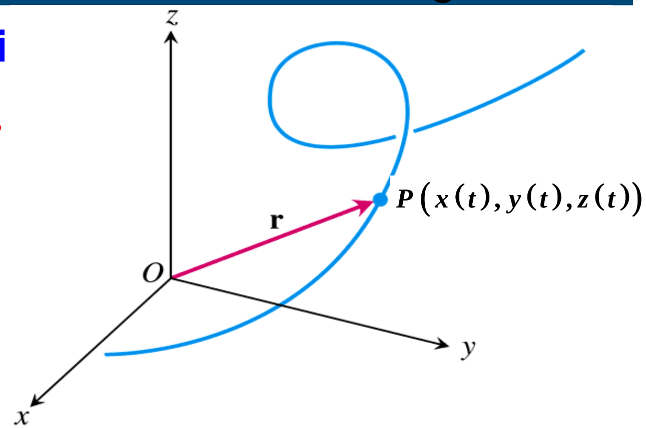
Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 11

Pochodna funkcji wektorowej

Definicja: Funkcją wektorową nazywamy funkcję postaci

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad \text{gdzie} \quad t \in I \subset \mathcal{R}$$



Przykład: Linia śrubowa

$$\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + t\hat{k}$$

Definicja: Pochodną funkcji wektorowej nazywamy granicę:

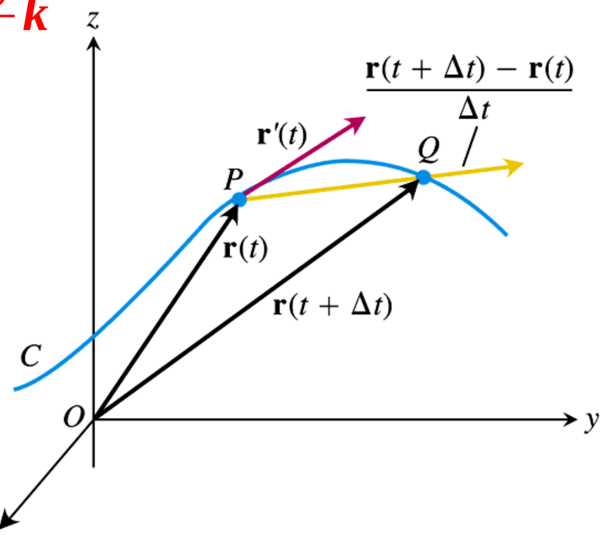
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\hat{k}$$

Własności pochodnej funkcji wektorowej:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b}$$



Przykłady funkcji wektorowych

Przykład: Prędkość i przyspieszenie:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

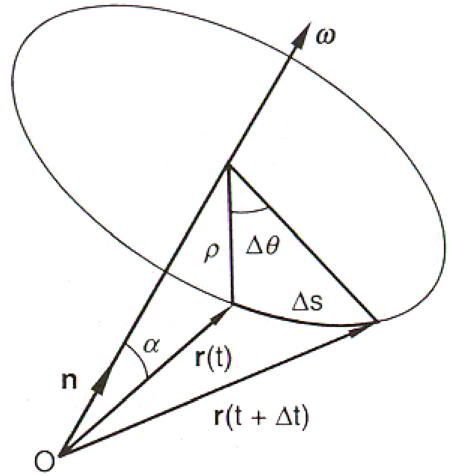
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Prędkość kątowa:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho\Delta\theta}{\Delta t} = \rho\omega$$



ponieważ $|\vec{n} \times \vec{r}| = r\sin\alpha = \rho \quad \Rightarrow \quad v = \rho\omega = |\vec{n} \times \vec{r}|\,\omega$

Definiując wektor prędkości kątowej jako $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$ otrzymujemy:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Przykład: Wektor pędu cząstki poruszającej się w polu centralnym $\left(\vec{F} \parallel \vec{r}\right)$ zawsze leży w ustalonej płaszczyźnie.

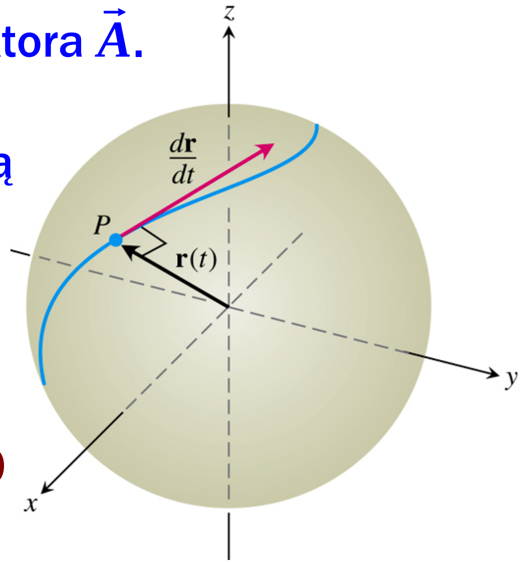
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const$$

Własności funkcji wektorowych

Uwaga: Relacja $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$ jest prawdziwa dla dowolnego wektora $\vec{A}$.

Twierdzenie: Niech $\vec{r}(t)$ będzie dowolną różniczkowalną funkcją wektorową o stałej długości, wówczas:

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$



Dowód:

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{d}{dt} r_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} = 2r \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Różniczkowanie w układzie nieinercjalnym

Rozważmy dwa układy odniesienia o wspólnym początku, z których jeden obraca się względem drugiego (do układu obracającego się stosujemy oznaczenie „prim”).

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{r} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' \qquad \vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' \equiv \frac{D\vec{r}}{Dt}$$

z drugiej strony mamy:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt} = \frac{D\vec{r}}{Dt} + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

Dla wektorów $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ zachodzą relacje: $\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{i}' \qquad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{j}' \qquad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{k}'$

a więc:

$$x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt} = x'\left(\vec{\omega}\times\hat{i}'\right) + y'\left(\vec{\omega}\times\hat{j}'\right) + z'\left(\vec{\omega}\times\hat{k}'\right) = \vec{\omega}\times\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'\right) = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Ostatecznie mamy:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad \text{czyli} \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{D\vec{r}}{Dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Różniczkowanie w układzie nieinercjalnym

Ostatnia relacja jest słuszna dla dowolnego wektora $\vec{A}$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{D\vec{A}}{Dt}+\vec{\omega}\times\vec{A}$$

gdzie

$$\frac{D\vec{A}}{Dt}=\frac{DA'_x}{Dt}\hat{i}'+\frac{DA'_y}{Dt}\hat{j}'+\frac{DA'_z}{Dt}\hat{k}'$$

$$\vec{\omega}\times\vec{A}=A'_x\frac{d\hat{i}'}{dt}+A'_y\frac{d\hat{j}'}{dt}+A'_z\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

<u>Przykład:</u> Pochodna czasowa prędkości kątowej jest taka sama w układzie nieruchomym jak i w układzie obracającym się:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{D\vec{\omega}}{Dt}+\vec{\omega}\times\vec{\omega}=\frac{D\vec{\omega}}{Dt}$$

Transformacja przyspieszenia:

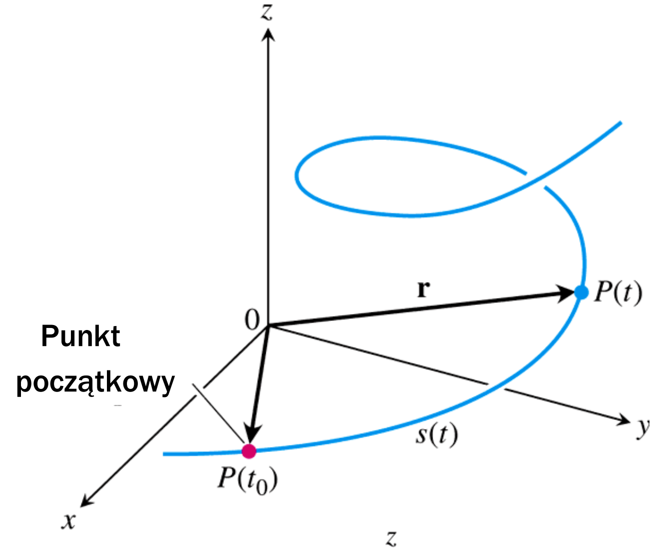
$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{D\vec{v}}{Dt}+\vec{\omega}\times\vec{v}=\frac{D}{Dt}\left(\frac{D\vec{r}}{Dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}\right)+\vec{\omega}\times\left(\frac{D\vec{r}}{Dt}+\vec{\omega}\times\vec{r}\right)=$$

$$=\frac{D^2\vec{r}}{Dt^2}+\frac{D\vec{\omega}}{Dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{D\vec{r}}{Dt}+\vec{\omega}\times\frac{D\vec{r}}{Dt}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{a}'+\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+2\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Długość łuku, parametryzacja naturalna

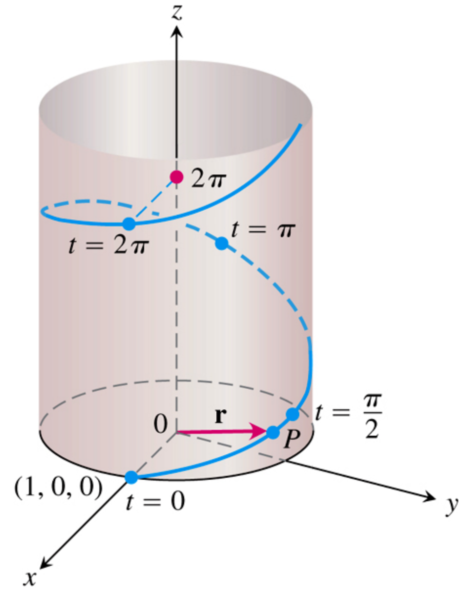
Długość łuku dla $t_1 < t < t_2$ obliczamy ze wzoru:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt$$



Definicja: Każdy łuk ma parametryzację naturalną.
Parametrem jest wtedy długość łuku liczona od pewnego ustalonego punktu początkowego:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |v(\tau)|\, d\tau$$



Przykład: Linia śrubowa: $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + t\hat{k}$

Długość linii dla $0 < t < 2\pi$:

$$L = \int_0^{2\pi} |v(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\; dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}$$

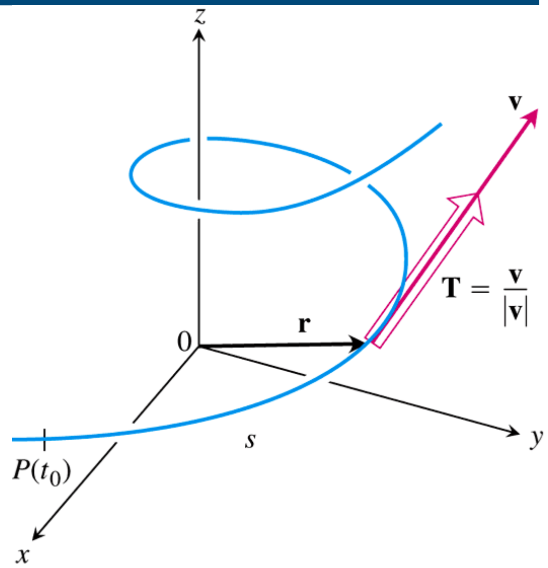
Parametryzacja naturalna:

$$s(t) = \int_0^{t} |v(\tau)|\, d\tau = \int_0^{t} \sqrt{2} d\tau = \sqrt{2}\; t$$

Krzywa gładka w przestrzeni

Jednostkowy wektor styczny do gładkiej krzywej $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}|\vec{v}| \quad\Rightarrow\quad \vec{T}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{d\vec{r}}{ds}$$



Ponieważ $\vec{T}$ jest wektorem jednostkowym więc podczas ruchu cząstki jego długość się nie zmienia, a więc jego pochodna jest do niego prostopadła:

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\kappa\vec{N}$$

κ - **krzywizna krzywej gładkiej**

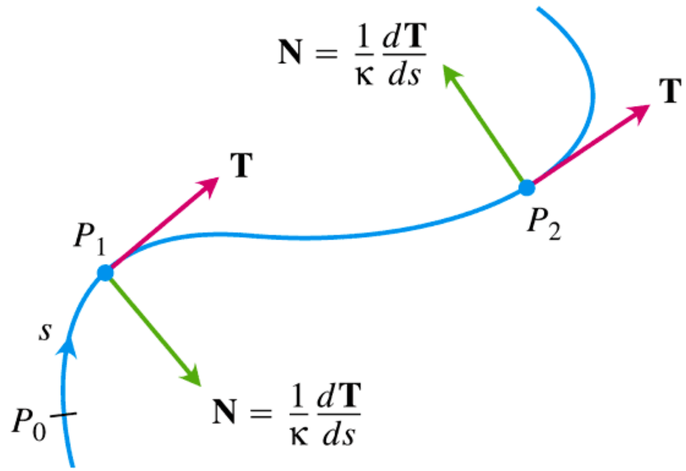
$\rho=1/\kappa$ - **promień krzywizny**

<u>Przykład:</u> Rozkład przyspieszenia cząstki na składowe:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(v\vec{T}\right)=\frac{dv}{dt}\vec{T}+v\frac{d\vec{T}}{dt}$$

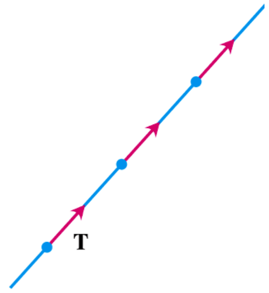
$$\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt}=v\kappa\vec{N}$$

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{T}+v^2\kappa\vec{N}=\frac{dv}{dt}\vec{T}+\frac{v^2}{\rho}\vec{N}$$



Krzywa gładka w przestrzeni

Przykład: Ruch cząstki po linii prostej: $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = 0$



Przykład: Ruch cząstki po okręgu: $v = \omega r$

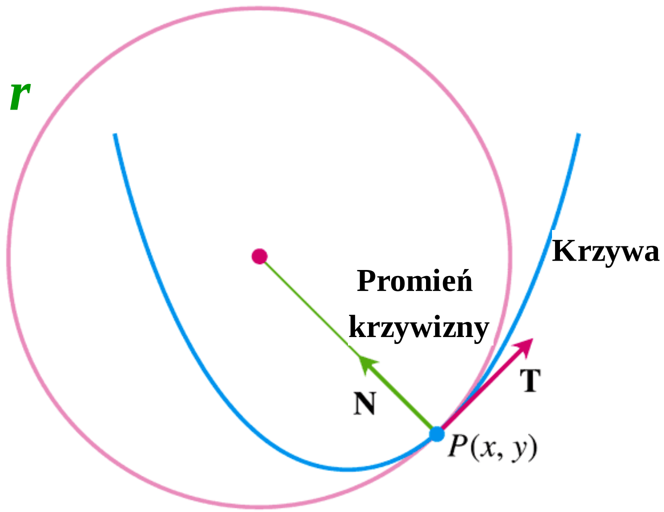
$$\vec{r}(t) = (r\cos\omega t)\,\hat{i} + (r\sin\omega t)\,\hat{j}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\omega r}\left(-r\omega\sin\omega t\ \hat{i} + r\omega\cos\omega t\ \hat{j}\right) = -\sin\omega t\ \hat{i} + \cos\omega t\ \hat{j}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{|\vec{v}|}\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{\omega r}\left(-\omega\cos\omega t\ \hat{i} - \omega\sin\omega t\ \hat{j}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = -\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{oraz} \quad \kappa = \frac{1}{r}, \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = r$$

Uwaga: W niewielkim obszarze zawsze można fragment łuku Δs przybliżyć za pomocą wycinka okręgu. Promień takiego okręgu nazywamy promieniem krzywizny krzywej w tym punkcie.

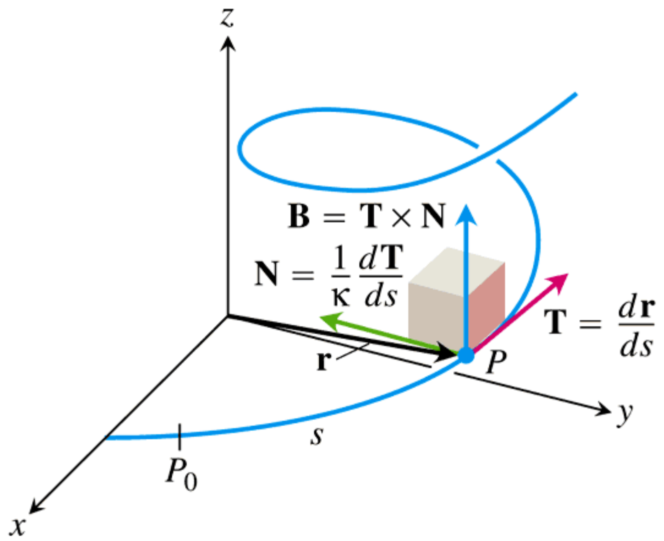


Wektor binormalny, torsja

Ruch cząstki nie musi być ograniczony do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{T}$ i $\vec{N}$.

<u>Definicja:</u> Wektorem binormalnym nazywamy wektor:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$



Wektory $\vec{T}$, $\vec{N}$ i $\vec{B}$ tworzą prawoskrętny układ odniesienia związany z poruszającą się cząstką.
Ponieważ wektory te tworzą bazę ortonormalną, więc:

$$0 = \frac{d}{ds}\left(\vec{B}\cdot\vec{T}\right) = \frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{T} + \vec{B}\cdot\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{T} + \underbrace{\vec{B}\cdot\kappa\vec{N}}_{=0}$$

Jednocześnie, ponieważ $\vec{B}$ jest wektorem jednostkowym, zachodzi $\left(d\vec{B}/ds\right)\cdot\vec{B} = 0$

A więc wektor $d\vec{B}/ds$ musi mieć kierunek wektora $\vec{N}$:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\gamma\vec{N}$$

γ - torsja, skręcenie, druga krzywizna

Pochodna wektora $\vec{N}$:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\vec{B}\times\vec{T}\right) = \frac{d\vec{B}}{ds}\times\vec{T} + \vec{B}\times\frac{d\vec{T}}{ds} = -\gamma\vec{N}\times\vec{T} + \vec{B}\times\kappa\vec{N} = \gamma\vec{B} - \kappa\vec{T}$$

Gładka krzywa w przestrzeni

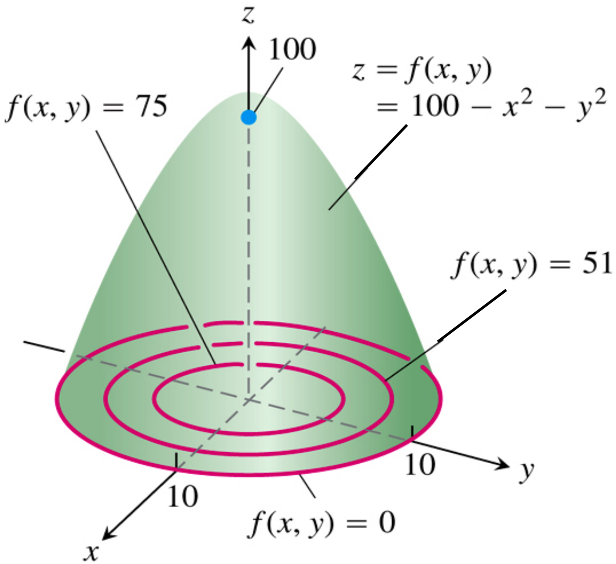
Formuły Frenet'a–Serret'a: $\boxed{\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa\vec{T} + \gamma\vec{B}, \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = \gamma\vec{N}}$

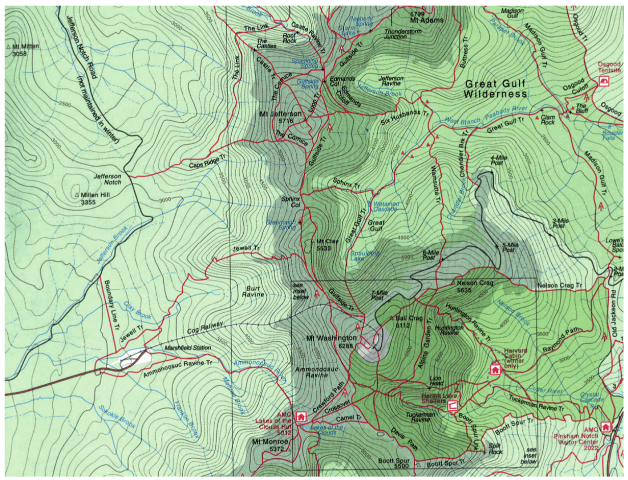
Przykład: Linia śrubowa: $\vec{r}(t) = (a\cos t)\hat{i} + (a\sin t)\hat{j} + bt\hat{k}$

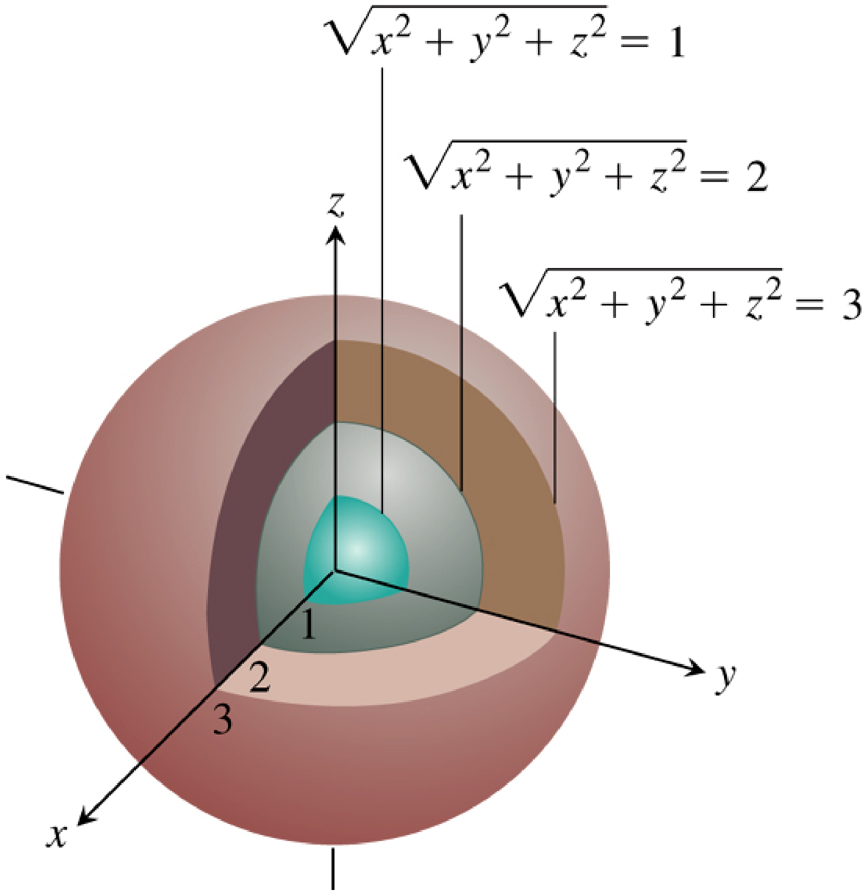
$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{a^2+b^2}{a} \qquad \gamma = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Funkcje wielowymiarowe

Wykres funkcji dwuwymiarowej:

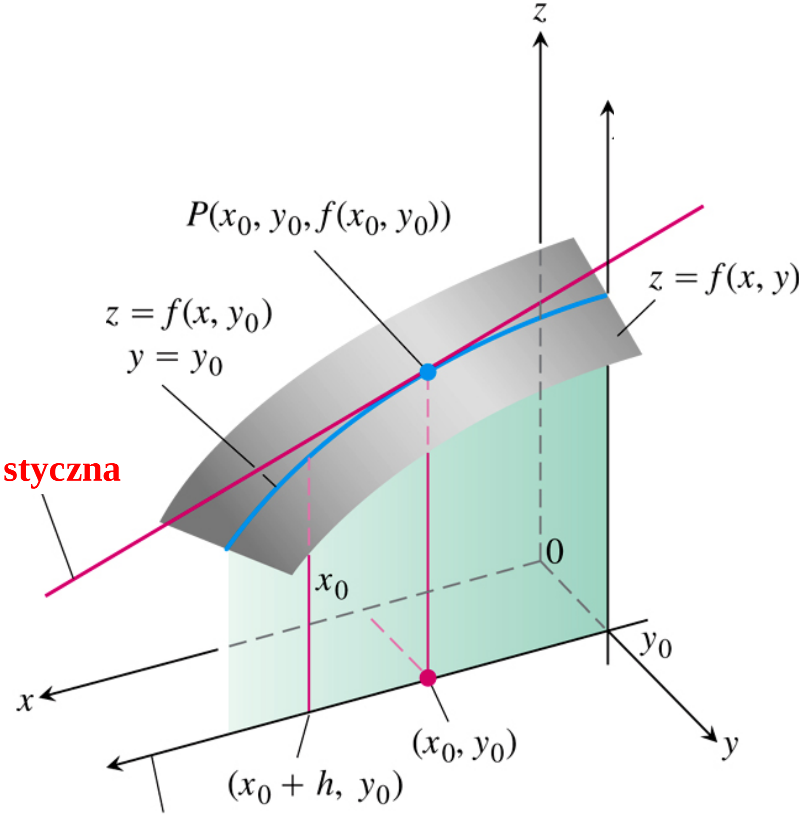


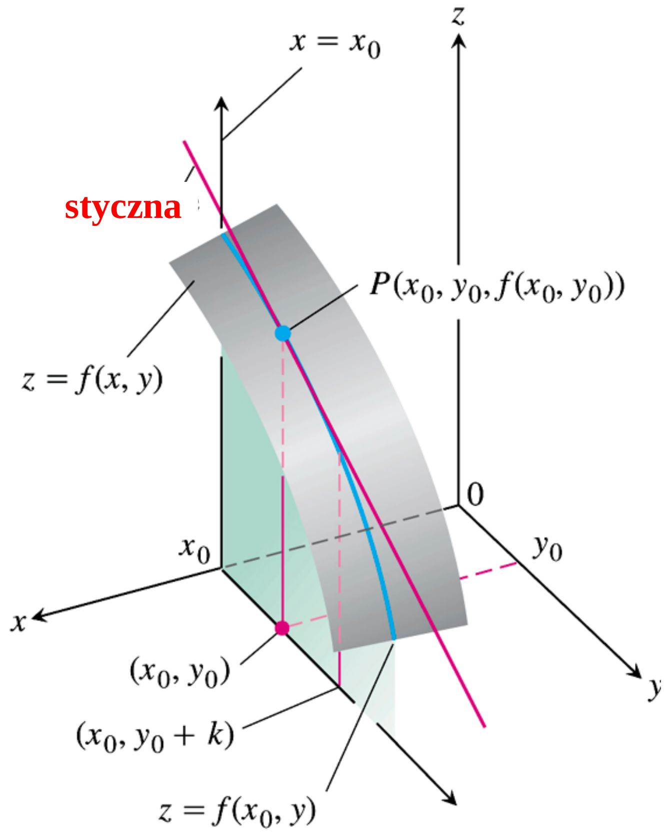




Wykresem poziomicowym funkcji wielowymiarowej nazywamy zbiór punktów takich, że $f(x,y,z,\ldots) = c$, gdzie c jest stałą.

Pochodne cząstkowe





Definicja: Pochodną cząstkową funkcji $f(x,y)$ względem zmiennej x (y) w punkcie (x_0, y_0) nazywamy:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Pochodne cząstkowe

Przykład: Obliczyć obie pochodne cząstkowe funkcji: $f(x,y)=\frac{2y}{y+\cos x}$

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)=\frac{0-2y(-\sin x)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}$$

$$f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)=\frac{2(y+\cos x)-2y}{(y+\cos x)^2}=\frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}$$

Jeśli funkcja $f(x,y)$ ma ciągłe obie pochodne cząstkowe oraz $x(t)$ i $y(t)$ są różniczkowalnymi funkcjami zmiennej t, to funkcja złożona $f(x(t),y(t))$ jest różniczkowlną funkcją zmiennej t oraz zachodzi:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Dla funkcji trzech zmiennych $f(x,y,z)$ z których każda zależy od dwóch innych $x,y,z(s,t)$ jeśli spełnione są podobne do powyższych warunki ciągłości i różniczkowalności mamy:

$$\frac{df}{ds}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \qquad \frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

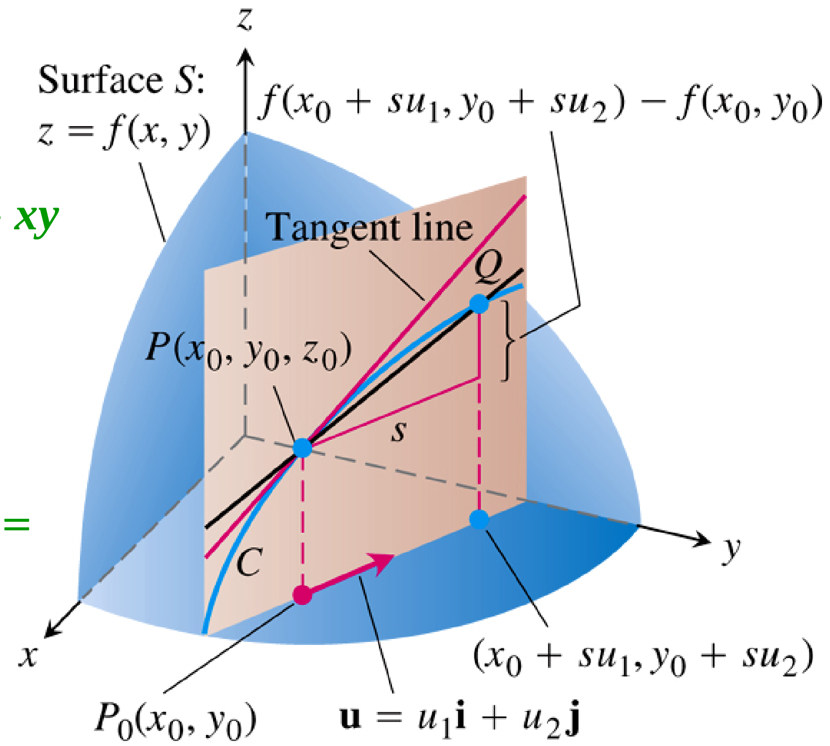
Pochodna kierunkowa

Równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0)$ i skierowanej wzdłuż jednostkowego wektora $\vec{u} = (u_1, u_2)$ mają postać:

$$x = x_0 + su_1 \qquad y = y_0 + su_2$$

Definicja: Pochodną funkcji $f(x, y)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ w kierunku jedn. wektora $\vec{u} = (u_1, u_2)$ nazywamy:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$



Przykład: Oblicz pochodną funkcji $f(x, y) = x^2 + xy$ w kierunku wektora $\vec{u} = (1/\sqrt{2})\hat{i} + (1/\sqrt{2})\hat{j}$ w punkcie $P_0(1, 2)$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0} = \lim_{s\to 0} \frac{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - 3}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\frac{5s}{\sqrt{2}} + s^2}{s} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} + s\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$