Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 12

Pochodna kierunkowa i gradient

Równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0)$ i skierowanej wzdłuż jednostkowego wektora $\vec{u} = (u_1, u_2)$ mają postać:

$$x = x_0 + su_1 \qquad y = y_0 + su_2$$

Obliczamy pochodną kierunkową

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\frac{dx}{ds} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\frac{dy}{ds} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} u_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} u_2 = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\hat{i} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\hat{j}\right)\cdot\left(u_1\hat{i} + u_2\hat{j}\right) \equiv \left(\nabla f\right)_{P_0}\cdot\vec{u}$$

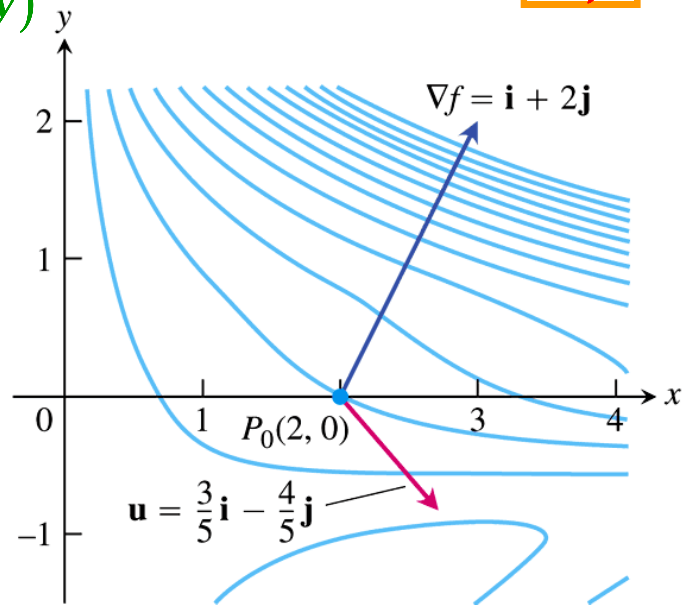
Przykład: Oblicz pochodną funkcji $f(x, y) = x\,e^y + \cos(xy)$ w kierunku wektora $\vec{v} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ w punkcie $P_0(2, 0)$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j}$$

$$\nabla f\big|_{P_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\hat{i} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\hat{j} =$$

$$= \left(e^y - y\sin xy\right)\Big|_{P_0}\hat{i} + \left(xe^y - x\sin xy\right)\Big|_{P_0}\hat{j} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = \left(\nabla f\right)_{P_0}\cdot\vec{u} = \left(\hat{i} + 2\hat{j}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j}\right) = -1$$



Gradient

Definicja: Gradientem funkcji skalarnej $f(x,y,z)$ w punkcie P_0 nazywamy wektor:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

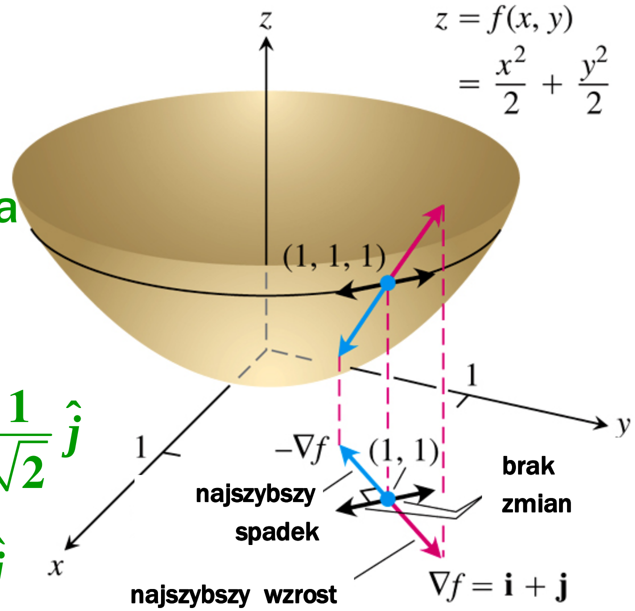
gdzie pochodne cząstkowe funkcji f obliczone są w punkcie P_0.

Gradient jako operator

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Własności: $D_{\vec{u}} f = (\nabla f)\cdot\vec{u} = |\nabla f|\cos\vartheta$

- funkcja f rośnie najszybciej w kierunku ∇f
- funkcja f rośnie najszybciej w kierunku $-\nabla f$
- funkcja f nie zmienia się w każdym kierunku prostopadłym do $\nabla f \neq 0$



Przykład: Znajdź kierunki w punkcie (1,1) w których funkcja

$$f(x,y) = x^2/2 + y^2/2$$

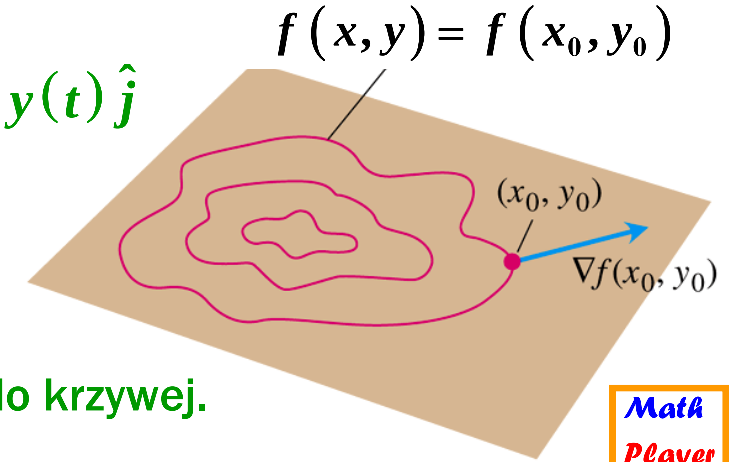
najszybciej rośnie, maleje oraz w których nie zmienia się.

Max wzrost: $(\nabla f)_{(1,1)} = \left(x\hat{i} + y\hat{j}\right)_{(1,1)} = \hat{i} + \hat{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$

Brak zmian: $\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$ oraz $-\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$

Gradient - przykłady

<u>Przykład:</u> Na mapach topograficznych strumienie płyną w kierunkach prostopadłych do poziomic.



Niech $f(x(t), y(t)) = c$ dla $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}\right) = 0$$

$\nabla f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$ a więc wektor ∇f jest prostopadły do krzywej.

Math Player

<u>Przykład:</u> Równanie stycznej do elipsy.

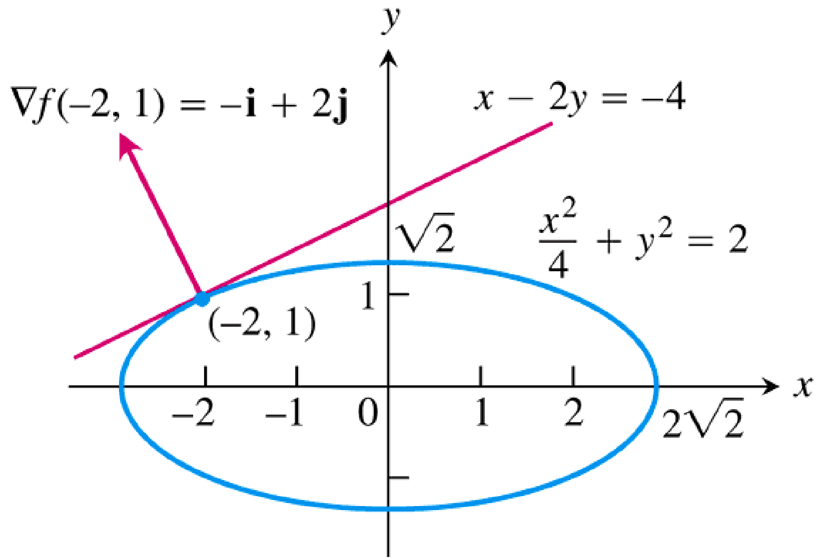
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2 \qquad P_0(-2,1)$$

Wektor prostopadły do elipsy

$$\nabla f\big|_{P_0} = \left(\frac{x}{2}\hat{i} + 2y\hat{j}\right)\Bigg|_{(-2,1)} = -\hat{i} + 2\hat{j}$$

Równanie stycznej

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2y = -4$$



Gradient - przykłady

Uwaga: W przestrzeni $\mathcal{R}^3$ równania płaszczyzny stycznej do powierzchni $f(x,y,z)=c$ w punkcie $P_0(x_0,y_0,z_0)$ oraz prostej do niej prostopadłej mają odpowiednio postać:

$$(\nabla f)\big|_{P_0}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0 \quad \text{oraz} \quad \vec{r}(t)=\vec{r}_0+(\nabla f)\big|_{P_0}\,t$$

Przykład: Znajdź płaszczyznę styczną do dane powierzchni w punkcie $P_0(1,-1,2)$

$$f(x,y,z)=2xz^2-3xy-4x=7$$

Znajdujemy wektor prostopadły do dane powierzchni w punkcie P_0:

$$(\nabla f)\big|_{P_0}=\left[(2z^2-3y-4)\hat{i}-3x\hat{j}-4xz\hat{k}\right]_{(1,-1,2)}=7\hat{i}-3\hat{j}+8\hat{k}$$

Równanie płaszczyzny styczne ma więc postać:

$$(\nabla f)\big|_{P_0}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=(7\hat{i}-3\hat{j}+8\hat{k})\cdot\left[(x-1)\hat{i}+(y+1)\hat{j}+(z-2)\hat{k}\right]=0 \;\Rightarrow\; 7x-3y+8z=0$$

Twierdzenie: Dany jest wektor położenia $\vec{r}$. Wtedy $\nabla r=\hat{r}$ oraz $\nabla f(r)=\hat{r}(df/dr)$

Dowód:

$$r=|\vec{r}|=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$\nabla r=\nabla(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=\frac{x}{r}\hat{i}+\frac{y}{r}\hat{j}+\frac{z}{r}\hat{k}=\frac{\vec{r}}{r}=\hat{r}$$

$$\nabla f(r)=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}$$

Całka liniowa i gradient

Dla dowolnego pola wektorowego $\vec{A}(x,y,z)$, całką liniową nazywamy całkę postaci:

$$\int_{a,\Gamma}^{b} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{a,\Gamma}^{b} \left(A_x dx + A_y dy + A_z dz\right) \qquad d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz$$

<u>Przykład:</u> Praca wykonana przez siłę: $W_{a\to b} = \int_{a,\Gamma}^{b} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

W ogólności wartość całki zależy od konkretnej drogi pomiędzy punktami a i b.

Całka liniowa nie zależy od drogi jedynie w przypadku gdy istnieje funkcja skalarna φ taka, że $\vec{A} = \nabla\varphi$. Wtedy mamy

$$\int_{a,\Gamma}^{b} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{a,\Gamma}^{b} \nabla\varphi\cdot d\vec{r} = \int_{a}^{b} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = \int_{a}^{b} d\varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Pole które posiada powyższą własność nazywamy polem zachowawczym. W szczególności dla pól zachowawczych całka po dowolnej krzywej zamkniętej jest równa zero:

$$\oint \nabla\varphi\cdot d\vec{r} = 0$$

Słuszne jest również twierdzenie odwrotne, tzn. jeśli $\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0$, to pole $\vec{A}$ jest polem zachowawczym oraz istnieje funkcja skalarna φ taka że $\vec{A} = \nabla\varphi$

Całki liniowe - przykłady

Przykład: Praca wykonana przez siłę $\vec{F} = 6xy\hat{i} + \left(3x^2 - 3y^2\right)\hat{j}$ wzdłuż krzywej $y = x^2 - x$ pomiędzy punktami (0,0) i (2,2).

$$W = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \left(6xy\hat{i} + \left(3x^2 - 3y^2\right)\hat{j}\right)\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \left[6xy\,dx + \left(3x^2 - 3y^2\right)dy\right]$$

Metoda I: Zmiana zmiennych $y = x^2 - x \quad \Rightarrow \quad dy = (2x-1)dx$

$$W = \int_\Gamma \left[6xy\,dx + \left(3x^2 - 3y^2\right)dy\right] = \int_0^2 \left\{6x\left(x^2 - x\right) + \left[3x^2 - 3\left(x^2 - x\right)^2\right](2x-1)\right\}dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-6x^5 + 15x^4 - 6x^2\right)dx = 16$$

Metoda II: Krzywa opisana jest przez wektor położenia $\vec{r}(t) = t\hat{i} + \left(t^2 - t\right)\hat{j}$

$$\vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r} = \vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt$$

$$W = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 \left\{6t\left(t^2 - t\right) + \left[3t^2 - 3\left(t^2 - t\right)^2\right](2t-1)\right\}dt = 16$$

$$\boxed{1\ \text{eV} = 1.602\cdot 10^{-19}\ \text{J} \quad \Rightarrow \quad 16\ \text{J} = 9.98\cdot 10^{10}\ \text{GeV}}$$

Pola zachowawcze

<u>Twierdzenie:</u> Pole $\vec{F} = F_x(x,y,z)\hat{i} + F_y(x,y,z)\hat{j} + F_z(x,y,z)\hat{k}$ jest zachowawcze wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są warunki

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Dowód: Jeśli pole jest zachowawcze to istnieje funkcja (potencjał) φ taka, że

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{k}$$

w takim razie mamy np.:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

<u>Przykład:</u> Znajdziemy potencjał dla pola $\vec{F} = 6xy\hat{i} + \left(3x^2 - 3y^2\right)\hat{j}$

Pole jest zachowawcze ponieważ spełniony jest warunek: $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 6x = \frac{\partial F_x}{\partial y}$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{j} = 6xy\hat{i} + 3\left(x^2 - y^2\right)\hat{j} = \vec{F}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 6xy \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 3x^2 y + f(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3x^2 + \frac{df}{dy} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 3x^2 y - y^3 + k$$

$$W = \varphi(2,2) - \varphi(0,0) = 16$$