# Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 11

# Pojęcie przestrzeni wektorowej

Definicja: Zbiór $\mathcal{V}$ nazywamy przestrzenią wektorową (liniową) nad ciałem liczbowym $\mathcal{Q} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, jeśli zdefiniowane są dwa wzajemnie uzgodnione działania na jego elementach (wektorach), dodawanie oraz mnożenie przez liczby z $\mathcal{Q}$, posiadające następujące własności (muszą być spełnione dla każdego $c, c_1, c_2 \in \mathcal{Q}$ i każdego $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$ ):

(A1) $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$

(A2) $(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) + \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} + (\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{u}})$

(A3) $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}}$

(A4) istnieje wektor zerowy $\vec{0} \in \mathcal{V}$ taki, że $\vec{0} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ dla dowolnego $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$

(A5) dla każdego $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ istnieje wektor przeciwny $-\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ taki, że $\vec{\mathbf{v}} + (-\vec{\mathbf{v}}) = \vec{0}$

(M1) $c\,\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ dla wszystkich $c \in \mathcal{Q}$ i $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$

(M2) $(c_1 c_2)\,\vec{\mathbf{v}} = c_1 (c_2 \vec{\mathbf{v}})$

(M3) $c(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = c\vec{\mathbf{v}} + c\vec{\mathbf{w}}$

(M4) $(c_1 + c_2)\,\vec{\mathbf{v}} = c_1 \vec{\mathbf{v}} + c_2 \vec{\mathbf{v}}$

(M5) istnieje liczba $1 \in \mathcal{Q}$ taka, że $1\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}$ dla dowolnego $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$

# Przestrzenie wektorowe - przykłady

- zbiór $\mathcal{R}^{m \times n}$ rzeczywistych macierzy $m \times n$ tworzy przestrzeń wektorową nad $\mathcal{R}$.
- zbiór $\mathcal{C}^{m \times n}$ zespolonych macierzy $m \times n$ tworzy przestrzeń wektorową nad $\mathcal{C}$.

w szczególności mamy:

$$\mathcal{R}^{n\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ x_i \in \mathcal{R} \right\} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{C}^{n\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix};\ z_i \in \mathcal{C} \right\}$$

- zbiór liczb rzeczywistych nad $\mathcal{R}$,
- zbiór liczb zespolonych nad $\mathcal{R}$ oraz nad $\mathcal{C}$,

Definiujemy operacje dodawania i mnożenia przez skalar funkcji jako

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{oraz} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

- następujące zbiory tworzą przestrzenie wektorowe nad $\mathcal{R}$:
  - zbiór wszystkich funkcji odwzorowujących przedział $[0,1]$ w $\mathcal{R}$,
  - zbiór wszystkich funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na $[0,1]$
  - zbiór wszystkich funkcji o wartościach rzeczywistych różniczkowalnych na $[0,1]$
- zbiór $\mathcal{P}^{\mathcal{C}}(t)$ wszystkich wielomianów o współczynnikach zespolonych nad $\mathcal{C}$.
- zbiór $\mathcal{P}_n^{\mathcal{R}}(t)$ wszystkich wielomianów stopnia mniejszego bądź równego $n$ o współczynnikach rzeczywistych nad $\mathcal{R}$ (ale nie nad $\mathcal{C}$).

# Podprzestrzeń

Definicja: Niepusty podzbiór $\mathcal{S}$ przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nad ciałem $\mathcal{Q}$ ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$) nazywamy **podprzestrzenią** przestrzeni $\mathcal{V}$ jeśli $\mathcal{S}$ tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem $\mathcal{Q}$ z tak samo zdefiniowanymi operacjami dodawania i mnożenia przez skalar jak w $\mathcal{V}$.

Twierdzenie: Niepusty podzbiór $\mathcal{S}$ przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathcal{V}$ wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są jednocześnie warunki:

(A1) $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} \in \mathcal{S}$

(M1) $\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}$ dla wszystkich $\alpha \in \mathcal{Q}$

Dowód: $\mathcal{S}$ jako podzbiór $\mathcal{V}$ dziedziczy wszystkie własności przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ z wyjątkiem (A1) (A4) (A5) i M(1). Ale (A1) i (M1) implikują (A4) i (A5):

$(\text{M1}): \ \vec{\mathbf{x}} \in S \ \Rightarrow \ -\vec{\mathbf{x}} = (-1)\vec{\mathbf{x}} \in S \qquad \Rightarrow$ (A5)

$(\text{A1}): \ \vec{\mathbf{x}}, (-\vec{\mathbf{x}}) \in S \ \Rightarrow \ \vec{\mathbf{x}} + (-\vec{\mathbf{x}}) \in S$ a więc $\vec{\mathbf{0}} \in S \qquad \Rightarrow$ (A4)

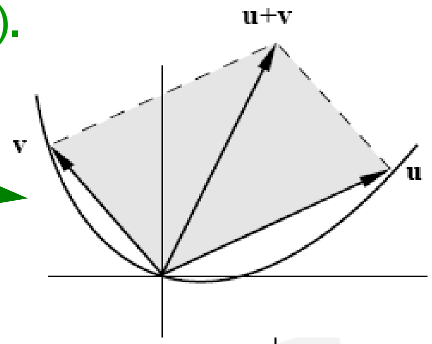
Definicja: Podzbiór $\mathcal{Z}=\{0\}$ przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathcal{V}$ i nosi nazwę **podprzestrzeni trywialnej**.

Przykład:

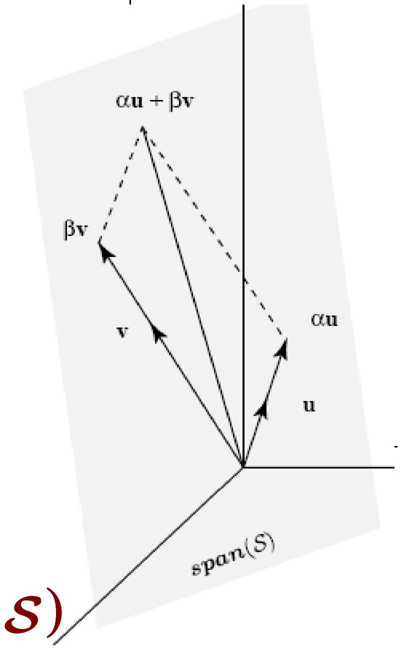
- zbiór liczb rzeczywistych tworzy podprzestrzeń przestrzeni liczb zespolonych nad $\mathcal{R}$,
- zbiór $\mathcal{P}_n^c(t)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{P}^c(t)$,

# Podprzestrzenie - przykłady

- zbiór macierzy (rzeczywistych lub zespolonych) $\mathcal{M}^{r\times s}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{M}^{m\times n}$ dla $r \leqslant m$ oraz $s \leqslant$ n (macierz $r \times s$ utożsamiamy z macierzami $m \times n$ w których wszystkie elementy ostatnich $m-r$ wierszy i $n-s$ kolumn to zera).
- zbiór $\mathcal{L}=\{(x,y): y=ax\}$ jest podprzestrzeń przestrzeni $\mathcal{R}^2$ (żadna inna linia nie jest podprzestrzenią $\mathcal{R}^2$ )




- w przestrzeni $\mathcal{R}^3$ nietrywialnymi podprzestrzeniami są linie proste i płaszczyzny przechodzące przez początek układu,
- przestrzeń $\mathcal{R}^m$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{R}^n$ dla $m<n$




Twierdzenie: Niech $\mathcal{S}$ będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$. Zbiór $\mathcal{W}_{\mathcal{S}}$ wszystkich liniowych kombinacji wektorów z $\mathcal{S}$ tworzy podprzestrzeń $\mathcal{V}$. Mówimy, że zbiór $\mathcal{S}$ napina przestrzeń $\mathcal{W}_{\mathcal{S}}$. Stosujemy oznaczenie span($\mathcal{S}$).

$$\mathcal{S}=\{\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,\dots,\vec{\mathbf{v}}_r\} \quad \Rightarrow \quad span(\mathcal{S})=\{\alpha_1\vec{\mathbf{v}}_1+\alpha_2\vec{\mathbf{v}}_2+\dots+\alpha_r\vec{\mathbf{v}}_r \mid \alpha_i \in \mathcal{Q}\}$$

Dowód:

$$\vec{\mathbf{x}}=\sum_i \xi_i\vec{\mathbf{v}}_i \quad \vec{\mathbf{y}}=\sum_i \eta_i\vec{\mathbf{v}}_i \quad \vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}\in span(\mathcal{S})$$

$$\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}=\sum_i(\xi_i+\eta_i)\vec{\mathbf{v}}_i \in span(\mathcal{S}) \quad \text{oraz} \quad \beta\vec{\mathbf{x}}=\sum_i(\beta\xi_i)\vec{\mathbf{v}}_i \in span(\mathcal{S})$$

# Zbiory napinające - przykłady

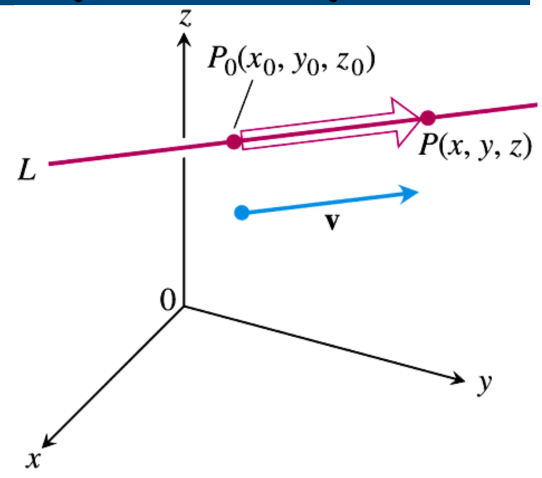
Dygresja: Równanie prostej w przestrzeni:

$\vec{\mathbf{v}}$ to wektor równoległy do prostej,

$\vec{\mathbf{r}}_0$ to wektor wodzący dowolnego punktu prostej.

$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}t$ – równanie parametryczne $(-\infty < t < \infty)$

$\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{r}}_0 \times \vec{\mathbf{v}} \equiv \vec{\mathbf{b}}$ – równanie w postaci normalnej



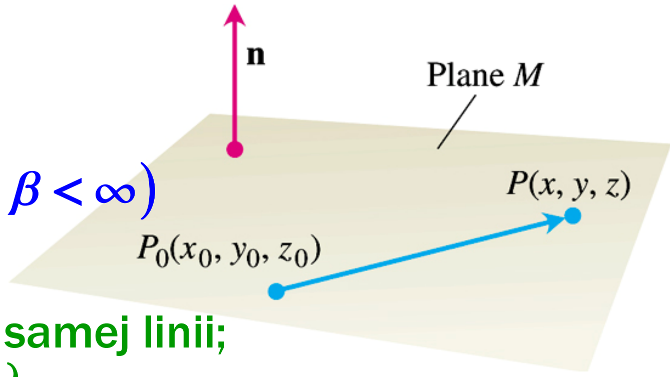

- $0 \neq \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{R}^3 \quad \Rightarrow \quad span(\vec{\mathbf{u}}) = \{\vec{\mathbf{r}} \mid \vec{\mathbf{r}} \in \mathcal{R}^3,\ \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}\}$

(prosta przechodząca przez początek układu i równoległa do wektora $\vec{\mathbf{u}}$)

Dygresja: Równanie płaszczyzny w przestrzeni:

$\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ to dwa wektory nie leżące na tej samej linii,

$\vec{\mathbf{n}}$ to wektor prostopadły do płaszczyzny.




$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$ – równanie parametryczne $(-\infty < \alpha, \beta < \infty)$

$\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{r}}_0 \cdot \vec{\mathbf{n}} \equiv \vec{\mathbf{d}}$ – równanie w postaci normalnej

- $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{R}^3$ to dwa niezerowe wektory, nie leżące na tej samej linii;

$$span(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = \{\vec{\mathbf{r}} \mid \vec{\mathbf{r}} \in \mathcal{R}^3,\ \vec{\mathbf{r}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{0}}\}$$

(płaszczyzna przechodząca przez początek układu w której leżą wektory $\vec{\mathbf{u}}$ i $\vec{\mathbf{v}}$)

# Zbiory napinające - własności

- skończony zbiór $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ napina przestrzeń wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej $n$.
- nieskończony zbiór $\{1, x, x^2, ...\}$ napina przestrzeń wszystkich wielomianów.

Twierdzenie: Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą której kolejnymi kolumnami są wektory ze zbioru $\mathcal{S} = \{\vec{\mathbf{a}}_1, .\vec{\mathbf{a}}_2, .., \vec{\mathbf{a}}_n\}$ z podprzestrzeni $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{R}^{m\times 1}$. Zbiór $\mathcal{S}$ napina przestrzeń $\mathcal{V}$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\vec{\mathbf{b}} \in \mathcal{V}$ istnieje wektor $\vec{\mathbf{x}}$ taki, że $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

Dowód: Z definicji $\mathcal{S}$ napina $\mathcal{V}$ jeśli istnieją stałe $\alpha_i$ takie, że dla każdego $\vec{\mathbf{b}} \in \mathcal{V}$ zachodzi:

$$\vec{\mathbf{b}} = \alpha_1\vec{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2\vec{\mathbf{a}}_2 + ... + \alpha_n\vec{\mathbf{a}}_n = \left(\vec{\mathbf{a}}_1 \,|\, \vec{\mathbf{a}}_2 \,|\, ... \,|\, \vec{\mathbf{a}}_n\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$$

Przykład: Czy zbiór $\mathcal{S} = \{(1\ \ 1\ \ 1),\ (1\ \ -1\ \ -1),\ (3\ \ 1\ \ 1)\}$ napina przestrzeń $\mathcal{R}^3$?

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

$\mathbf{rz}(\mathbf{A}) = 2$

$\mathbf{rz}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = 3$ np. dla $b_1$=0, $b_2$=1, $b_3$=0

a więc $\mathcal{S}$ nie napina $\mathcal{R}^3$ (nie istnieje wektor $\vec{\mathbf{x}}$)

# Suma przestrzeni wektorowych

Definicja: Niech $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ będą podprzestrzeniami $\mathcal{V}$. Sumą przestrzeni $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ nazywamy zbiór wszystkich możliwych sum wektorów z $\mathcal{X}$ i wektorów z $\mathcal{Y}$ :

$$\mathcal{X}+\mathcal{Y}=\left\{\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}} \mid \vec{\mathbf{x}}\in\mathcal{X} \ \text{ i } \ \vec{\mathbf{y}}\in\mathcal{Y}\right\}$$

Twierdzenie: Suma podprzestrzeni $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{V}$.

Dowód: Niech $\mathcal{S}$ = $\mathcal{X}$+$\mathcal{Y}$. Wystarczy sprawdzić warunki (A1) i (M1) dla $\mathcal{S}$.

$$\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}\in\mathcal{S} \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{u}}=\vec{\mathbf{x}}_1+\vec{\mathbf{y}}_1 \ \text{ i } \ \vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{x}}_2+\vec{\mathbf{y}}_2 \quad \text{gdzie} \quad \vec{\mathbf{x}}_1,\vec{\mathbf{x}}_2\in\mathcal{X} \ \text{ oraz } \ \vec{\mathbf{y}}_1,\vec{\mathbf{y}}_2\in\mathcal{Y}$$

(A1): $\vec{\mathbf{x}}_1+\vec{\mathbf{x}}_2\in\mathcal{X} \quad \text{oraz} \quad \vec{\mathbf{y}}_1+\vec{\mathbf{y}}_2\in\mathcal{Y} \;\Rightarrow\; \vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}=\left(\vec{\mathbf{x}}_1+\vec{\mathbf{x}}_2\right)+\left(\vec{\mathbf{y}}_1+\vec{\mathbf{y}}_2\right)\in\mathcal{S}$

(M1): $\alpha\vec{\mathbf{x}}_1\in\mathcal{X} \quad \text{oraz} \quad \alpha\vec{\mathbf{y}}_1\in\mathcal{Y} \;\Rightarrow\; \alpha\vec{\mathbf{u}}=\alpha\left(\vec{\mathbf{x}}_1+\vec{\mathbf{y}}_1\right)=\alpha\vec{\mathbf{x}}_1+\alpha\vec{\mathbf{y}}_1\in\mathcal{S}$

Twierdzenie: Jeśli $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ napinają przestrzenie $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ to $\mathcal{S}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$ napina $\mathcal{X}$+$\mathcal{Y}$.

Dowód: Niech $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}=\left\{\vec{\mathbf{x}}_1,\vec{\mathbf{x}}_2,\ldots,\vec{\mathbf{x}}_r\right\}$ oraz $\mathcal{S}_{\mathcal{Y}}=\left\{\vec{\mathbf{y}}_1,\vec{\mathbf{y}}_2,\ldots,\vec{\mathbf{y}}_t\right\}$

$$\vec{\mathbf{z}}\in span\left(\mathcal{S}_{\mathcal{X}}\cup\mathcal{S}_{\mathcal{Y}}\right) \;\Leftrightarrow\; \vec{\mathbf{z}}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i+\sum_{i=1}^{t}\beta_i y_i=\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}} \quad \text{gdzie} \quad \vec{\mathbf{x}}\in\mathcal{S}_{\mathcal{X}} \ \text{ i } \ \vec{\mathbf{y}}\in\mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$$

$$\Leftrightarrow\; \vec{\mathbf{z}}\in\mathcal{X}+\mathcal{Y}$$

Przykład: Niech podprzestrzenie $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{R}^2$ oraz $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{R}^2$ będą dwiema różnymi liniami przechodzącymi przez początek układu, wtedy $\mathcal{X}+\mathcal{Y}=\mathcal{R}^2$

# Podprzestrzenie - przykłady

Przykład: Które z następujących podzbiorów $\mathcal{R}^{n\times n}$ są podprzestrzeniami $\mathcal{R}^{n\times n}$ :

- macierze symetryczne – tak
- macierze diagonalne – tak
- macierze nieosobliwe – nie np. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- macierze osobliwe – nie np. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- macierze trójkątne – nie
- macierze górno-trójkątne – tak
- wszystkie macierze komutujące z daną macierzą $A$ – tak

$$AB_1 = B_1A \text{ i } AB_2 = B_2A \Rightarrow A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = B_1A + B_2A = (B_1 + B_2)A$$

- wszystkie macierze takie, że $A^2 = A$ – nie

$$A^2 = A \text{ i } B^2 = B \Rightarrow (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + AB + BA + B \neq A + B$$

- wszystkie macierze takie, że $\mathrm{Tr}\, A = 0$ – tak

Przykład: Niech $\mathcal{X}$ będzie płaszczyzną w $\mathcal{R}^3$ przechodzącą przez początek układu, natomiast $\mathcal{Y}$ linią prostopadłą do tej płaszczyzny i również przechodzącą przez początek układu. Czym jest $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ ? – cała przestrzeń $\mathcal{R}^3$

# Podstawowe podprzestrzenie

Definicja: Funkcję $f$ odwzorowującą punkty ze zbioru $\mathcal{D}$ w punkty ze zbioru $\mathcal{R}$ nazywamy funkcją liniową jeśli spełnia warunki (dla wszystkich $x, y \in \mathcal{D}$ i skalarów $\alpha$):

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{oraz} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Definicja: Zakresem $\mathcal{R}(f)$ funkcji liniowej $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ nazywamy podzbiór

$$\mathcal{R}(f) = \{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \} \subseteq \mathcal{R}^m$$

Twierdzenie: Zakres $\mathcal{R}(f)$ każdej funkcji liniowej $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ jest podprzestrzenią $\mathcal{R}^m$ oraz każda podprzestrzeń $\mathcal{R}^m$ jest zakresem pewnej funkcji liniowej.

Dowód: $\mathcal{R}(f)$ jest podprzestrzenią $\mathcal{R}^m$:

$$(\mathbf{A1}): \ \vec{\mathbf{y}}_1, \vec{\mathbf{y}}_2 \in \mathcal{R}(f) \ \Rightarrow \ \exists \vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2 \in \mathcal{R}^n \text{ takie że } \vec{\mathbf{y}}_1 = f(\vec{\mathbf{x}}_1) \text{ i } \vec{\mathbf{y}}_2 = f(\vec{\mathbf{x}}_2) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \vec{\mathbf{y}}_1 + \vec{\mathbf{y}}_2 = f(\vec{\mathbf{x}}_1) + f(\vec{\mathbf{x}}_2) = f(\vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2) \in \mathcal{R}(f)$$

$$(\mathbf{M1}): \ \vec{\mathbf{y}} \in \mathcal{R}(f) \ \Rightarrow \ \exists \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^n \text{ takie że } \vec{\mathbf{y}} = f(\vec{\mathbf{x}}) \ \Rightarrow \ \alpha \vec{\mathbf{y}} = \alpha f(\vec{\mathbf{x}}) = f(\alpha \vec{\mathbf{x}}) \in \mathcal{R}(f)$$

Każda podprzestrzeń $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{R}^m$ jest zakresem pewnej funkcji liniowej $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$:

Niech zbiór $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, ..., \vec{\mathbf{v}}_n\}$ napina przestrzeń $\mathcal{V} = \{\alpha_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + ... + \alpha_n \vec{\mathbf{v}}_n \mid \alpha_i \in \mathcal{R}\}$

$$\mathbf{A}_{m\times n} = (\vec{\mathbf{v}}_1 \mid \vec{\mathbf{v}}_2 \mid ... \mid \vec{\mathbf{v}}_n) \ \ i \ \ \vec{\mathbf{x}} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^{\mathrm{T}} \ \Rightarrow \ \alpha_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \alpha_2 \vec{\mathbf{v}}_2 + ... + \alpha_n \vec{\mathbf{v}}_n = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$$

$$f(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} \ \text{ jest liniowa i mamy } \ \mathcal{R}(f) = \{\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^{n\times 1}\} = \{\alpha_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + ... + \alpha_n \vec{\mathbf{v}}_n \mid \alpha_i \in \mathcal{R}\} = \mathcal{V}$$

# Podprzestrzenie macierzowe

Definicja: Zakresem macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m\times n}$ nazywamy podprzestrzeń $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ przestrzeni $\mathcal{R}^m$ generowaną przez zakres funkcji $f(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$: $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} \mid \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^n\} \subseteq \mathcal{R}^m$

Definicja: Zakresem macierzy $\mathbf{A}^T \in \mathcal{R}^{n\times m}$ nazywamy podprzestrzeń $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$ przestrzeni $\mathcal{R}^n$ generowaną przez zakres funkcji $f(\vec{\mathbf{y}}) = \mathbf{A}^T\vec{\mathbf{y}}$: $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T) = \{\mathbf{A}^T\vec{\mathbf{y}} \mid \vec{\mathbf{y}} \in \mathcal{R}^m\} \subseteq \mathcal{R}^n$

Wszystkie obrazy odwzorowania $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$ są liniowymi kombinacjami kolumn macierzy $\mathbf{A}$, tzn, jeśli $\vec{\mathbf{x}} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_{\bullet 1} \mid \mathbf{A}_{\bullet 2} \mid ... \mid \mathbf{A}_{\bullet n}) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathbf{A}_{\bullet j}$$

A więc przestrzeń $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ to przestrzeń napięta przez kolumny macierzy $\mathbf{A}$ (przestrzeń kolumnowa), tzn. $\vec{\mathbf{b}} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \exists \vec{\mathbf{x}},\ \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$

Podobnie $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$ to przestrzeń napięta przez kolumny macierzy $\mathbf{A}^T$ czyli wiersze macierzy $\mathbf{A}$ (przestrzeń wierszowa), tzn. $\vec{\mathbf{a}} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}^T) \Leftrightarrow \exists \vec{\mathbf{y}},\ \vec{\mathbf{a}}^T = \vec{\mathbf{y}}^T\mathbf{A}$

Przykład: Podaj interpretację geometryczną przestrzeni $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ oraz $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$ dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = span(\mathbf{A}_{\bullet 1}, \mathbf{A}_{\bullet 2}, \mathbf{A}_{\bullet 3}) \Rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{A}) = span((1,2)^T)$ – linia w $\mathcal{R}^2$

$\mathcal{R}(\mathbf{A}^T) = span(\mathbf{A}_{1\bullet}, \mathbf{A}_{2\bullet}) \Rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{A}^T) = span((1,2,3)^T)$ – linia w $\mathcal{R}^3$

# Relacja równoważności macierzy

Definicja: Mówimy, że macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są równoważne jeśli można przejść od macierzy $\mathbf{A}$ do macierzy $\mathbf{B}$ poprzez operacje elementarne na wierszach i/lub kolumnach. Jest to relacja równoważności, którą można wyrazić za pomocą macierzy elementarnych $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \iff \mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$$

W szczególności jeśli macierz $\mathbf{A}$ da się przekształcić w $\mathbf{B}$ jedynie za pomocą operacji na wierszach lub jedynie za pomocą operacji na kolumnach wtedy piszemy:

$$\mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{B} \iff \mathbf{PA} = \mathbf{B} \qquad\qquad \mathbf{A} \overset{\text{kol}}{\sim} \mathbf{B} \iff \mathbf{AQ} = \mathbf{B}$$

Twierdzenie: Jeśli rząd macierzy $\mathbf{A}_{m\times n}$ wynosi $r$, tzn. rz$(\mathbf{A}) = r$, wtedy $\mathbf{A} \sim \mathbf{N}_\mathrm{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\mathrm{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Dowód: Zawsze zachodzi $\mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{E}_\mathbf{A} \Rightarrow$ istnieje $\mathbf{P}$ taka że $\mathbf{PA} = \mathbf{E}_\mathbf{A}$

Przestawiamy r podstawowych kolumn na lewo. Niech operacja ta oznacza mnożenie od prawej strony przez $\mathbf{Q}_1$. W rezultacie otrzymujemy:

$$\mathbf{PAQ}_1 = \mathbf{E}_\mathbf{A}\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\mathrm{r} & \mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Mnożymy od prawej strony przez nieosobliwą macierz

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\mathrm{r} & -\mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{PAQ}_1\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\mathrm{r} & \mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_\mathrm{r} & -\mathbf{J} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\mathrm{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

A więc $\mathbf{A} \sim \mathbf{N}_\mathrm{r}$ ponieważ $\mathbf{P}$ oraz $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ są nieosobliwe.

# Relacja równoważności macierzy

**Przykład:** Niech rz(A) = $r$ i rz(B) = $s$. Uzasadnij, że $\mathrm{rz}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rz}(A) + \mathrm{rz}(B) = r + s$

$$\left.\begin{matrix} A \sim N_r \\ B \sim N_s \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & N_s \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rz}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rz}\begin{pmatrix} N_r & 0 \\ 0 & N_s \end{pmatrix} = r + s = \mathrm{rz}(A) + \mathrm{rz}(B)$$

**Twierdzenie:** Prawdziwe są następujące stwierdzenia dotyczące macierzy $A_{m\times n}$ i $B_{m\times n}$:

$$A \sim B \Leftrightarrow \mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(B) \qquad A \overset{\text{wiersz}}{\sim} B \Leftrightarrow E_A = E_B \qquad A \overset{\text{kol}}{\sim} B \Leftrightarrow E_{A^T} = E_{B^T}$$

**Dowód:**

a) $\mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(B) \Rightarrow \begin{matrix} A \sim N_r \\ B \sim N_r \end{matrix} \Rightarrow A \sim N_r \sim B \Rightarrow A \sim B$

Niech rz(A) = $r$ i rz(B) = $s$ czyli $A \sim N_r$ i $B \sim N_s$

$$A \sim B \Rightarrow N_r \sim A \sim B \sim N_s \Rightarrow N_r \sim N_s \Rightarrow \mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(B)$$

b) $\left.\begin{matrix} A \overset{\text{wiersz}}{\sim} B \\ B \overset{\text{wiersz}}{\sim} E_B \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \overset{\text{wiersz}}{\sim} E_B \Rightarrow E_B = E_A$

$$E_A = E_B \Rightarrow A \overset{\text{wiersz}}{\sim} E_A = E_B \overset{\text{wiersz}}{\sim} B \Rightarrow A \overset{\text{wiersz}}{\sim} B$$

c) $A \overset{\text{kol}}{\sim} B \Leftrightarrow AQ = B \Leftrightarrow (AQ)^T = B^T \Leftrightarrow Q^T A^T = B^T \Leftrightarrow A^T \overset{\text{wiersz}}{\sim} B^T$