Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 11

Własności wartości własnych

Niech $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ będą wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$. Prawdziwe są twierdzenia:

- $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n$

  D: $\mathrm{w}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n)$

  Wybierając $\lambda=0$ dostajemy tezę.

- $\mathrm{Tr}\, \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$

  D: Można udowodnić indukcyjnie następującą tożsamość:

  $$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n \left[\lambda^n - (\mathrm{Tr}\, \mathbf{A})\lambda^{n-1} + \mathcal{O}(\lambda^{n-2})\right]$$

  Natomiast rozwinięcie wyznacznika daje:

  $$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) =$$

  $$= (-1)^n \left(\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \mathcal{O}(\lambda^{n-2})\right)$$

  Porównując współczynniki przy λ^{n-1} otrzymujemy tezę.

- wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ są takie same:

  D: $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det\left((\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} - \lambda \mathbf{I}^{\mathrm{T}}\right) = \det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda \mathbf{I})^{\mathrm{T}} = \det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \lambda \mathbf{I})$

- wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}^{\dagger}$, są sprzężone wartości własne macierzy $\mathbf{A}$

D: $0 = \det(\mathbf{A}^{\dagger} - \lambda \mathbf{I}) = \det\left(\mathbf{A} - \lambda^* \mathbf{I}\right)^{*\mathrm{T}} = \left[\det\left(\mathbf{A} - \lambda^* \mathbf{I}\right)\right]^* \quad \Rightarrow \quad \det\left(\mathbf{A} - \lambda^* \mathbf{I}\right) = 0$

Własności wartości własnych

- jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$, to wartościami własnymi $\mathbf{A}^m$ są $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_n^m$

D: $\mathbf{A}^m \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{m-1}\lambda\vec{\mathbf{x}} = \lambda\mathbf{A}^{m-2}\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \ldots = \lambda^m \vec{\mathbf{x}}$

- jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$, to wartościami własnymi $\mathbf{A}^{-1}$ są $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$

D: $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A}^{-1}\right)\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \det\mathbf{A}\det\left(-\lambda\left(\mathbf{A}^{-1}-\lambda^{-1}\mathbf{I}\right)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\lambda)^n \det\mathbf{A}\det\left(\mathbf{A}^{-1}-\lambda^{-1}\mathbf{I}\right) = 0$

Ponieważ A jest nieosobliwa więc $\det\mathbf{A} \neq 0$ i $\mathbf{A}$ nie ma zerowych wartości własnych, a więc musi zachodzić $\det\left(\mathbf{A}^{-1}-\lambda^{-1}\mathbf{I}\right) = 0$

- wartościami własnymi macierzy trójkątnej są elementy diagonalne:

D: $$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda) = 0$$

A więc $\lambda = a_{11}$, $\lambda = a_{22}$, ..., $\lambda = a_{nn}$

Własności wektorów własnych

- macierze podobne $\mathbf{A}$ i $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ mają te same wartości własne

D: $$\det\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}-\lambda\,\mathbf{I}\right)=\det\left(\mathbf{S}^{-1}\left(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}\right)\mathbf{S}\right)=\det\mathbf{S}^{-1}\det\left(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}\right)\det\mathbf{S}=$$
$$=\det\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\right)\det\left(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}\right)=\det\mathbf{I}\det\left(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}\right)=\det\left(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}\right)$$

- wektory własne macierzy podobnych $\mathbf{A}$ i $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ są związane relacją

D: $$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\,\vec{\mathbf{x}}=\lambda\,\vec{\mathbf{x}}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}\mathbf{S}\,\vec{\mathbf{x}}=\lambda\,\mathbf{S}\,\vec{\mathbf{x}}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}=\lambda\vec{\mathbf{y}}\quad\text{gdzie}\quad\vec{\mathbf{y}}=\mathbf{S}\,\vec{\mathbf{x}}$$

- jeśli $\vec{\mathbf{x}}$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadającym wartości własnej λ i $\mathbf{A}$ jest odwracalna, to $\vec{\mathbf{x}}$ jest również wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ do wartości własnej $1/\lambda$:

D: $$\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}}=\lambda\,\vec{\mathbf{x}}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}}\right)=\mathbf{A}^{-1}\left(\lambda\,\vec{\mathbf{x}}\right)\quad\Rightarrow\quad\vec{\mathbf{x}}=\lambda\mathbf{A}^{-1}\,\vec{\mathbf{x}}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}^{-1}\,\vec{\mathbf{x}}=\frac{1}{\lambda}\,\vec{\mathbf{x}}$$

- jeśli $\vec{\mathbf{x}}$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadającym wartości własnej λ, to jest również wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}-c\mathbf{I}$ odpowiadającym wartości własnej $\lambda-c$ gdzie c jest dowolną stałą.

D: $$\begin{matrix}\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}}=\lambda\,\vec{\mathbf{x}}\\ c\mathbf{I}\,\vec{\mathbf{x}}=c\,\vec{\mathbf{x}}\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\left(\mathbf{A}-c\mathbf{I}\right)\vec{\mathbf{x}}=\left(\lambda-c\right)\vec{\mathbf{x}}$$

Własności wektorów własnych

- wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne

D: Niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ będą różnymi wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}$, a $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_n$ odpowiadającymi im wektorami własnymi, tzn. $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_i = \lambda_i \vec{\mathbf{x}}_i$

Chcemy pokazać, że jedynym rozwiązaniem równania $c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n \vec{\mathbf{x}}_n = \mathbf{0}$ jest rozwiązanie zerowe $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

Mnożąc powyższe równanie przez kolejne potęgi macierzy $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}$ i korzystając z równania własnego otrzymujemy:

$$\begin{cases} c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n \vec{\mathbf{x}}_n = \mathbf{0} \\ c_1\lambda_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2\lambda_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n\lambda_n \vec{\mathbf{x}}_n = \mathbf{0} \\ \vdots \\ c_1\lambda_1^{n-1} \vec{\mathbf{x}}_1 + c_2\lambda_2^{n-1} \vec{\mathbf{x}}_2 + \ldots + c_n\lambda_n^{n-1} \vec{\mathbf{x}}_n = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 \\ c_2 \vec{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ c_n \vec{\mathbf{x}}_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Wyznacznik Vandermonde:

$$\det \mathbf{Q} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)\ldots(\lambda_n - \lambda_1) \neq 0$$ ponieważ λ_i są różnymi w.w.

A więc musi zachodzić: $\begin{pmatrix} c_1 \vec{\mathbf{x}}_1 & c_2 \vec{\mathbf{x}}_2 & \cdots & c_n \vec{\mathbf{x}}_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$

Ale ponieważ $\vec{\mathbf{x}}_i$ są wektorami własnymi (różne od zera), więc: $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Twierdzenie (Cayleya-Hamiltona): **Każda macierz kwadratowa spełnia swoje własne równanie charakterystyczne.**

D: Chcemy pokazać, że jeśli wielomianem charakterystycznym macierzy $\mathbf{A}$ jest

$$w(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) = c_n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_0$$

to wówczas spełnione jest równanie macierzowe

$$w(\mathbf{A}) = c_n\,\mathbf{A}^n + c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0\,\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Niech $\vec{\mathbf{x}}_i$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_i, czyli

$$w(\lambda_i) = 0 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_i = \lambda_i\,\vec{\mathbf{x}}_i$$

Mamy: $w(\mathbf{A})\vec{\mathbf{x}}_i = \left(c_n\,\mathbf{A}^n + c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0\,\mathbf{I}\right)\vec{\mathbf{x}}_i = \left(c_n\lambda_i^n + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + c_0\right)\vec{\mathbf{x}}_i =$

$$= w(\lambda_i)\vec{\mathbf{x}}_i = 0\,\vec{\mathbf{x}}_i$$

Powyższy związek jest prawdziwy dla dowolnego wektora własnego macierzy $\mathbf{A}$, a więc $w(\mathbf{A})$ musi być macierzą zerową.

Przykład:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad w(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \qquad w(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zastosowania tw. Cayleya-Hamiltona

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona można wykorzystać do znalezienia odwrotności macierzy:

$$w(\mathbf{A}) = c_n\,\mathbf{A}^n + c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0\,\mathbf{I} = 0$$

mnożąc obustronnie przez $\mathbf{A}^{-1}$ otrzymujemy:

$$\mathbf{A}^{-1}\,w(\mathbf{A}) = c_n\,\mathbf{A}^{n-1} + c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + c_0\,\mathbf{A}^{-1} = 0$$

a stąd

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{c_0}\left(c_n\,\mathbf{A}^{n-1} + c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + c_1\,\mathbf{I}\right)$$

<u>Przykład:</u> Znajdź macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

$$w(\mathbf{A}) = -\mathbf{A}^3 + 6\,\mathbf{A}^2 - 11\,\mathbf{A} + 6\,\mathbf{I} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A}^{-1}\,w(\mathbf{A}) = -\mathbf{A}^2 + 6\,\mathbf{A} - 11\,\mathbf{I} + 6\,\mathbf{A}^{-1} = 0$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\left(\mathbf{A}^2 - 6\,\mathbf{A} + 11\,\mathbf{I}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}^2 - 6\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & -19 & 13 \\ -2 & -5 & 5 \\ -8 & -26 & 20 \end{pmatrix}$$

Zastosowania tw. Cayleya-Hamiltona

Zastosowanie tw. Cayleya-Hamiltona do znajdowania wysokich potęg macierzy:

$$w(\mathbf{A}) = c_n\,\mathbf{A}^n + c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0\,\mathbf{I} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A}^n = -\frac{1}{c_n}\left(c_{n-1}\,\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + c_0\,\mathbf{I}\right)$$

Mnożąc ostatnie równanie obustronnie przez $\mathbf{A}$ i podstawiając go jednocześnie za $\mathbf{A}^n$ dostajemy:

$$\mathbf{A}^{n+1} = \left(\frac{c_{n-1}^2}{c_n^2} - \frac{c_{n-2}}{c_n}\right)\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \left(\frac{c_{n-1}c_1}{c_n^2} - \frac{c_0}{c_n}\right)\mathbf{A} + \frac{c_{n-1}c_0}{c_n^2}\,\mathbf{I}$$

Proces ten może być kontynuowany, co oznacza, że dowolną całkowitą potęgę macierzy stopnia n można zapisać w postaci wielomianu macierzy stopnia co najwyżej $n-1$

Zastosowania tw. Cayleya-Hamiltona

<u>Przykład:</u> Znajdź macierz $\mathbf{A}^{100}$ jeśli $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$$w(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-8=(\lambda-4)(\lambda+2)=0\quad\Rightarrow\quad \lambda_1=4,\ \lambda_2=-2$$

A więc wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A}^{100}$ są λ_1^{100} i λ_2^{100} czyli spełnione są równania własne:

$$\mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_1=\lambda_1^{100}\vec{\mathbf{x}}_1 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_2=\lambda_2^{100}\vec{\mathbf{x}}_2$$

Z drugiej strony, wiemy na podstawie tw. C-H, że macierz $\mathbf{A}^{100}$ możemy zapisać jako kombinację liniową macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{I}$ (ponieważ $\mathbf{A}$ jest stopnia n=2): $\mathbf{A}^{100}=\alpha\,\mathbf{A}+\beta\,\mathbf{I}$

Stąd mamy:

$$\begin{cases}\mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_1=(\alpha\,\mathbf{A}+\beta\,\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_1=(\alpha\lambda_1+\beta)\vec{\mathbf{x}}_1\\ \mathbf{A}^{100}\vec{\mathbf{x}}_2=(\alpha\,\mathbf{A}+\beta\,\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}}_2=(\alpha\lambda_2+\beta)\vec{\mathbf{x}}_2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda_1^{100}=\alpha\lambda_1+\beta\\ \lambda_2^{100}=\alpha\lambda_2+\beta\end{cases}$$

Rozwiązując układ równań względem α i β otrzymujemy:

$$\alpha=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1^{100}-\lambda_2^{100}\right)=\frac{1}{6}\left(4^{100}-2^{100}\right)$$

$$\beta=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1\lambda_2^{100}-\lambda_2\lambda_1^{100}\right)=\frac{1}{3}\left(4^{100}+2^{101}\right)$$

a więc: $$\mathbf{A}^{100}=\frac{1}{6}\left(4^{100}-2^{100}\right)\mathbf{A}+\frac{1}{3}\left(4^{100}+2^{101}\right)\mathbf{I}$$

Podprzestrzenie niezmiennicze

Definicja: Niech T będzie operatorem liniowym na przestrzeni $\mathcal{V}$. Podprzestrzeń $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ nazywamy podprzestrzenią niezmienniczą operatora T jeśli $T(\mathcal{X}) = \{T(\vec{\mathbf{x}}) : \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{X}$

Operator T, którego działanie jest ograniczone do podprzestrzeni $\mathcal{X}$ oznaczamy $T_{/\mathcal{X}}$.

Przykład: Pokaż, że podprzestrzeń $\mathcal{X}$ napięta przez wektory $\vec{\mathbf{x}}_1$ i $\vec{\mathbf{x}}_2$ jest podprzestrzenią niezmienniczą transformacji liniowej określonej za pomocą macierzy $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_1 = 2\vec{\mathbf{x}}_1 \\ \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_2 = \vec{\mathbf{x}}_1 + 2\vec{\mathbf{x}}_2 \end{cases}$$

Dla dowolnego wektora $\vec{\mathbf{x}} = \alpha\vec{\mathbf{x}}_1 + \beta\vec{\mathbf{x}}_2$ z podprzestrzeni $\mathcal{X}$ mamy:

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\alpha\vec{\mathbf{x}}_1 + \beta\vec{\mathbf{x}}_2) = \alpha\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_1 + \beta\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_2 = 2\alpha\vec{\mathbf{x}}_1 + \beta(\vec{\mathbf{x}}_1 + 2\vec{\mathbf{x}}_2) = (2\alpha + \beta)\vec{\mathbf{x}}_1 + 2\beta\vec{\mathbf{x}}_2 \in \mathcal{X}$$

Reprezentacją macierzową operatora $\mathbf{A}_{/\mathcal{X}}$ w bazie $\mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2\}$ jest:

$$\left[\mathbf{A}_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}} = \left(\left[\mathbf{A}_{/\mathcal{X}}(\vec{\mathbf{x}}_1)\right]_{\mathcal{B}} \middle| \left[\mathbf{A}_{/\mathcal{X}}(\vec{\mathbf{x}}_2)\right]_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Uwaga: Istnienie podprzestrzeni niezmienniczych dla operatora liniowego T umożliwia znalezienie jego prostszej reprezentacji macierzowej.

Podprzestrzenie niezmiennicze

Niech $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą operatora T określonego na przestrzeni $\mathcal{V}$, oraz niech będą dane bazy, odpowiednio w $\mathcal{X}$ oraz w całej przestrzeni $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_r\} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{B} = \{\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_r, \vec{\mathbf{y}}_1, \vec{\mathbf{y}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{y}}_q\}$$

Reprezentacja macierzowa operatora T w bazie $\mathcal{B}$:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left(\left[T(\vec{\mathbf{x}}_1)\right]_{\mathcal{B}} \middle| \left[T(\vec{\mathbf{x}}_2)\right]_{\mathcal{B}} \middle| \cdots \middle| \left[T(\vec{\mathbf{x}}_r)\right]_{\mathcal{B}} \middle| \left[T(\vec{\mathbf{y}}_1)\right]_{\mathcal{B}} \middle| \left[T(\vec{\mathbf{y}}_2)\right]_{\mathcal{B}} \middle| \cdots \middle| \left[T(\vec{\mathbf{y}}_q)\right]_{\mathcal{B}} \right)$$

Ponieważ $\mathcal{X}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą natomiast $\mathcal{Y} = span\{\vec{\mathbf{y}}_1, \vec{\mathbf{y}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{y}}_q\}$ niekoniecznie, więc:

$$T(\vec{\mathbf{x}}_j) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} \vec{\mathbf{x}}_i \quad \Rightarrow \quad \left[T(\vec{\mathbf{x}}_j)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{rj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T(\vec{\mathbf{y}}_j) = \sum_{i=1}^{r} \beta_{ij} \vec{\mathbf{x}}_i + \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ij} \vec{\mathbf{y}}_i \quad \Rightarrow \quad \left[T(\vec{\mathbf{y}}_j)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{rj} \\ \gamma_{1j} \\ \vdots \\ \gamma_{qj} \end{pmatrix}$$

Jeśli istnieje podprzestrzeń niezmiennicza, to reprezentacja macierzowa operatora T daje się zapisać w postaci trójkątnej blokowej:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}} & \mathbf{B}_{r\times q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{q\times q} \end{pmatrix}$$

Podprzestrzenie niezmiennicze

Twierdzenie: Niech T będzie operatorem liniowym w n-wymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}$ oraz $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, ..., $\mathcal{Z}$ niech będą podprzestrzeniami $\mathcal{V}$, odpowiednio o wymiarach r_1, r_2, ..., r_k oraz bazach $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$, ..., $\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}$ takimi, że $\sum_i r_i = n$ oraz $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Z}}$ jest bazą w $\mathcal{V}$. Podprzestrzenie $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, ..., $\mathcal{Z}$ są wszystkie niezmiennicze względem operatora T wtedy i tylko wtedy gdy $[T]_{\mathcal{B}}$ ma postać blokową diagonalną:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{r_1\times r_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{r_2\times r_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C}_{r_k\times r_k} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \left[T_{/\mathcal{X}}\right]_{\mathcal{B}_{\mathcal{X}}}$$
$$\mathbf{B} = \left[T_{/\mathcal{Y}}\right]_{\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{C} = \left[T_{/\mathcal{Z}}\right]_{\mathcal{B}_{\mathcal{Z}}}$$

Twierdzenie: Jeśli operator T jest wprost macierzą $n\times n$, tzn. $T(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{T}_{n\times n}\vec{\mathbf{v}}$, to $\mathbf{Q}$ jest nieosobliwą macierzą taką że

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{r_1\times r_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{r_2\times r_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C}_{r_k\times r_k} \end{pmatrix}$$

wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}_1 \middle| \mathbf{Q}_2 \middle| \cdots \middle| \mathbf{Q}_k\right)$ gdzie $\mathbf{Q}_i$ jest macierzą $n\times r_i$ przy czym kolumny $\mathbf{Q}_i$ napinają podprzestrzeń niezmienniczą operatora T.

Diagonalizacja macierzy kwadratowej

Dana jest macierz $\mathbf{A}_{n\times n}$. Jej wartości własne λ_i i wektory własne $\vec{\mathbf{x}}_i$ spełniają równanie

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}_i = \lambda_i \vec{\mathbf{x}}_i \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,n$$

Każde z równań własnych osobno można zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i x_{1i} \\ \lambda_i x_{2i} \\ \vdots \\ \lambda_i x_{ni} \end{pmatrix}$$

Natomiast wszystkie jednocześnie daje się zapisać w zwartej postaci w formie:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \cdots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_n x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \cdots & \lambda_n x_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalizacja macierzy kwadratowej

Wprowadzając oznaczenia

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

możemy powyższe równanie macierzowe zapisać w postaci

$$\mathbf{AS} = \mathbf{S}\Lambda \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \Lambda$$

<u>Wniosek:</u> Wykorzystując macierz zbudowaną z wektorów własnych można za pomocą transformacji podobieństwa przetransformować macierz $\mathbf{A}$ do postaci diagonalnej w której elementami diagonalnymi są wartości własne macierzy $\mathbf{A}$.

<u>Przykład:</u> Zdiagonalizuj macierz za pomocą transformacji podobieństwa.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3$$

wektory własne: $\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Diagonalizacja macierzy kwadratowej

Po znormalizowaniu wektorów własnych utworzona macierz jest unitarna (ortogonalna)

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformację $U^{-1}AU = U^{\dagger}AU = \Lambda$ nazywamy unitarną transformacją podobieństwa.

Przykład: Zdiagonalizuj macierz za pomocą transformacji podobieństwa.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 2$$

Wektory własne: $\lambda_1 = 1: \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{2,3} = 2: \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wniosek: Tej macierzy nie da się zdiagonalizować.

Uwaga: Kompletnym układem wektorów własnych macierzy $A_{n\times n}$ nazywamy każdy układ n liniowo niezależnych wektorów własnych tej macierzy. Macierze które nie posiadają kompletnego układu wektorów własnych nazywamy niekompletnymi.

Uwaga: Macierz $A_{n\times n}$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy gdy posiada kompletny układ wektorów własnych.