Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 10

Uogólnione wektory własne

Definicja: Wektor $\vec{\mathbf{x}}_m$ nazywamy uogólnionym wektorem własnym rzędu m macierzy $\mathbf{A}$ do wartości własnej λ jeśli $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^m\,\vec{\mathbf{x}}_m = 0$ ale $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\,\vec{\mathbf{x}}_m \neq 0$

Przykład: Znajdź uogólniony wektor własny rzędu 2 do wartości własnej λ=4 macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda I) = (3-\lambda)(4-\lambda)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \text{ oraz } \lambda_{2,3,4} \equiv \lambda = 4$$

Wektory własne do wartości własnej λ=4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \left.\begin{matrix} \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3 \\ \\ \Rightarrow \quad x_4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}} = x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wybieramy $\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ a drugi wektor znajdujemy jako ortogonalny do $\vec{\mathbf{v}}_1$

$$\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

A więc do potrójnej wartości własnej λ=4 istnieją tylko dwa wektory własne.

Jest to przyczyna z powodu której nie potrafimy zdiagonalizować macierzy $\mathbf{A}$.

Uogólnione wektory własne

Znajdziemy teraz uogólniony wektor własny rzędu 2 do wartości własnej λ=4:

$$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2\vec{\mathbf{x}}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad x_4=0$$

$$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&0\\-1&-1&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x_1\neq -x_2-x_3$$

$$\left.\begin{matrix}x_4=0\\ x_1\neq -x_2-x_3\end{matrix}\right\}\overset{\text{np.}}{\Rightarrow}\quad \vec{\mathbf{x}}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Natomiast nie istnieje uogólniony wektor własny rzędu 3 do wartości własnej λ=4, ponieważ musiałyby zachodzić jednocześnie warunki:

$$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^3\vec{\mathbf{x}}_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0 \qquad (\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2\vec{\mathbf{x}}_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\neq 0$$

czyli składowa x_4 wektora musiałaby być jednocześnie równa zero i różna od zera, co jest niemożliwe.

Ciągi uogólnionych wektorów własnych

Definicja: Ciągiem generowanym przez uogólniony wektor własny $\vec{\mathbf{x}}_m$ rzędu m stowarzyszony z wartością własną λ nazywamy zbiór wektorów $\{\vec{\mathbf{x}}_m, \vec{\mathbf{x}}_{m-1}, ...\vec{\mathbf{x}}_1\}$ określony przez:

$$\vec{\mathbf{x}}_j = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_{j+1} \quad \text{gdzie} \quad j = m-1, m-2, ..., 1 \qquad (*)$$

Przykład: Znajdź ciąg generowany przez uogólniony wektor własny rzędu 2 do wartości własnej λ=4 z poprzedniego przykładu.

$$\vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A wiec generowany ciąg ma postać $\{\vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{x}}_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \right\}$

Twierdzenie: Jeśli $\vec{\mathbf{x}}_m$ jest uogólnionym wektorem własnym rzędu m macierzy $\mathbf{A}$ do wartości własnej λ, wtedy $\vec{\mathbf{x}}_j$ określone relacją (*) jest uogólnionym wektorem własnym rzędu j do tej samej wartości własnej.

Dowód: Mamy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^m \vec{\mathbf{x}}_m = \mathbf{0}$ oraz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{m-1} \vec{\mathbf{x}}_m \neq \mathbf{0}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}_j = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_{j+1} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{m-j}\vec{\mathbf{x}}_m \;\Rightarrow\; & (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^j \vec{\mathbf{x}}_j = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^m \vec{\mathbf{x}}_m = \mathbf{0} \\ \Rightarrow\; & (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{j-1} \vec{\mathbf{x}}_j = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{m-1} \vec{\mathbf{x}}_m \neq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \vec{\mathbf{x}}_j - \text{u.w.w. rzędu } j$$

Ciągi uogólnionych wektorów własnych

Twierdzenie: Każdy ciąg uogólnionych wektorów własnych jest układem wektorów liniowo niezależnych.

Dowód (indukcyjny):

- Dla ciągu o długości 1 uogólniony wektor własny $\vec{\mathbf{x}}_1$ jest po prostu wektorem własnym, a więc $\vec{\mathbf{x}}_1 \neq \mathbf{0}$, dlatego

$$c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \mathbf{0}$$

- Załóżmy, że wszystkie ciągi zawierające dokładnie $k-1$ wektorów są liniowo niezależne i rozważmy ciąg złożony z k wektorów. Chcemy pokazać, że

$$c_k \vec{\mathbf{x}}_\mathrm{k} + c_{k-1}\vec{\mathbf{x}}_\mathrm{k\text{-}1} + \ldots + c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad c_k = c_{k-1} = \ldots = c_1 = \mathbf{0}$$

Mnożymy od lewej strony przez $(\mathbf{A}\text{-}\lambda\mathbf{I})^{k-1}$. Dla wszystkich j < k zachodzi:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-1} c_j \vec{\mathbf{x}}_j = c_j (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-j-1} (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{j} \vec{\mathbf{x}}_j = c_j (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-j-1} \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Stąd mamy} & c_k (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-1} \vec{\mathbf{x}}_k = \mathbf{0} \\ \text{ale} & (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-1} \vec{\mathbf{x}}_k \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c_k = \mathbf{0}$$

A więc zachodzi $c_{k-1}\vec{\mathbf{x}}_\mathrm{k\text{-}1} + \ldots + c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 = \vec{\mathbf{0}}$

Ale układ wektorów $\vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{k}-1}, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_1$ jest ciągiem o długości $k-1$, który z założenia jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych. A więc mamy $c_k = c_{k-1} = \ldots = c_1 = \mathbf{0}$

Baza kanoniczna

<u>Definicja:</u> **Bazą kanoniczną** dla macierzy $\mathbf{A}$ stopnia n nazywamy układ n liniowo niezależnych uogólnionych wektorów własnych złożony całkowicie z ciągów (tzn. że jeśli uogólniony wektor rzędu m pojawia się w bazie to również w bazie występuje cały ciąg generowany przez ten wektor).

<u>Uwaga:</u> Najprostszą bazą kanoniczną (jeśli istnieje) jest baza złożona z liniowo niezależnych wektorów własnych (ciągów o długości 1). Taka baza istnieje zawsze kiedy wartości własne macierzy są różne.

<u>Przykład:</u> Znajdź bazę kanoniczną dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

Wartości własne i wektory własne dane są przez:

$$\lambda_1 = 1: \ \vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -2: \ \vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A więc baza kanoniczna macierzy $\mathbf{A}$ to $\left\{ \begin{pmatrix} -5 & 2 \end{pmatrix}^{T}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^{T} \right\}$

Baza kanoniczna

Znajdowanie ciągów generowanych przez uogólnione wektory własne do wielokrotnych wartości własnych macierzy kwadratowej A stopnia n:

- oznaczamy krotność wartości własnej λ przez m i znajdujemy najmniejszą całkowitą liczbę dodatnią p dla której rząd macierzy $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^p$ jest równy $n-m$,
- dla każdej wartości $1 \le k \le p$ znajdujemy liczbę uogólnionych wektorów własnych rzędu k określonych przez: $$N_k = \mathbf{rz}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-1} - \mathbf{rz}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k$$
- znajdujemy uogólniony wektor własny rzędu p i konstruujemy ciąg generowany przez ten wektor (każdy z tych wektorów należy do bazy kanonicznej).
- zmniejszamy wartość każdej z liczb N_k o 1 – jeśli wszystkie N_k są równe zero, wtedy procedura znajdowania wektorów bazy kanonicznej jest zakończona, w przeciwnym wypadku przechodzimy do następnego kroku.
- znajdujemy uogólniony wektor własny rzędu k, liniowo niezależny od wszystkich wcześniej znalezionych uogólnionych wektorów własnych, do wartości własnej λ, gdzie k jest największą wartością dla której N_k nie jest równe zero. Wektor ten dołączamy do bazy i wracamy do punktu poprzedniego.

Znajdowanie bazy kanonicznej

Przykład: Znajdź bazę kanoniczną dla macierzy $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ to λ=4 (o krotności 5) oraz pojedyncza wartość własna λ=7.

Dla wartości własnej λ=4 mamy: n = 6, m = 5 oraz n−m = 1

- szukamy najmniejszej liczby p takiej ze $\mathrm{rz}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^p$ = n−m

$$\mathbf{A}-4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{A}-4\mathbf{I})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rz}(\mathbf{A}-4\mathbf{I}) = 4$ $\quad$ $\mathrm{rz}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2 = 2$ $\quad$ $\mathrm{rz}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^3 = 1$

- dla każdej liczby $1 \le k \le p = 3$ znajdujemy liczbę uogólnionych wektorów własnych rzędu k:

$$N_3 = \mathrm{rz}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2 - \mathrm{rz}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^3 = 2-1=1$$
$$N_2 = \mathrm{rz}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^1 - \mathrm{rz}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2 = 4-2=2$$
$$N_1 = \mathrm{rz}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^0 - \mathrm{rz}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^1 = 6-4=2$$

Znajdowanie bazy kanonicznej

- znajdujemy uogólniony wektor rzędu p=3. Niech $\vec{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^3\,\vec{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; x_6 = 0\\ (\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2\,\vec{\mathbf{x}}_3 \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; x_3 \neq 0\end{aligned}\right\}\overset{\text{np}}{\Rightarrow}\; \vec{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Wektor $\vec{\mathbf{x}}_3$ generuje pozostałe wektory ciągu:

$$\vec{\mathbf{x}}_2 = (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \vec{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

- obniżamy wszystkie wartości N_k o 1 otrzymując: $N_3 = 0$, $N_2 = 1$ i $N_1 = 1$.
- znajdujemy uogólniony wektor własny rzędu 2. Niech $\vec{\mathbf{y}}_2 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2\,\vec{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; y_3 = y_6 = 0\\ (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\vec{\mathbf{y}}_2 \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; y_2 \neq 0 \text{ lub } y_5 \neq 0\end{aligned}\right\}\overset{\text{np}}{\Rightarrow}\; \vec{\mathbf{y}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Wektor $\vec{\mathbf{y}}_2$ generuje pozostałe wektory ciągu: $\vec{\mathbf{y}}_1 = (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\vec{\mathbf{y}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

- obniżamy wszystkie wartości N_k o 1 otrzymując: $N_3 = 0$, $N_2 = 0$ i $N_1 = 0$, a więc zostały znalezione już wszystkie wektory bazy kanonicznej do wartości własnej λ=4.

Ostatnim wektorem bazy kanonicznej jest wektor do wartości własnej λ=7. Jest to wektor własny, który możemy wybrać jako $\vec{\mathbf{z}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

Pełna baza kanoniczna dla macierzy A to zbiór wektorów $\{\vec{\mathbf{x}}_3, \vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{y}}_2, \vec{\mathbf{y}}_1, \vec{\mathbf{z}}_1\}$

Macierz modalna

Definicja: Macierzą modalną $\mathbf{M}$ dla macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy macierz tego samego stopnia co macierz $\mathbf{A}$, której kolumnami są wektory bazy kanonicznej macierzy $\mathbf{A}$.

Uwaga: Macierz modalna jest odwracalna (zbudowana z wektorów liniowo niezależnych).

Uwaga: Macierz modalna $\mathbf{M}$ nie jest jednoznaczna. Będziemy stosować konwencję, że:

- wszystkie ciągi o długości 1 poprzedzają dłuższe ciągi,
- wektory każdego z ciągów dłuższych niż 1 umieszczamy obok siebie, przy czym rząd wzrasta od lewej do prawej.

Przykład: Znajdź macierz modalną $\mathbf{M}$ dla macierzy $\mathbf{A}$ z poprzedniego przykładu.

Baza kanoniczna dla macierzy $\mathbf{A}$ składa się z jednego ciągu o długości 3:

$$\vec{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

z jednego ciągu o długości 2: $\vec{\mathbf{y}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{\mathbf{y}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

i z jednego ciągu o długości 1: $\vec{\mathbf{z}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$

Macierz modalna $\mathbf{M}$ ma wiec postać:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{z}}_1 & \vec{\mathbf{x}}_1 & \vec{\mathbf{x}}_2 & \vec{\mathbf{x}}_3 & \vec{\mathbf{y}}_1 & \vec{\mathbf{y}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Postać kanoniczna Jordana

Definicja: **Klatką Jordana** nazywamy macierz kwadratową której elementy diagonalne są takie same, elementy bezpośrednio nad diagonalą są równe 1, a wszystkie pozostałe elementy to 0:

$$\mathbf{J}(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definicja: Mówimy, że macierz jest w **postaci kanonicznej Jordana** jeśli jest macierzą diagonalną lub ma jedną z następujących postaci blokowych ($\mathbf{D}$ – macierz diagonalna):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_k \end{pmatrix}$$

Uwaga: Elementy diagonalne macierzy $\mathbf{D}$ mogą być różne.

Uwaga: Choć każda klatka Jordana musi mieć jednakowe elementy na diagonali, to różne klatki Jordana $\mathbf{J}_i$ (i = 1,..., k) mogą mieć różne elementy diagonalne.

Postać kanoniczna Jordana

Twierdzenie: Każda macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest podobna do jakiejś macierzy $\mathbf{J}$ będącej w postaci kanonicznej Jordana, a transformacja podobieństwa określona jest przez macierz modalną $\mathbf{M}$ dla macierzy $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$$

Dowód: (dla pojedynczego ciągu o długości r złożonego z wektorów $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, ..., \vec{\mathbf{x}}_r$)
Każdy z wektorów $\vec{\mathbf{x}}_i$ (i=1, 2, ..., r) jest uogólnionym wektorem własnym rzędu i macierzy $\mathbf{A}$ do tej samej wartości własnej λ.

$$\left.\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}_{r-1} &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_r - \lambda\vec{\mathbf{x}}_r \\
\vec{\mathbf{x}}_{r-2} &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_{r-1} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_{r-1} - \lambda\vec{\mathbf{x}}_{r-1} \\
\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\vec{\mathbf{x}}_2 &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_3 - \lambda\vec{\mathbf{x}}_3 \\
\vec{\mathbf{x}}_1 &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_2 - \lambda\vec{\mathbf{x}}_2
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\begin{aligned}
\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_2 &= \lambda\vec{\mathbf{x}}_2 + \vec{\mathbf{x}}_1 \\
\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_3 &= \lambda\vec{\mathbf{x}}_3 + \vec{\mathbf{x}}_2 \\
\cdots &= \cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_r &= \lambda\vec{\mathbf{x}}_r + \vec{\mathbf{x}}_{r-1}
\end{aligned}$$

Ponieważ $\vec{\mathbf{x}}_1$ jest wektorem własnym, więc dodatkowo mamy: $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_1 = \lambda\vec{\mathbf{x}}_1$
Korzystając z powyższych związków otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{AM} &= \mathbf{A}\left[\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{x}}_3, ..., \vec{\mathbf{x}}_r\right] = \left[\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_1, \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_2, \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_3, ..., \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_r\right] = \\
&= \left[\lambda\vec{\mathbf{x}}_1, \lambda\vec{\mathbf{x}}_2 + \vec{\mathbf{x}}_1, \lambda\vec{\mathbf{x}}_3 + \vec{\mathbf{x}}_2, ..., \lambda\vec{\mathbf{x}}_r + \vec{\mathbf{x}}_{r-1}\right] = \left[\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{x}}_3, ..., \vec{\mathbf{x}}_r\right]\mathbf{J} = \mathbf{MJ}
\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$$

Postać kanoniczna Jordana

<u>Przykład:</u> Znajdź macierz J w postaci kanonicznej Jordana, która jest podobna do macierzy $\mathbf{A}$ z poprzednich przykładów.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&2&1&0&0&0\\0&4&-1&0&0&0\\0&0&4&0&0&0\\0&0&0&4&2&0\\0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&7\end{pmatrix}\qquad \mathbf{M}=\begin{pmatrix}\vec{\mathbf{z}}_1 & \vec{\mathbf{x}}_1 & \vec{\mathbf{x}}_2 & \vec{\mathbf{x}}_3 & \vec{\mathbf{y}}_1 & \vec{\mathbf{y}}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Macierz w postaci kanonicznej Jordana znajdujemy stosując transformację podobieństwa:

$$\mathbf{J}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}=\begin{pmatrix}[7] & & \mathbf{0}\\ & \mathbf{J}_1 & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0&0&0&0&0\\0&4&1&0&0&0\\0&0&4&1&0&0\\0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&4&1\\0&0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

Uogólniony wektor $\vec{\mathbf{z}}_1$ odpowiadający wartości własnej 7 generuje macierz diagonalną [7]
Ciąg wektorów $\{\vec{\mathbf{x}}_1,\vec{\mathbf{x}}_2,\vec{\mathbf{x}}_3\}$ o długości 3 odpowiadający wartości własnej 4 generuje klatkę Jordana $\mathbf{J}_1$, natomiast ciąg wektorów $\{\vec{\mathbf{y}}_1,\vec{\mathbf{y}}_2\}$ odpowiadający tej samej wartości własnej 4 generuje klatkę Jordana $\mathbf{J}_2$.

Postać kanoniczna Jordana

Przykład: Znajdź postać kanoniczną Jordana dla macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

Macierz A ma dwie różne wartości własne:

$\lambda_1 = 2$ (krotność $m_1 = 4$) $\quad n-m_1 = 2$

$\lambda_2 = -1$ (krotność $m_2 = 2$) $\quad n-m_2 = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{rz}(A-2I) = 4 \\ \mathrm{rz}(A-2I)^2 = 3 \\ \mathrm{rz}(A-2I)^3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} N_3(2) = \mathrm{rz}(A-2I)^2 - \mathrm{rz}(A-2I)^3 = 3-2 = 1 & \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \\ N_2(2) = \mathrm{rz}(A-2I) - \mathrm{rz}(A-2I)^2 = 4-3 = 1 & \\ N_1(2) = \mathrm{rz}(A-2I)^0 - \mathrm{rz}(A-2I) = 6-4 = 2 & \{\vec{y}_1\} \end{array}$$

$$\mathrm{rz}(A+1I) = 4 \quad \Rightarrow \quad N_1(-1) = \mathrm{rz}(A+1I)^0 - \mathrm{rz}(A+1I) = 6-4 = 2 \qquad \{\vec{z}_1\} \quad \{\vec{t}_1\}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(2) & & & 0 \\ & J_2(2) & & \\ & & J_3(-1) & \\ 0 & & & J_4(-1) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c||cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Funkcje macierzy

W przypadku macierzy diagonalizowalnych określiliśmy funkcje macierzy przez:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{S}f(\mathbf{D})\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}\big(f(\lambda_1)\mathbf{I},\ldots,f(\lambda_k)\mathbf{I}\big)\mathbf{S}^{-1}$$

Do definicji funkcji macierzy dających się przedstawić w postaci kanonicznej Jordana można wykorzystać rozwinięcie funkcji w nieskończony szereg Taylor'a:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n f(z)}{dz^n}\bigg|_{z=\lambda}(z-\lambda)^n = f(\lambda) + f'(\lambda)(z-\lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(z-\lambda)^2 + \ldots$$

Dla pojedynczej klatki Jordana mamy:

$$f(\mathbf{J}) = f(\lambda)\mathbf{I} + f'(\lambda)(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{I}) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{I})^2 + \frac{f'''(\lambda)}{3!}(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{I})^3 + \ldots$$

Definiujemy macierz $\mathbf{N} = \mathbf{J}-\lambda\mathbf{I}$, dla której mamy:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},\quad \ldots,\quad \mathbf{N}^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Funkcje macierzy

A więc

$$f(\mathbf{J}) = f\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(\lambda)}{i!}\mathbf{N}^i = \begin{pmatrix} \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} & \cdots & \frac{f^{(k-4)}(\lambda)}{(k-4)!} & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} \end{pmatrix}$$

Dla dowolnej macierzy kwadratowej A mamy

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{M}f(\mathbf{J})\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}\,\mathbf{diag}\big(f(\mathbf{J}_1)\mathbf{I}, \ldots, f(\mathbf{J}_k)\mathbf{I}\big)\mathbf{M}^{-1}$$

gdzie $\mathbf{J}_i$ oznaczają różne klatki Jordana, natomiast $\mathbf{M}$ to macierz modalna sprowadzająca przez transformację podobieństwa macierz $\mathbf{A}$ do postaci kanonicznej Jordana.

<u>Uwaga:</u> Aby istniała funkcja $f(\mathbf{A})$ muszą istnieć wszystkie niezbędne pochodne

$$f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \ldots, f^{(k_i-1)}(\lambda_i)$$

Funkcje macierzy

<u>Przykład:</u> Znajdź e^A gdzie macierz A dana jest przez:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Najpierw obliczymy e^J:

$$e^J = \begin{pmatrix} e^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & e^4 & e^4/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 & e^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^4 & e^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$$

Teraz możemy już znaleźć e^A:

$$e^A = M e^J M^{-1} = e^4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$