Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 12

Podprzestrzenie macierzowe

Twierdzenie: Dla dwóch macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ o tych samych wymiarach zachodzi:

a) $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T) = \mathcal{R}(\mathbf{B}^T) \Leftrightarrow \mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{B}$ b) $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \Leftrightarrow \mathbf{A} \overset{\text{kol}}{\sim} \mathbf{B}$

Dowód:

a) $\mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{B} \Rightarrow$ istnieje $\mathbf{P}$ taka że $\mathbf{PA} = \mathbf{B}$

$$\vec{\mathbf{a}} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}^T) \Leftrightarrow \exists \vec{\mathbf{y}} : \vec{\mathbf{a}}^T = \vec{\mathbf{y}}^T\mathbf{A} = \vec{\mathbf{y}}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PA} \overset{\vec{\mathbf{z}}^T \equiv \vec{\mathbf{y}}^T\mathbf{P}^{-1}}{\Leftrightarrow} \vec{\mathbf{a}}^T = \vec{\mathbf{z}}^T\mathbf{B} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}} \in \mathcal{R}(\mathbf{B}^T)$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}^T) = \mathcal{R}(\mathbf{B}^T) \Leftrightarrow span(\mathbf{A}_{1\bullet}, \mathbf{A}_{2\bullet}, ..., \mathbf{A}_{m\bullet}) = span(\mathbf{B}_{1\bullet}, \mathbf{B}_{2\bullet}, ..., \mathbf{B}_{m\bullet}) \Leftrightarrow \mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{B}$$

b) dowód przebiega analogicznie jak w (a) zastępując odpowiednio $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ przez $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T$.

Przykład: Czy następujące zbiory wektorów napinają tą samą podprzestrzeń $\mathcal{R}^n$:

$$\mathcal{A} = \left\{(1,2,2,3)^T, (2,4,1,3)^T, (3,6,1,4)^T\right\} \qquad \mathcal{B} = \left\{(0,0,1,1)^T, (1,2,3,4)^T\right\}$$

Konstruujemy macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, których wierszami są wektory ze zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_A \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_B$$

$span(\mathbf{A}) = span(\mathbf{B})$ ponieważ niezerowe wiersze w macierzach $\mathbf{E}_A$ i $\mathbf{E}_B$ są takie same.

Podprzestrzenie macierzowe

Twierdzenie: Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą o wymiarach $m \times n$, a $\mathbf{U}$ dowolną macierzą w postaci schodkowej otrzymaną z macierzy $\mathbf{A}$:

(a) niezerowe wiersze macierzy $\mathbf{U}$ napinają przestrzeń wierszową $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$,

(b) kolumny podstawowe w macierzy $\mathbf{A}$ napinają przestrzeń kolumnową $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

D: a) $\mathbf{A} \overset{\text{wiersz}}{\sim} \mathbf{U} \Rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{A}^T) = \mathcal{R}(\mathbf{U}^T)$

b) Niech $b_1, b_2, \ldots, b_r$ oraz $n_1, n_2, \ldots, n_t$ oznaczają odpowiednio podstawowe i niepodstawowe kolumny macierzy $\mathbf{A}$. Macierz $\mathbf{Q}_1$ niech będzie macierzą permutacji przestawiającą kolumny podstawowe na lewą stronę, tak że $\mathbf{A}\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{m\times r} & \mathbf{N}_{m\times t} \end{pmatrix}$

Kolumny niepodstawowe są liniowymi kombinacjami kolumn podstawowych i mogą być wyzerowane za pomocą operacji elementarnych na kolumnach macierzy $\mathbf{A}\mathbf{Q}_1$:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{m\times r} & \mathbf{N}_{m\times t} \end{pmatrix}\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \exists \mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 : \mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} \overset{\text{kol}}{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Przykład: Znajdź zbiory napinające przestrzenie $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ i $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$, jeśli:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{R}(\mathbf{A}) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{R}(\mathbf{A}^T) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Podprzestrzenie macierzowe

Definicja: Jądrem odwzorowania $f:\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ nazywamy zbiór $\mathcal{N}(f)=\{\vec{\mathbf{x}} \mid f(\vec{\mathbf{x}})=\vec{\mathbf{0}}\}$

Twierdzenie: $\mathcal{N}(f)$ jest podprzestrzenią $\mathcal{R}^n$.

D: $(\mathbf{A1}):\ \vec{\mathbf{x}}_1,\vec{\mathbf{x}}_2 \in \mathcal{N}(f) \Rightarrow f(\vec{\mathbf{x}}_1+\vec{\mathbf{x}}_2)=f(\vec{\mathbf{x}}_1)+f(\vec{\mathbf{x}}_2)=\vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \vec{\mathbf{x}}_1+\vec{\mathbf{x}}_2 \in \mathcal{N}(f)$

$(\mathbf{M1}):\ \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{N}(f)\ i\ \alpha \in \mathcal{R} \Rightarrow f(\alpha\vec{\mathbf{x}})=\alpha f(\vec{\mathbf{x}})=\vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \alpha\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{N}(f)$

Definicja: Przestrzenią zerową (jądrem) macierzy $\mathbf{A}_{m\times n}$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{N}(\mathbf{A})=\{\vec{\mathbf{x}}_{n\times 1} \mid \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}\}\subseteq \mathcal{R}^n$$

Definicja: Lewostronną przestrzenią zerową (lewostronnym jądrem) macierzy $\mathbf{A}_{m\times n}$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=\{\vec{\mathbf{y}}_{m\times 1} \mid \vec{\mathbf{y}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\vec{\mathbf{0}}\}\subseteq \mathcal{R}^m$$

Przykład: Znajdź zbiór napinający przestrzeń $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ gdzie $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}$

Poszukiwany zbiór to ogólne rozwiązanie równania $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}=\mathbf{0}$

$$\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathbf{E}_{\mathbf{A}} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_2-3x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\equiv x_2\vec{\mathbf{h}}_1+x_3\vec{\mathbf{h}}_2$$

A więc $\mathcal{N}(\mathbf{A})=span(\vec{\mathbf{h}}_1,\vec{\mathbf{h}}_2)$

Podprzestrzenie macierzowe

<u>Wniosek:</u> Aby znaleźć zbiór napinający przestrzeń $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ gdzie rz($\mathbf{A}_{m\times n}$) = r należy zredukować $\mathbf{A}$ do postaci schodkowej $\mathbf{U}$, a następnie rozwiązać równanie $\mathbf{U}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ wyrażając zmienne podstawowe przez zmienne wolne i znajdując w ten sposób ogólne rozwiązanie równania $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ w postaci $\vec{\mathbf{x}} = x_{f_1}\vec{\mathbf{h}}_1 + x_{f_2}\vec{\mathbf{h}}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}}\vec{\mathbf{h}}_{n-r}$

Zbiór wektorów $\mathcal{H} = \{\vec{\mathbf{h}}_1, \vec{\mathbf{h}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{h}}_{n-r}\}$ napina przestrzeń i jest niezależny od postaci schodkowej macierzy $\mathbf{U}$.

<u>Twierdzenie:</u> Jeśli rz($\mathbf{A}_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$) = r oraz $\mathbf{PA} = \mathbf{U}$, gdzie $\mathbf{P}$ jest macierzą nieosobliwą, a $\mathbf{U}$ jest macierzą w postaci schodkowej, wtedy ostatnie $m-r$ wierszy macierzy $\mathbf{P}$ napina lewostronną przestrzeń zerową macierzy $\mathbf{A}$. Tzn. jeśli $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}$ gdzie $\mathbf{P}_2$ ma wymiar $(m-r)\times m$ wtedy $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) = \mathcal{R}\left(\mathbf{P}_2^{\mathrm{T}}\right)$

Norma euklidesowa wektora

Definicja: Normą (euklidesową) wektora $\vec{\mathbf{x}}_{n\times 1}$ nazywamy liczbę:

$$\|\vec{\mathbf{x}}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{\vec{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{x}}} \quad \text{gdy} \quad \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^{n\times 1} \qquad\qquad \|\vec{\mathbf{x}}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\vec{\mathbf{x}}} \quad \text{gdy} \quad \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}^{n\times 1}$$

Definicja: Iloczynem skalarnym (standardowym) w przestrzeniach $\mathcal{R}^n$ i $\mathcal{C}^n$ nazywamy odpowiednio:

$$\vec{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathcal{R} \quad \text{oraz} \quad \vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\vec{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \in \mathcal{C}$$

Twierdzenie (nierówność Cauchy-Bunyatovskii-Schwarz (CBS): Dla dowolnych wektorów $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathcal{C}^n$ spełniony jest warunek $\left|\vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\vec{\mathbf{y}}\right| \le \|\vec{\mathbf{x}}\| \; \|\vec{\mathbf{y}}\|$
przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\vec{\mathbf{y}} = \alpha\vec{\mathbf{x}}$ dla $\alpha = \vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\vec{\mathbf{y}} / \vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\vec{\mathbf{x}}$.

Dowód: Niech $\alpha = \dfrac{\vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\vec{\mathbf{y}}}{\vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\vec{\mathbf{x}}} = \dfrac{\vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\vec{\mathbf{y}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}$

$$0 \le \|\alpha\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|^2 = \left(\alpha\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\right)^{\dagger}\left(\alpha\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\right) = \alpha^*\vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\left(\alpha\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\right) - \vec{\mathbf{y}}^{\dagger}\left(\alpha\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\right) = -\vec{\mathbf{y}}^{\dagger}\left(\alpha\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\right) =$$

$$= \vec{\mathbf{y}}^{\dagger}\vec{\mathbf{y}} - \alpha\vec{\mathbf{y}}^{\dagger}\vec{\mathbf{x}} = \frac{\|\vec{\mathbf{y}}\|^2\,\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 - \left(\vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\vec{\mathbf{y}}\right)\left(\vec{\mathbf{y}}^{\dagger}\vec{\mathbf{x}}\right)}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2} = \frac{\|\vec{\mathbf{y}}\|^2\,\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 - \left|\vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\vec{\mathbf{y}}\right|^2}{\|\vec{\mathbf{x}}\|^2} \quad \overset{0<\|\vec{\mathbf{x}}\|^2}{\Rightarrow} \quad \left|\vec{\mathbf{x}}^{\dagger}\vec{\mathbf{y}}\right| \le \|\vec{\mathbf{x}}\| \; \|\vec{\mathbf{y}}\|$$

Nierówność trójkąta

Twierdzenie (nierówność trójkąta): Dla dowolnych wektorów $\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}} \in C^n$ zachodzi:

$$\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\| \le \|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|$$

Dowód: $\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\|^2 = (\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}})^\dagger(\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}) = \vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{y}}^\dagger\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}^\dagger\vec{\mathbf{y}} = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{y}}^\dagger\vec{\mathbf{x}} + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2$

$$\vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{y}}^\dagger\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{y}} + \left(\vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{y}}\right)^* = 2\,\mathrm{Re}\left(\vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{y}}\right) \le 2\left|\vec{\mathbf{x}}^\dagger\vec{\mathbf{y}}\right| \le 2\|\vec{\mathbf{x}}\|\;\|\vec{\mathbf{y}}\|$$

$$\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\|^2 \le \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + 2\|\vec{\mathbf{x}}\|\;\|\vec{\mathbf{y}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2 = \left(\|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|\right)^2$$

Nierówność trójkąta można rozszerzyć na dowolną liczbę wektorów: $\left\|\sum_{i=1}^{n}\vec{\mathbf{x}}_i\right\| \le \sum_{i=1}^{n}\|\vec{\mathbf{x}}_i\|$

Nierówność trójkąta spełniona jest także dla liczb (rzeczywistych lub zespolonych):

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$$

Z nierówności trójkąta wynika dolne ograniczenie na normę różnicy wektorów:

$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}+\vec{\mathbf{y}}\| \le \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\| \;\Rightarrow\; \|\vec{\mathbf{x}}\| - \|\vec{\mathbf{y}}\| \le \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}\| \\ \|\vec{\mathbf{y}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}-\vec{\mathbf{x}}\| \le \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}\| + \|\vec{\mathbf{x}}\| \;\Rightarrow\; -\left(\|\vec{\mathbf{x}}\| - \|\vec{\mathbf{y}}\|\right) \le \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}\| \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\|\vec{\mathbf{x}}\| - \|\vec{\mathbf{y}}\|\right| \le \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}\|$$

p-norma

Definicja: p-normą wektora $\vec{\mathbf{x}} \in C^n$ gdzie p ≥ 1 nazywamy $\|\vec{\mathbf{x}}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

Własności:

- $\|\vec{\mathbf{x}}\|_p \geq 0$ oraz $\|\vec{\mathbf{x}}\|_p = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$
- $\|\alpha\vec{\mathbf{x}}\|_p = |\alpha|\,\|\vec{\mathbf{x}}\|_p$ dla każdego $\alpha \in C$
- $\|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\|_p \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|_p + \|\vec{\mathbf{y}}\|_p$
- $|\vec{\mathbf{x}}^\dagger \vec{\mathbf{y}}| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|_p \|\vec{\mathbf{y}}\|_q$ gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

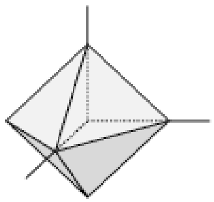
p-normy stosowane w praktyce:

- $\|\vec{\mathbf{x}}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|\vec{\mathbf{x}}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$
- $\|\vec{\mathbf{x}}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\vec{\mathbf{x}}\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \max_i |x_i|$

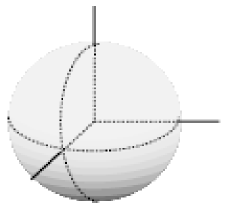
Przykład: Niech $\vec{\mathbf{x}} = (3, 4-3i, 1)$ wtedy $\|\vec{\mathbf{x}}\|_1 = 9$ $\|\vec{\mathbf{x}}\|_2 = \sqrt{35}$ $\|\vec{\mathbf{x}}\|_\infty = 5$

Przykład: Czym są w w przestrzeni $\mathcal{R}^3$ tzw. p-sfery $\mathcal{S}_p = \{\vec{\mathbf{x}} \mid \|\vec{\mathbf{x}}\|_p = 1\}$ dla p = 1, 2, ∞ ?

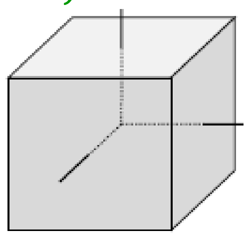
$\mathcal{S}_1$



$\mathcal{S}_2$



$\mathcal{S}_\infty$



Widać, że w $\mathcal{R}^3$ zachodzi $\|\vec{\mathbf{x}}\|_1 \geq \|\vec{\mathbf{x}}\|_2 \geq \|\vec{\mathbf{x}}\|_\infty$

Pojęcie normy w przestrzeni wektorowej

Definicja: Normą określoną na rzeczywistej lub zespolonej przestrzeni wektorowej $\mathcal{V}$ nazywamy funkcję $\|*\|$ odwzorowującą $\mathcal{V}$ w $\mathcal{R}$, która spełnia następujące warunki:

- $\|\vec{\mathbf{x}}\| \geq 0$ oraz $\|\vec{\mathbf{x}}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$
- $\|\alpha\vec{\mathbf{x}}\| = |\alpha|\,\|\vec{\mathbf{x}}\|$ dla każdego $\alpha \in \mathcal{C}$
- $\|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|$

Definicja: Normą (Frobeniusa) macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{m\times n}$ nazywamy liczbę określoną przez:

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i \|\mathbf{A}_{i\bullet}\|_2^2 = \sum_j \|\mathbf{A}_{\bullet j}\|_2^2 = \mathbf{Tr}\left(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}\right)$$

Jaki warunek powinna spełniać ogólna norma iloczynu macierzy?

$$\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|_2^2 = \sum_i |\mathbf{A}_{i\bullet}\vec{\mathbf{x}}|^2 \leq \sum_i \|\mathbf{A}_{i\bullet}\|_2^2 \,\|\vec{\mathbf{x}}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2 \,\|\vec{\mathbf{x}}\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F \,\|\vec{\mathbf{x}}\|_2$$

Mówimy, że normy: Frobeniusa macierzy $\|*\|_F$ i euklidesowa wektora $\|*\|_2$ są zgodne.

$$\|\mathbf{AB}\|_F^2 = \sum_j \|[\mathbf{AB}]_{\bullet j}\|_2^2 = \sum_j \|\mathbf{A}\mathbf{B}_{\bullet j}\|_2^2 \leq \sum_j \|\mathbf{A}\|_F^2 \,\|\mathbf{B}_{\bullet j}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2 \sum_j \|\mathbf{B}_{\bullet j}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2 \,\|\mathbf{B}\|_F^2$$

$$\Rightarrow \quad \|\mathbf{AB}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F \,\|\mathbf{B}\|_F$$

Norma macierzy

Definicja: **Normą macierzy** nazywamy funkcję $\|*\|$ odwzorowującą zbiór wszystkich macierzy zespolonych (o skończonych wymiarach) w $\mathcal{R}$, która spełnia następujące warunki:

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ oraz $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0$
- $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{A}\|$ dla każdego $\alpha \in \mathcal{C}$
- $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$
- $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\;\|\mathbf{B}\|$

Każda norma zdefiniowana dla wektora z $\mathcal{C}^p$, $p = m, n$ indukuje odpowiednią normę macierzy z $\mathcal{C}^{m\times n}$

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\vec{\mathbf{x}}\|=1} \|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\| \quad \text{dla} \quad \mathbf{A} \in \mathcal{C}^{m\times n}, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}^{n\times 1}$$

- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ oraz $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0$
- $\|\alpha\mathbf{A}\| = \max\|\alpha\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\| = |\alpha| \max\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\| = |\alpha|\;\|\mathbf{A}\|$
- $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| = \max\left(\|(\mathbf{A}+\mathbf{B})\vec{\mathbf{x}}\|\right) = \max\left(\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}+\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}\|\right) \leq \max\left(\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|+\|\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}\|\right) \leq$

  $\leq \max\left(\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|\right) + \max\left(\|\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}\|\right) = \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$
- $\|\mathbf{AB}\| = \max\limits_{\|\vec{\mathbf{x}}\|=1}\left(\|(\mathbf{AB})\vec{\mathbf{x}}\|\right) = \max\limits_{\|\vec{\mathbf{x}}\|=1}\left(\|\mathbf{A}(\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}})\|\right) \leq \max\limits_{\|\vec{\mathbf{x}}\|=1}\left(\dfrac{\|\mathbf{A}(\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}})\|}{\|\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}\|}\|\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}\|\right) \leq$

  $\leq \max\limits_{\|\vec{\mathbf{x}}\|=1}\left(\dfrac{\|\mathbf{A}(\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}})\|}{\|\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}\|}\right)\max\limits_{\|\vec{\mathbf{x}}\|=1}\left(\|\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}\|\right) = \max\limits_{\|\vec{\mathbf{y}}\|=1}\left(\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{y}}\|\right)\max\limits_{\|\vec{\mathbf{x}}\|=1}\left(\|\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}\|\right) = \|\mathbf{A}\|\;\|\mathbf{B}\|$

Normy indukowane macierzy

- 1-norma (największa suma modułów elementów kolumn) $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\limits_{\|\vec{\mathbf{x}}\|_1=1}\left(\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|_1\right) = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$

$$\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|_1 = \sum_i |\mathbf{A}_{i\bullet}\vec{\mathbf{x}}| = \sum_i \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \le \sum_{i,j} |a_{ij}||x_j| = \sum_j \left(|x_j|\sum_i |a_{ij}|\right) \le$$

$$\le \left(\sum_j |x_j|\right)\left(\max_j \sum_i |a_{ij}|\right) = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

Niech $\mathbf{A}_{\bullet k}$ będzie kolumną o największej sumie modułów elementów. Wybierając $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_k$ dostajemy $\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{e}}_k\|_1 = \|\mathbf{A}_{\bullet k}\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$. A więc zachodzi równość.

- ∞-norma (największa spośród sum modułów elementów wierszy)

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{\|\vec{\mathbf{x}}\|_\infty=1}\left(\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|_\infty\right) = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|_\infty = \max_i \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \le \max_i \sum_j |a_{ij}||x_j| \le \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Niech $\mathbf{A}_{k\bullet}$ będzie wierszem o największej sumie modułów elementów.

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{dla } a_{kj} \ge 0 \\ -1 & \text{dla } a_{kj} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{A}_{i\bullet}\vec{\mathbf{x}}| = \left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \le \sum_j |a_{ij}| \\ |\mathbf{A}_{k\bullet}\vec{\mathbf{x}}| = \sum_j |a_{kj}| = \max_i \sum_j |a_{ij}| \end{cases}$$

Normy indukowane macierzy

- 2-norma (tzw. norma spektralna, indukowana przez normę euklidesową)

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\|\vec{\mathbf{x}}\|_2=1}\left(\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|_2\right) = \sqrt{\lambda_{\max}}$$

Jeśli $\mathbf{A}$ jest macierzą nieosobliwą, wówczas mamy $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\min\limits_{\|\vec{\mathbf{x}}\|_2=1}\left(\|\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}\|_2\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}}$

$\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ to odpowiednio największa i najmniejsza wartość własna macierzy $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}$.

<u>Przykład:</u> Znajdź normy indukowane $\|\mathbf{A}\|_1, \|\mathbf{A}\|_2$ oraz $\|\mathbf{A}\|_\infty$ macierzy $\mathbf{A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \sqrt{8} \end{pmatrix}$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \simeq 2.21 \qquad \|\mathbf{A}\|_\infty = \frac{4}{\sqrt{3}} \simeq 2.31 \qquad \|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)} = \sqrt{6} \simeq 2.45$$

$$\det\left(\mathbf{A}^{\dagger}A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\min} = 2 \text{ oraz } \lambda_{\max} = 4$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} = 2$$

<u>Uwaga:</u> Uwaga dla macierzy kwadratowych stopnia n zachodzi $\|\mathbf{A}\|_i = \alpha\|\mathbf{A}\|_j$ gdzie α to element (i,j) macierzy:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & \infty & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \infty \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} * & \sqrt{n} & n & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & * & \sqrt{n} & 1 \\ n & \sqrt{n} & * & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & \sqrt{n} & \sqrt{n} & * \end{pmatrix} \end{array}$$