Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 10

Przestrzeń wektorowa z iloczynem skalarnym

Definicja: Przestrzeń wektorową $\mathcal{V}$ w której określony jest iloczyn skalarny pomiędzy wektorami nazywamy przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym.

Definicja: Niech $\vec{\mathbf{u}}$ oraz $\vec{\mathbf{v}}$ będą wektorami w przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym $\mathcal{V}$, przy czym $\vec{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$. Projekcją (rzutem) ortogonalną wektora $\vec{\mathbf{u}}$ na wektor $\vec{\mathbf{v}}$ nazywamy:

$$\mathbf{proj}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} = \frac{\langle \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle}{\langle \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle}\vec{\mathbf{v}}$$

Definicja: Zbiór wektorów S w przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ z iloczynem skalarnym nazywamy ortogonalnym jeśli dowolne dwa wektory w tym zbiorze są wzajemnie ortogonalne. Jeśli dodatkowo wektory w S są jednostkowe, to zbiór S nazywamy ortonormalnym.

Uwaga: Jeśli zbiór S tworzy bazę w $\mathcal{V}$ to taką bazę nazywamy odpowiednio bazą ortogonalną lub ortonormalną.

Uwaga: Aby z bazy która nie jest ortogonalna, utworzyć bazę ortonormalną należy do wektorów tej bazy zastosować metodę ortonormalizacji Grama-Schmidta.

Twierdzenie: Zbiór $S = \{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n\}$ niezerowych wektorów ortogonalnych jest liniowo niezależny.

D: $\mathbf{0} = \langle c_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \ldots + c_n \vec{\mathbf{v}}_n, \vec{\mathbf{v}}_i \rangle = c_1 \langle \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_i \rangle + \ldots + c_i \langle \vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i \rangle + \ldots + c_n \langle \vec{\mathbf{v}}_n, \vec{\mathbf{v}}_i \rangle \Rightarrow c_i = \mathbf{0}$

Podprzestrzenie ortogonalne

Definicja: Podprzestrzenie $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nazywamy ortogonalnymi jeśli dla wszystkich wektorów $\vec{\mathbf{v}}_1 \in \mathcal{S}_1$ i $\vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathcal{S}_2$ zachodzi $\langle \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \rangle = 0$.

Przykład: $\mathcal{S}_1 = span\left((1,0,1)^T,(1,1,0)^T\right)$ $\quad \mathcal{S}_2 = span\left((-1,1,1)^T\right)$

Definicja: Jeśli $\mathcal{S}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{V}$, to ortogonalnym dopełnieniem przestrzeni $\mathcal{S}$ nazywamy podprzestrzeń:

$$\mathbf{S}^{\perp} = \left\{\vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} : \langle \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} \rangle = 0, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{S}\right\}$$

Przykład: Znajdź dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni $\mathcal{S}$ przestrzeni $\mathcal{R}^4$ napiętej przez kolumny macierzy $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^T\vec{\mathbf{u}} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{S}^{\perp} = span\left\{\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

A więc $\mathcal{S}^{\perp} = \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^T\right)$

Definicja: Niech $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ będą podprzestrzeniami $\mathcal{V}$. Jeśli dowolny wektor $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ można jednoznacznie zapisać jako sumę wektorów $\vec{\mathbf{s}}_1 \in \mathcal{S}_1$ i $\vec{\mathbf{s}}_2 \in \mathcal{S}_2$ wtedy mówimy, że $\mathcal{V}$ jest sumą prostą podprzestrzeni $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ co zapisujemy jako $\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$.

Przykład: Przestrzenie $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ oraz $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}^{\perp}$ z powyższych przykładów.

Rzut wektora na podprzestrzeń

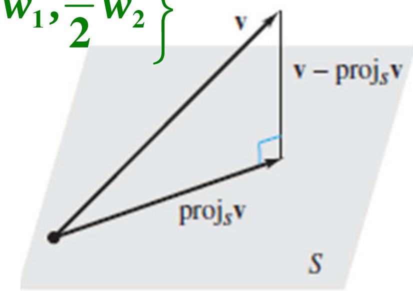
Definicja: Niech $\{\vec{\mathbf{u}}_1,\vec{\mathbf{u}}_2,\ldots,\vec{\mathbf{u}}_t\}$ będzie ortonormalną bazą w podprzestrzeni $\mathcal{S}$ przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$. Projekcją (rzutem) wektora $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ na podprzestrzeń $\mathcal{S}$ nazywamy:

$$\mathbf{proj}_{\mathcal{S}}\,\vec{\mathbf{v}} = \langle \vec{\mathbf{u}}_1,\vec{\mathbf{v}}\rangle \vec{\mathbf{u}}_1 + \langle \vec{\mathbf{u}}_2,\vec{\mathbf{v}}\rangle \vec{\mathbf{u}}_2 + \ldots + \langle \vec{\mathbf{u}}_t,\vec{\mathbf{v}}\rangle \vec{\mathbf{u}}_t$$

Przykład: Znajdź rzut wektora $\vec{\mathbf{v}} = (1,1,3)^{\mathrm{T}}$ na podprzestrzeń $\mathcal{S}$ przestrzeni $\mathcal{R}^3$ napiętą przez wektory $\vec{\mathbf{w}}_1 = (0,3,1)^{\mathrm{T}}$ oraz $\vec{\mathbf{w}}_2 = (2,0,0)^{\mathrm{T}}$.

Znajdujemy ortonormalną bazę w podprzestrzeni $\mathcal{S}$: $\{\vec{\mathbf{u}}_1,\vec{\mathbf{u}}_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{w}_1, \frac{1}{2}\vec{w}_2\right\}$

$$\mathbf{proj}_{\mathcal{S}}\,\vec{\mathbf{v}} = \langle \vec{\mathbf{u}}_1,\vec{\mathbf{v}}\rangle \vec{\mathbf{u}}_1 + \langle \vec{\mathbf{u}}_2,\vec{\mathbf{v}}\rangle \vec{\mathbf{u}}_2 = \frac{6}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}0\\ 3/\sqrt{10}\\ 1/\sqrt{10}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\9\\3\end{pmatrix}$$



Twierdzenie: Niech będzie dana macierz $\mathbf{A}$ o wymiarach $m \times n$, wówczas:

- $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ oraz $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ są ortogonalnymi podprzestrzeniami $\mathcal{R}^m$

D: $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}); \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \;\Rightarrow\; \exists \vec{\mathbf{x}} : \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}; \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \langle \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}\rangle = \vec{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{u}})^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$

- $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ oraz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ są ortogonalnymi podprzestrzeniami $\mathcal{R}^n$
- $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathcal{R}^m$ D: $\mathcal{R}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \;\Rightarrow\; \mathcal{R}^m = \mathcal{R}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{R}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$
- $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}^n$

Odwzorowanie liniowe

Definicja: Niech $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem Q = $\mathcal{R}$ lub $\mathcal{C}$.

Funkcję $T:\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ nazywamy odwzorowaniem (transformacją) liniowym przestrzeni $\mathcal{V}$ w $\mathcal{W}$, jeśli dla dowolnych $\vec{u},\vec{v}\in\mathcal{V}$ oraz dowolnej stałej $c\in$ Q spełnione są warunki:

$$T(\vec{u}+\vec{v})=T(\vec{u})+T(\vec{v}) \qquad T(c\,\vec{v})=c\,T(\vec{v})$$

Uwaga: Definiujemy transformacje zerową i identycznościową jako: $O(\vec{v})\equiv\vec{0}$ i $I(\vec{v})\equiv\vec{v}$

Przykład: Czy funkcja $T(v_1,v_2)=(v_1-v_2,v_1+2v_2)$ jest transformacją liniową $\mathcal{R}^2\rightarrow\mathcal{R}^2$.

$$T(\vec{u}+\vec{v})=T(u_1+v_1,u_2+v_2)=\left((u_1+v_1)-(u_2+v_2),(u_1+v_1)+2(u_2+v_2)\right)=$$

$$=\left((u_1-u_2)+(v_1-v_2),(u_1+2u_2)+(v_1+2v_2)\right)=$$

$$=\left((u_1-u_2),(u_1+2u_2)\right)+\left((v_1-v_2),(v_1+2v_2)\right)=T(\vec{u})+T(\vec{v})$$

$$T(c\vec{u})=T(cu_1,cu_2)=(cu_1-cu_2,cu_1+2cu_2)=c(u_1-u_2,u_1+2u_2)=cT(\vec{u})$$

Przykład: Czy podane funkcje są transformacjami liniowymi $\mathcal{R}\rightarrow\mathcal{R}$.

- $f(x)=\sin(x)$ $\qquad \sin(x_1+x_2)\neq\sin(x_1)+\sin(x_2)$
- $f(x)=x^2$ $\qquad (x_1+x_2)^2\neq x_1^2+x_2^2$
- $f(x)=x+1$ $\qquad x_1+x_2+1\neq x_1+1+x_2+1$

Odwzorowanie liniowe

<u>Własności odwzorowań liniowych:</u>

- $T(\vec{\mathbf{0}}) = \vec{\mathbf{0}}$ D: $T(\vec{\mathbf{0}}) = T(0\,\vec{\mathbf{v}}) = 0T(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}}$
- $T(-\vec{\mathbf{v}}) = -T(\vec{\mathbf{v}})$ D: $T(-\vec{\mathbf{v}}) = T(-1\,\vec{\mathbf{v}}) = (-1)\,T(\vec{\mathbf{v}}) = -T(\vec{\mathbf{v}})$
- $T(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}) = T(\vec{\mathbf{u}}) - T(\vec{\mathbf{v}})$
- $\vec{\mathbf{v}} = c_1\,\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2\,\vec{\mathbf{v}}_2 + \ldots + c_n\,\vec{\mathbf{v}}_n \quad \Rightarrow \quad T(\vec{\mathbf{v}}) = c_1 T(\vec{\mathbf{v}}_1) + c_2 T(\vec{\mathbf{v}}_2) + \ldots + c_n T(\vec{\mathbf{v}}_n)$

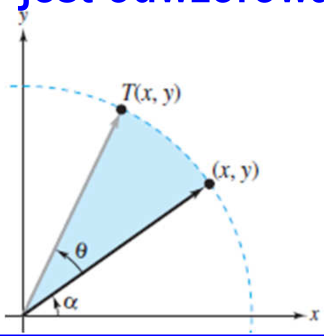
<u>Definicja:</u> Jądrem odwzorowania liniowego nazywamy przeciwobraz wektora zerowego z przestrzeni $\mathcal{W}$: $\mathrm{Ker}\,T = \left\{\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} : T(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}}_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}\right\}$

<u>Definicja:</u> W przypadku gdy $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, odwzorowanie liniowe nazywamy operatorem liniowym w $\mathcal{V}$.

<u>Twierdzenie:</u> Niech będzie dana macierz rzeczywista $\mathbf{A}$ o wymiarach $m \;\; n$.
Odwzorowanie $T(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{A}\,\vec{\mathbf{v}}$ jest odwzorowaniem liniowym.

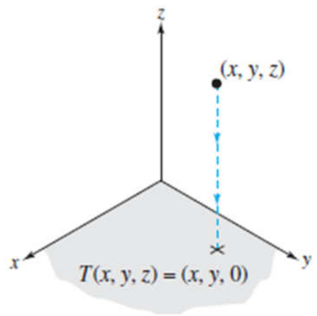
<u>Przykład:</u> Obrót w $\mathcal{R}^2$:

$$Q(\vec{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$



Rzut na płaszczyznę xy:

$$P(\vec{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$



Reprezentacja macierzowa

Wprowadźmy bazy, $\mathcal{B}=\{\vec{\mathbf{e}}_1,\vec{\mathbf{e}}_2,...,\vec{\mathbf{e}}_n\}$ w $\mathcal{V}$ oraz $\mathcal{B}'=\{\vec{\mathbf{f}}_1,\vec{\mathbf{f}}_2,...,\vec{\mathbf{f}}_m\}$ w $\mathcal{W}$. Wówczas odwzorowanie liniowe T działając na wektory bazy $\mathcal{B}$ produkuje liniową kombinację wektorów bazy $\mathcal{B}'$:

$$T(\vec{\mathbf{e}}_j)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\vec{\mathbf{f}}_i=\alpha_{1j}\vec{\mathbf{f}}_1+\alpha_{2j}\vec{\mathbf{f}}_2+...+\alpha_{1m}\vec{\mathbf{f}}_m$$

Liczba α_{ij} jest i-tą składową wektora $T(\vec{\mathbf{e}}_j)$ w bazie $\mathcal{B}'$ i oznaczamy $\left[T(\vec{\mathbf{e}}_j)\right]_{\mathcal{B}'}$.

Tablicę liczb $[\alpha_{ij}]$ czyli macierz $\mathbf{A}$ o $dim\mathcal{W}$ wierszach i $dim\mathcal{V}$ kolumnach nazywamy reprezentacją macierzową odwzorowania T w bazach $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, i oznaczamy $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\left(\left[T(\vec{\mathbf{e}}_1)\right]_{\mathcal{B}'}\middle|\left[T(\vec{\mathbf{e}}_2)\right]_{\mathcal{B}'}\middle|\cdots\middle|\left[T(\vec{\mathbf{e}}_n)\right]_{\mathcal{B}'}\right)$$

W przypadku operatorów liniowych w przestrzeni $\mathcal{V}$ mamy: $T(\vec{\mathbf{e}}_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\vec{\mathbf{e}}_i$

Zapiszemy relację $\vec{\mathbf{y}}=T(\vec{\mathbf{x}})$ za pomocą współrzędnych w bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_1,\vec{\mathbf{e}}_2,...,\vec{\mathbf{e}}_n\}$:

$$\vec{\mathbf{y}}=\sum_{i=1}^{n}y_i\vec{\mathbf{e}}_i=T\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\vec{\mathbf{e}}_j\right)=\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\vec{\mathbf{e}}_i \quad\Rightarrow\quad y_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j$$

W innej bazie $\{\vec{\mathbf{e}}_i'\}$ w której współrzędne wektorów $\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}$ oraz $\mathbf{A}$ są x_i', y_i' oraz α_{ij}' ta sama relacja geometryczna $\vec{\mathbf{y}}=T(\vec{\mathbf{x}})$ ma postać:

$$y_i'=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}'x_j'$$

Reprezentacja macierzowa

Przykład: Znajdź reprezentację macierzową operatora rzutowania $P(x,y,z)=(x,y,0)$ w bazach:

$$\mathcal{B}=\left\{\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{e}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\vec{e}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad \mathcal{B}'=\left\{\vec{f}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{f}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\vec{f}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
P(\vec{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=-1\,\vec{v}_1+0\,\vec{v}_2+0\,\vec{v}_3 \quad\Rightarrow\quad [P(\vec{e}_1)]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\\
P(\vec{e}_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=-1\,\vec{v}_1+1\,\vec{v}_2+0\,\vec{v}_3 \quad\Rightarrow\quad [P(\vec{e}_2)]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\
P(\vec{e}_3)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=-1\,\vec{v}_1+1\,\vec{v}_2+0\,\vec{v}_3 \quad\Rightarrow\quad [P(\vec{e}_3)]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}
\end{array}\right\}\Rightarrow [P]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Przykład: Znajdź reprezentację macierzową tego samego operatora we wspólnej bazie

$$\mathcal{B}=\left\{\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{e}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\vec{e}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\} \qquad \Rightarrow\quad [P]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&3\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$$

Ważne klasy macierzy kwadratowych

- macierz symetryczna: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
- macierz antysymetryczna: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

$$\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det(-\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = (-1)^n \det \mathbf{A}$$

a więc dla *n* nieparzystych $\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 0$

- macierz ortogonalna: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$\det\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right) = \det \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \det \mathbf{A} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\det \mathbf{A})^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = \pm 1$$

- macierz hermitowska: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\dagger}$

$$\det \mathbf{A}^{\dagger} = \det \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \det\left(\mathbf{A}^{*\mathrm{T}}\right) = \det \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad (\det \mathbf{A})^* = \det \mathbf{A} \in \mathcal{R}$$

- macierz antyhermitowska: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\dagger}$
- macierz normalna to dla której zachodzi: $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\dagger}$
- macierz unitarna: $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$\det\left(\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\right) = \det \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A}^{*\mathrm{T}} \det \mathbf{A} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\det \mathbf{A})^* \det \mathbf{A} = 1$$

$$\Rightarrow \quad |\det \mathbf{A}|^2 = 1$$

- macierz unimodularna: $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ **oraz** $\det \mathbf{A} = 1$

Zmiana bazy i transformacje podobieństwa

Macierz przejścia pomiędzy dwoma bazami $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ i $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$ zdefiniowaliśmy przez:

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\vec{\mathbf{e}}_j \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}'$$

Natomiast transformacje współrzędnych dowolnego wektora przy zmianie bazy mają wówczas postać:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x'_i c_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\vec{\mathbf{x}}'$$

Znajdziemy teraz prawa transformacyjne dla macierzy reprezentujących operatory liniowe przy zmianie bazy. Równanie operatorowe $\vec{\mathbf{y}} = T(\vec{\mathbf{x}})$ można zapisać jako równanie macierzowe w każdej z baz $\vec{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$ oraz $\vec{\mathbf{y}}' = \mathbf{A}'\vec{\mathbf{x}}'$

Korzystając ze związków określających transformacje współrzędnych wektorów mamy:

$$\mathbf{C}\vec{\mathbf{y}}' = \mathbf{A}\mathbf{C}\vec{\mathbf{x}}' \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{y}}' = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\vec{\mathbf{x}}'$$

Relację pomiędzy macierzami $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ określoną przez $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ nazywamy **transformacją podobieństwa**. O macierzach $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ mówimy, że są **podobne**.

Uwaga: Macierze podobne reprezentują ten sam operator liniowy T w różnych bazach. dlatego wszystkie własności operatora niezależne od bazy posiadają też macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$.

Własności macierzy podobnych

Ogólne własności transformacji podobieństwa $\mathbf{A}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$

- $\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{I}$ D: $\mathbf{A}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{I}$
- $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}'$

  D: $\det \mathbf{A}' = \det\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\right) = \det \mathbf{S}^{-1} \det \mathbf{A} \det \mathbf{S} = \det \mathbf{A} \det\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\right) = \det \mathbf{A}$
- $\mathrm{Tr}\, \mathbf{A} = \mathrm{Tr}\, \mathbf{A}'$

  D: $\mathrm{Tr}\, \mathbf{A}' = \sum_i A'_{ii} = \sum_{i,j,k} \left(\mathbf{S}^{-1}\right)_{ij} A_{jk} S_{ki} = \sum_{i,j,k} S_{ki} \left(\mathbf{S}^{-1}\right)_{ij} A_{jk} = \sum_{j,k} \delta_{kj} A_{jk} = \sum_j A_{jj} = \mathrm{Tr}\, \mathbf{A}$

W przypadku gdy S jest macierzą unitarną, tzn. $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{\dagger}$ wtedy: $\mathbf{A}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S}$

Transformacje unitarne przekształcają bazy ortonormalne w bazy ortonormalne:

$$\left\langle \vec{\mathbf{e}}'_i \middle| \vec{\mathbf{e}}'_j \right\rangle = \left\langle \sum_k \mathbf{S}_{ki} \vec{\mathbf{e}}_k \middle| \sum_r \mathbf{S}_{rj} \vec{\mathbf{e}}_r \right\rangle = \sum_k \mathbf{S}^*_{ki} \sum_r \mathbf{S}_{rj} \left\langle \vec{\mathbf{e}}_k \middle| \vec{\mathbf{e}}_r \right\rangle = \sum_k \mathbf{S}^*_{ki} \sum_r \mathbf{S}_{rj} \delta_{kr} = \sum_k \mathbf{S}^*_{ki} \mathbf{S}_{kj} = \left(\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{S}\right)_{ij} = \delta_{ij}$$

Dla transformacji unitarnych mamy:

- $\mathbf{A}^{\dagger} = \pm\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A}')^{\dagger} = \left(\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S}\right)^{\dagger} = \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S} = \pm\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S} = \pm\mathbf{A}'$
- $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}^{-1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A}')^{\dagger}\mathbf{A}' = \left(\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S}\right)^{\dagger}\left(\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S}\right) = \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{S}\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}\mathbf{S} =$

  $= \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{I}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{S} = \mathbf{I}$

Problem własny

Problemem własnym dla macierzy kwadratowej $\mathbf{A}_{n\times n}$ nazywamy znalezienie wielkości skalarnych λ (wartości własnych) oraz niezerowych wektorów $\vec{\mathbf{x}}$ (wektorów własnych) spełniających jednocześnie równanie własne: $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \lambda\vec{\mathbf{x}} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$

Powyższy układ ma nietrywialne rozwiązania tylko wtedy gdy $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

Równanie to nazywamy równaniem charakterystycznym. Sam wyznacznik po rozwinięciu jest wielomianem (w. charakterystyczny) $w(\lambda)$ stopnia n z wyrazem wiodącym $(-1)^n\lambda^n$

Dowód: Z definicji wyznacznika mamy:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \left(a_{1i_1} - \delta_{1i_1}\lambda\right)\left(a_{2i_2} - \delta_{2i_2}\lambda\right)\dots\left(a_{ni_n} - \delta_{ni_n}\lambda\right)$$

Najwyższą potęgę λ otrzymujemy z wyrazu:

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) = (-1)^n\lambda^n + O\left(\lambda^{n-1}\right)$$

Twierdzenie: Macierz jest osobliwa wtedy i tylko wtedy gdy ma zerową wartość własną.

$$\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\mathbf{A} = 0$$

Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy spektrum i oznaczamy $\sigma(\mathbf{A})$.

Wartości własne i wektory własne

<u>Twierdzenie:</u> **Dowolna kombinacja liniowa wektorów własnych macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadających tej samej wartości własnej λ jest także wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadającym tej wartości własnej λ.**

D : Niech $\vec{\mathbf{x}} = c_1\,\vec{\mathbf{x}}_1 + c_2\,\vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n\,\vec{\mathbf{x}}_n$ oraz $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_i = \lambda\,\vec{\mathbf{x}}_i$

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\left(c_1\,\vec{\mathbf{x}}_1 + c_2\,\vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n\,\vec{\mathbf{x}}_n\right) = c_1\,\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}}_1 + c_2\,\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n\,\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}}_n =$$

$$= c_1\lambda\,\vec{\mathbf{x}}_1 + c_2\lambda\,\vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n\lambda\,\vec{\mathbf{x}}_n = \lambda\left(c_1\,\vec{\mathbf{x}}_1 + c_2\,\vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n\,\vec{\mathbf{x}}_n\right) = \lambda\,\vec{\mathbf{x}}$$

W szczególności dowolny wektor własny pomnożony przez stałą różną od zera jest również wektorem własnym odpowiadającym tej samej wartości własnej.

<u>Przykład:</u> Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left(1-\lambda\right)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

a więc mamy dwie wartości własne: $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 3$

wektory własne: $\lambda_1 = -1: \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}}_1 = x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = 3: \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}}_2 = x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Math Player

Wartości własne i wektory własne

Przykład: Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

a więc mamy dwie wartości własne: $\lambda_1 = 1 + i$ i $\lambda_2 = 1 - i$

Wektory własne:

$$\lambda_1 = 1 + i : \quad \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (2-i)\,x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 - (2+i)\,x_2 = 0 \end{cases}$$

Z każdego z równań otrzymujemy $x_1 = (2+i)\,x_2$

A więc wektorem własnym do wartości własnej λ_1 jest $\vec{\mathrm{v}}_1 = x_2 \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$

Podobnie znajdujemy, że wektorem własnym do wartości własnej λ_2 jest:

$$\vec{\mathrm{v}}_2 = x_2 \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Twierdzenie: Jeśli macierz $\mathbf{A}$ jest rzeczywista wtedy zespolone wartości własne występują zawsze w parach wzajemnie sprzężonych, tzn. jeśli $\lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma(\mathbf{A})$

Wartości własne i wektory własne

Przykład: Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 = (\lambda - 5)(\lambda + 3)^2 = 0$$

a więc mamy trzy wartości własne (w tym jedną podwójną):

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -3$$

Wektory własne:

$$\lambda_1 = 5: \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

A więc wektorem własnym do wartości własnej λ_1 jest $\vec{v}_1 = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{2,3} = -3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

co oznacza, że: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

Wartości własne i wektory własne

Możemy wyrazić x_1 poprzez x_2 i x_3, przy czym x_2 i x_3 mogą przyjmować dowolne wartości. Niech x_2=c_2 i x_3=c_3, wówczas możemy napisać:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 + 3c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ponieważ c_2 i c_3 są dowolne, możemy najpierw ustalić c_3 = 0 i znaleźć jeden wektor własny, a następnie c_2 = 0 i znaleźć drugi wektor własny. W rezultacie znajdujemy dwa różne wektory własne do zdegenerowanej wartości własnej $\lambda = -3$:

$$\vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

W tym przykładzie mamy tylko dwie różne wartości własne ale wciąż trzy różne wektory własne.

Uwaga: Jeśli istnieje n różnych wartości własnych, to zawsze będziemy mieli n różnych wektorów własnych. Powtarzające się wartości własne nazywamy zdegenerowanymi. Zdegenerowanej wartości własnej może odpowiadać tylko jeden albo więcej różnych wektorów własnych.

Wartości własne i wektory własne

<u>Przykład:</u> Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

a więc mamy trzy wartości własne (w tym jedną podwójną): $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2$

Wektory własne:

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

A więc wektorem własnym do wartości własnej λ_1 jest $\vec{v}_1 = c_3 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{2,3} = 2: \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Math Player

Rozwiązanie układu zależy od jednego parametru c_3: $\vec{v}_2 = c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

A więc mamy tylko dwa różne wektory własne.