Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 10

Macierze normalne

Twierdzenie: Macierz można zdiagonalizować za pomocą unitarnej transformacji podobieństwa wtedy i tylko wtedy gdy jest normalna ($AA^\dagger = A^\dagger A$).

D$^{(\Leftarrow)}$: Dowolną macierz kwadratową można zapisać w postaci $A = B + iC$ gdzie

$$B = \frac{1}{2}\left(A + A^\dagger\right) \quad \Rightarrow \quad B^\dagger = \frac{1}{2}\left(A + A^\dagger\right)^\dagger = \frac{1}{2}\left(A^\dagger + A\right) = B$$

$$C = \frac{1}{2i}\left(A - A^\dagger\right) \quad \Rightarrow \quad C^\dagger = -\frac{1}{2i}\left(A - A^\dagger\right)^\dagger = -\frac{1}{2i}\left(A^\dagger - A\right) = C$$

$$\left.\begin{array}{l} BC = \dfrac{1}{4i}\left(A^2 - AA^\dagger + A^\dagger A - A^{\dagger 2}\right) \\ CB = \dfrac{1}{4i}\left(A^2 - A^\dagger A + AA^\dagger - A^{\dagger 2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{jesli } AA^\dagger = A^\dagger A \text{ to } BC = CB$$

Ponieważ macierze B i C komutują , więc mogą być jednocześnie zdiagonalizowane, czyli $U^{-1}AU = U^{-1}BU + iU^{-1}CU$ musi też być macierzą diagonalną.

D$^{(\Rightarrow)}$: $U^{-1}AU = D \quad \Rightarrow \quad \left(U^{-1}AU\right)^\dagger = U^{-1}A^\dagger U = D^\dagger = D^*$

$$\left.\begin{array}{l} U^{-1}AA^\dagger U = \left(U^{-1}AU\right)\left(U^{-1}A^\dagger U\right) = DD^* \\ U^{-1}A^\dagger AU = \left(U^{-1}A^\dagger U\right)\left(U^{-1}AU\right) = D^*D \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AA^\dagger = A^\dagger A$$

Diagonalizacja macierzy - podsumowanie

Zarówno hermitowskie (rz. symetryczne) jak i unitarne (rz. ortogonalne) macierze można zdiagonalizować za pomocą unitarnej transformacji podobieństwa.

- wartości własne macierzy hermitowskiej są zawsze rzeczywiste (właśnie dlatego w mechanice kwantowej obserwable są zawsze stowarzyszone z wartościami własnymi operatorów hermitowskich)
- wektory własne macierzy hermitowskiej mogą być zespolone dlatego unitarna macierz diagonalizująca jest w ogólności zespolona.
- macierz rz. symetryczna jest macierzą hermitowską, a więc jej wartości własne są rzeczywiste. Ponieważ wartości własne i sama macierz są rzeczywiste, więc wektory własne można wybrać jako rzeczywiste, a w konsekwencji macierz diagonalizująca jest rzeczywistą macierzą ortogonalną.
- macierze unitarne i rz. ortogonalne można zdiagonalizować przy pomocy macierzy unitarnej. Ponieważ wartości własne i wektory własne są w ogólności zespolone, więc również macierz diagonalizująca jest macierzą unitarną a nie ortogonalną.

  (np. macierz obrotu jest rzeczywistą macierzą ortogonalną, jednak w ogólności może być zdiagonalizowana przez zespoloną macierz unitarną)

Uwaga: Nie wszystkie macierze kwadratowe można zdiagonalizować, ale wszystkie macierze kwadratowe można sprowadzić do postaci trójkątnej.

Ruch cząstki naładowanej

<u>Przykład:</u> Ruch cząstki naładowanej w stałym polu magnetycznym skierowanym wzdłuż osi z tzn. $\vec{\mathbf{B}} = B\vec{\mathbf{e}}_z$

Równanie ruchu ma postać:

ruch jednostajny

$$m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = q\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}} = q\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{e}}_x & \vec{\mathbf{e}}_y & \vec{\mathbf{e}}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B\end{vmatrix} \quad\Rightarrow\quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m}v_y \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m}v_x \qquad \frac{dv_z}{dt} = 0$$

Rozwiążemy układ dwóch pierwszych równań:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{qB}{m}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -i\omega\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\omega \equiv \frac{qB}{m}}$$

Diagonalizujemy macierz $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & i \\ -i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad\Rightarrow\qquad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1$$

Znajdujemy wektory własne i konstruujemy macierz diagonalizującą:

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \vec{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Ruch cząstki naładowanej

Zdiagonalizowana macierz ma postać:

$$\omega \equiv \frac{qB}{m}$$

$$U^{-1}AU = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Równania ruchu przyjmują postać

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} \equiv \frac{d}{dt}U^{-1}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -i\omega U^{-1}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}UU^{-1}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = -i\omega\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}$$

czyli $\frac{dv'_x}{dt} = i\omega v'_x$ $\qquad \frac{dv'_y}{dt} = -i\omega v'_y$

których rozwiązaniami są $v'_x = v'_{0x}\exp(i\omega t)$ $\qquad v'_y = v'_{0y}\exp(-i\omega t)$

$$\begin{pmatrix} v'_{0x} \\ v'_{0y} \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} iv_{0x} + v_{0y} \\ -iv_{0x} + v_{0y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -iv'_{0x}\exp(i\omega t) + iv'_{0y}\exp(-i\omega t) \\ v'_{0x}\exp(i\omega t) + v'_{0y}\exp(-i\omega t) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (v_{0x} - iv_{0y})\exp(i\omega t) + (v_{0x} + iv_{0y})\exp(-i\omega t) \\ (iv_{0x} + v_{0y})\exp(i\omega t) + (-iv_{0x} + v_{0y})\exp(-i\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x}\cos\omega t + v_{0y}\sin\omega t \\ -v_{0x}\sin\omega t + v_{0y}\cos\omega t \end{pmatrix}$$

Formy kwadratowe

Definicja: Rzeczywistą formą kwadratową w zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy jednorodny wielomian stopnia drugiego o rzeczywistych współczynnikach a_{ij} i rzeczywistych zmiennych $\vec{\mathrm{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ postaci

Math Player

$$f(\vec{\mathrm{x}}) = \vec{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} \mathrm{A} \vec{\mathrm{x}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j =$$

$$= a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{nn} x_n^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + \ldots + 2a_{n-1n} x_{n-1} x_n$$

Uwaga: Macierz współczynników A można zawsze uważać za symetryczną, ponieważ dla dowolnej macierzy C mamy:

$$c_{ij} = \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}) + \frac{1}{2}(c_{ij} - c_{ji}) \equiv a_{ij} + b_{ij} \quad \text{gdzie} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \text{oraz} \quad b_{ij} = -b_{ji}$$

ale
$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} (-b_{ji}) x_i x_j = -\sum_{i,j=1}^{n} b_{ji} x_j x_i = -\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j = 0$$

Przykład: Zapisz formę kwadratową $f(\vec{\mathrm{x}}) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 + x_1 x_2 + 3x_1 x_3 - 2x_2 x_3$ w postaci macierzowej.

$$f(\vec{\mathrm{x}}) = \vec{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} \mathrm{A} \vec{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -2 & -1 \\ 3/2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Diagonalizacja formy kwadratowej

Definicja: Postacią kanoniczną formy kwadratowej nazywamy postać w której występują jedynie wyrazy kwadratowe w poszczególnych zmiennych.

Twierdzenie: Niech $\mathbf{A}$ będzie symetryczną macierzą stopnia n o wartościach własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, oraz niech $\mathbf{Q}$ będzie macierzą ortogonalną diagonalizującą macierz $\mathbf{A}$ poprzez transformację podobieństwa $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}=\mathbf{D}$. Stosując zmianę zmiennych $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\vec{\mathbf{y}}$ przekształcamy formę kwadratową $f(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \vec{\mathbf{x}}$ do postaci kanonicznej

$$f(\vec{\mathbf{x}}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

Dowód: $f(\vec{\mathbf{x}}) \equiv \vec{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{Q}\vec{\mathbf{y}})^T \mathbf{AQ}\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}}^T\mathbf{D}\vec{\mathbf{y}} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$

Twierdzenie: Rząd formy kwadratowej (czyli rząd określającej ją macierzy) nie ulega zmianie przy transformacji za pomocą nieosobliwej macierzy $\mathbf{Q}$.

Definicja: Ogólną (zespoloną) formą kwadratową w zmiennych $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nazywamy jednorodny wielomian stopnia drugiego o zespolonych współczynnikach a_{ij} i zespolonych zmiennych $\vec{\mathbf{z}} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^\dagger$ postaci

$$f(\vec{\mathbf{z}}) = \vec{\mathbf{z}}^\dagger \mathbf{A}\vec{\mathbf{z}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i^* z_j$$

Krzywe stożkowe - przykład: elipsa

Przykład: Przekształcając formę kwadratową do postaci kanonicznej określ jaką krzywą stożkową przedstawia równanie $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 2\sqrt{5}x - 4\sqrt{6}y = 15$

Math Player

Część kwadratową powyższego równania można zapisać jako:

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 = 9x^2 - 2xy - 2xy + 6y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wartości własne macierzy współczynników:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 54 - 15\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 5 \;\; i \;\; \lambda_2 = 10$$

odpowiadające im wektory własne:

$$\lambda_1 = 5: \; \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 10: \; \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizujemy formę kwadratową:

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad U^T A U = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Krzywe stożkowe - przykład: elipsa

Diagonalizaja macierzy współczynników przy wyrazach kwadratowych, jest równoważna zmianie zmiennych:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{U}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x' - 2y'\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x' + y'\right) \end{cases}$$

A więc wyjściowe równanie może być przepisane w postaci:

$$\left(x' \quad y'\right)\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{U}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 2\sqrt{5}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x' - 2y'\right) - 4\sqrt{5}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x' + y'\right) = 15$$

lub po uproszczeniu

$$5x'^2 + 10y'^2 - 10x' = 15 \;\Leftrightarrow\; x'^2 + 2y'^2 - 2x' = 3 \;\Leftrightarrow\; \frac{\left(x' - 1\right)^2}{4} + \frac{y'^2}{2} = 1$$

Jest to równanie elipsy o środku w punkcie $\left(x' = 1, y' = 0\right)$ oraz osiach $2\sqrt{4}$ i $2\sqrt{2}$

Oś główna elipsy jest skierowana wzdłuż wektora $\vec{\mathrm{v}}_1$ a krótsza wzdłuż wektora $\vec{\mathrm{v}}_2$.

Oznacza to, że oś główna oryginalnej elipsy tworzy kąt θ z osią poziomą układu współ-rzędnych, który jest równy:

$$\vec{\mathrm{v}}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Funkcje macierzy

Każda macierz $\mathbf{A}$ może być pomnożona przez siebie dowolną liczbę razy:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{n \text{ razy}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^n\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{n+m}$$

Dobrze zdefiniowana jest również odwrotność macierzy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$

a więc również logiczne są definicje:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{1-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}^{-n} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^n$$

Wykorzystując te definicje możemy zdefiniować funkcje wielomianowe macierzy poprzez dokładną analogię z funkcjami zmiennej skalarnej.

Przykład: $f(x) = x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$ $\qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 5\mathbf{A} + 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 + 5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}+4\mathbf{I}) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}$$

Przykład:

$$f(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}^2 - \mathbf{I}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^2 - \mathbf{I}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Funkcje macierzy

Dysponując macierzą kwadratową $\mathbf{A}$, zastanówmy się jak należy zdefiniować funkcje macierzy np. $e^{\mathbf{A}}$, $\sin\mathbf{A}$, $\ln\mathbf{A}$, …

Czy ma sens definicja: $$\sin\mathbf{A} = \sin\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \sin a_{11} & \sin a_{12} \\ \sin a_{21} & \sin a_{22} \end{pmatrix}$$

Nie ma, ponieważ oczekujemy, że funkcje macierzy powinny spełniać podobne związki jak funkcje zmiennych skalarnych, czyli np. $\sin^2\mathbf{A}+\cos^2\mathbf{A} = \mathbf{I}$ dla wszystkich macierzy $\mathbf{A}$.

Do definicji funkcji macierzy można wykorzystać rozwinięcie funkcji w nieskończony szereg Maclaurin'a: $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Jeśli taki szereg jest zbieżny dla $|z| < R$ to również szereg macierzowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{A}^n$ jest zbieżny jeśli wszystkie wartości własne $\mathbf{A}$ spełniają warunek $|\lambda_i| < R$.

Definicja (funkcji macierzy): $$f(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{A}^n$$

Przykład:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \quad \Rightarrow \quad e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \ldots$$

Funkcje macierzy

Jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą diagonalizowalną wówczas mamy

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1} = \mathbf{S}\,\mathbf{diag}\left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right)\mathbf{S}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^k = \left(\mathbf{SDS}^{-1}\right)^k = \underbrace{\mathbf{SDS}^{-1}\mathbf{SDS}^{-1} \dots\dots \mathbf{SDS}^{-1}}_{k \text{ razy}} = \mathbf{SD}^k\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\,\mathbf{diag}\left(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k\right)\mathbf{S}^{-1}$$

Przykład: $$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{SD}^k\mathbf{S}^{-1}}{k!} = \mathbf{S}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{D}^k}{k!}\right)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\,\mathbf{diag}\left(\mathbf{e}^{\lambda_1}, ..., \mathbf{e}^{\lambda_n}\right)\mathbf{S}^{-1}$$

Niech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 6 \; i \; \lambda_2 = -4$

Znajdujemy wektory własne i konstruujemy macierz diagonalizującą

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a więc

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{e}^6 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{-4} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}^6 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{e}^6 + \mathbf{e}^{-4} & \mathbf{e}^6 - \mathbf{e}^{-4} \\ \mathbf{e}^6 - \mathbf{e}^{-4} & \mathbf{e}^6 + \mathbf{e}^{-4} \end{pmatrix}$$

Funkcje macierzy

Ideę tę można uogólnić na dowolną funkcję f(z) określona na wartościach własnych λ_i diagonalizowalnej macierzy $\mathbf{A=SDS^{-1}}$ wprowadzając definicję

$$f(\mathbf{D}) = \mathbf{diag}\left(f(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_n)\right)$$

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{S}f(\mathbf{D})\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\,\mathbf{diag}\left(f(\lambda_1),\ldots,f(\lambda_n)\right)\mathbf{S}^{-1}$$

Math Player

Przykład: Rozwiąż równanie macierzowe $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Najpierw zdiagonalizujemy macierz znajdującą się po prawej stronie równania:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \;\; i \;\; \lambda_2 = 9$$

Znajdujemy wektory własne i konstruujemy macierz diagonalizującą

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Po zdiagonalizowaniu macierzy prawa strona równania staje się równa

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Funkcje macierzy

Lewa strona równania musi być również diagonalna, a więc:

$$\mathbf{S}^{-1}\left(\mathbf{A}^2-4\mathbf{A}+4\mathbf{I}\right)\mathbf{S}=\mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix}\mathbf{S}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

Załóżmy, że $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}=\begin{pmatrix}x_1 & 0\\ 0 & x_2\end{pmatrix}$ wtedy równanie przyjmuje postać

$$\mathbf{S}^{-1}\left(\mathbf{A}^2-4\mathbf{A}+4\mathbf{I}\right)\mathbf{S}=\begin{pmatrix}x_1^2-4x_1+4 & 0\\ 0 & x_2^2-4x_2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

która jest równoważna układowi równań:

$$\begin{cases}x_1^2-4x_1+4=1 & \Rightarrow \quad x_1=1,3\\ x_2^2-4x_2+4=9 & \Rightarrow \quad x_2=5,-1\end{cases}$$

Możliwe są następujące kombinacje:

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix},\quad \Lambda_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \Lambda_3=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix},\quad \Lambda_4=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

W konsekwencji wyjściowe równanie ma więc cztery rozwiązania:

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{S}\Lambda_1\mathbf{S}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -5 & -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_3=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}15 & 3\\ 5 & 17\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -3\\ -5 & 1\end{pmatrix}$$

Macierz nilpotentna

<u>Przykład:</u> Dana jest macierz A. Znajdź $e^{\mathbf{A}}$.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&2&1&1\\0&0&3&-2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&6&-3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}^n=0 \text{ dla } n>3$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}}=\mathbf{I}+\mathbf{A}+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3+\ldots=\begin{pmatrix}1&2&4&1/2\\0&1&3&-1/2\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

<u>Definicja:</u> Macierz kwadratową A stopnia n nazywamy nilpotentną, jeżeli istnieje taka liczba naturalna m > 1, że $\mathbf{A}^m$ = 0 (0 jest tutaj macierzą zerową).

<u>Przykład:</u> Przykładem macierzy nilpotentnej jest macierz ściśle trójkątna, tzn. mająca zera na diagonali i poniżej:

$$\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\0&0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1,n}\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

<u>Twierdzenie:</u> Dla macierzy nilpotentnej A zachodzi:

det A = 0 oraz Tr A = 0.

Dowód: $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}=\lambda\vec{\mathbf{x}}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}^m\vec{\mathbf{x}}=\lambda^m\vec{\mathbf{x}}$

Ponieważ $\mathbf{A}^m$ = 0 oraz $\vec{\mathbf{x}}\neq\mathbf{0}$ więc $\lambda^n=\mathbf{0}\quad\Rightarrow\quad\lambda=\mathbf{0}$

A więc $\mathbf{Tr\,A}=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=\mathbf{0}$ $\qquad\mathbf{det\,A}=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=\mathbf{0}$