalezienie wielkości skalarnych λ (**wartości własnych**) oraz niezerowych wektorów \vec{x} (**wektorów własnych**) spełniających jednocześnie **równanie własne**: $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = 0$

Powyższy układ ma nietrywialne rozwiązania tylko wtedy gdy **$\det(A - \lambda I) = 0$**

Równanie to nazywamy **równaniem charakterystycznym**. Sam wyznacznik po rozwinięciu jest wielomianem (w. charakterystyczny) $w(\lambda)$ stopnia n z wyrazem wiodącym $(-1)^n \lambda^n$

Dowód: Z definicji wyznacznika mamy:

$$\det(A - \lambda I) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} (a_{1i_1} - \delta_{1i_1} \lambda) (a_{2i_2} - \delta_{2i_2} \lambda) \dots (a_{ni_n} - \delta_{ni_n} \lambda)$$

Najwyższą potęgę λ otrzymujemy z wyrazu:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + O(\lambda^{n-1})$$

Twierdzenie: Macierz jest osobliwa wtedy i tylko wtedy gdy ma zerową wartość własną.

$$\det(A - 0I) = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A nazywamy **spektrum** i oznaczamy $\sigma(A)$.

Wartości własne i wektory własne

Twierdzenie: Dowolna kombinacja liniowa wektorów własnych macierzy A odpowiadających tej samej wartości własnej λ jest także wektorem własnym macierzy A odpowiadającym tej wartości własnej λ .

D: Niech $\vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + \dots + c_n \vec{x}_n$ oraz $A\vec{x}_i = \lambda \vec{x}_i$

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= A(c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + \dots + c_n \vec{x}_n) = c_1 A\vec{x}_1 + c_2 A\vec{x}_2 + \dots + c_n A\vec{x}_n = \\ &= c_1 \lambda \vec{x}_1 + c_2 \lambda \vec{x}_2 + \dots + c_n \lambda \vec{x}_n = \lambda (c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + \dots + c_n \vec{x}_n) = \lambda \vec{x} \end{aligned}$$

W szczególności dowolny wektor własny pomnożony przez stałą różną od zera jest również wektorem własnym odpowiadającym tej samej wartości własnej.

Przykład: Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

a więc mamy dwie wartości własne: $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 3$

wektory własne: $\lambda_1 = -1: \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3: \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Math
Player

Wartości własne i wektory własne

Przykład: Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

a więc mamy dwie wartości własne: $\lambda_1 = 1 + i$ i $\lambda_2 = 1 - i$

Wektory własne:

$$\lambda_1 = 1 + i: \begin{pmatrix} 2 - i & -5 \\ 1 & -2 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} (2 - i)x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 - (2 + i)x_2 = 0 \end{cases}$$

Z każdego z równań otrzymujemy $x_1 = (2 + i)x_2$

A więc wektorem własnym do wartości własnej λ_1 jest $\vec{v}_1 = x_2 \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 \end{pmatrix}$

Podobnie znajdujemy, że wektorem własnym do wartości własnej λ_2 jest:

$$\vec{v}_2 = x_2 \begin{pmatrix} 2 - i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Twierdzenie: Jeśli macierz A jest rzeczywista wtedy zespolone wartości własne występują zawsze w parach wzajemnie sprzężonych, tzn. jeśli $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma(A)$

Wartości własne i wektory własne

Przykład: Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1 - \lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = (\lambda - 5)(\lambda + 3)^2 = 0$$

a więc mamy trzy wartości własne (w tym jedną podwójną):

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -3$$

Wektory własne:

$$\lambda_1 = 5: \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

A więc wektorem własnym do wartości własnej λ_1 jest $\vec{v}_1 = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{2,3} = -3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

co oznacza, że: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

Wartości własne i wektory własne

Możemy wyrazić x_1 poprzez x_2 i x_3 , przy czym x_2 i x_3 mogą przyjmować dowolne wartości. Niech $x_2=c_2$ i $x_3=c_3$, wówczas możemy napisać:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 + 3c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ponieważ c_2 i c_3 są dowolne, możemy najpierw ustalić $c_3 = 0$ i znaleźć jeden wektor własny, a następnie $c_2 = 0$ i znaleźć drugi wektor własny. W rezultacie znajdujemy dwa różne wektory własne do zdegenerowanej wartości własnej $\lambda = -3$:

$$\vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

W tym przykładzie mamy tylko dwie różne wartości własne ale wciąż trzy różne wektory własne.

Uwaga: Jeśli istnieje n różnych wartości własnych, to zawsze będziemy mieli n różnych wektorów własnych. Powtarzające się wartości własne nazywamy **zdegenerowanymi**. Zdegenerowanej wartości własnej może odpowiadać tylko jeden albo więcej różnych wektorów własnych.

Wartości własne i wektory własne

Przykład: Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -5 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

a więc mamy trzy wartości własne (w tym jedną podwójną): $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$

Wektory własne:

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

A więc wektorem własnym do wartości własnej λ_1 jest $\vec{v}_1 = c_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{2,3} = 2: \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Math
Player

Rozwiązanie układu zależy od jednego parametru c_3 : $\vec{v}_2 = c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

A więc mamy tylko dwa różne wektory własne.