Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 13

Dywergencja

Definicja: Dywergencją nazywamy działanie operatora ∇ na pole wektorowe $\vec{A}(x,y,z)$ poprzez iloczyn skalarny:

$$\operatorname{div}\vec{A} \equiv \nabla\cdot\vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Przykład:

- $\nabla\cdot\vec{r} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$
- $\nabla\cdot\vec{r}f(r) = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(xf(r)\hat{i} + yf(r)\hat{j} + zf(r)\hat{k}\right) =$

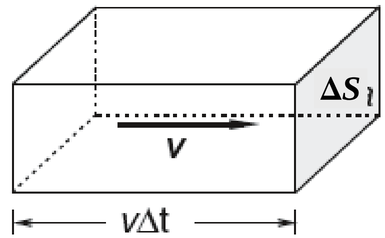
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(xf(r)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(yf(r)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(zf(r)\right) = 3f(r) + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$= 3f(r) + x\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = 3f(r) + \frac{x^2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{y^2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{z^2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} =$$

$$= 3f(r) + r\frac{\partial f}{\partial r}$$

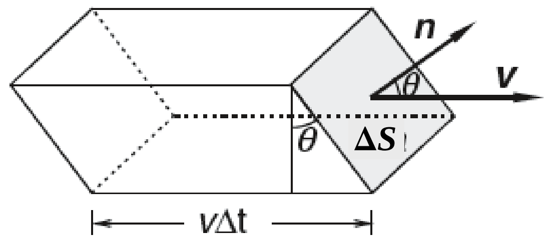
Strumień pola wektorowego

Rozważamy przepływ płynu. Jaka masa płynu przepływa w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni?



- Powierzchnia prostopadła do prędkości:

  Szybkosc przeplywu przez powierzchnie $\Delta S = \rho v \Delta S$



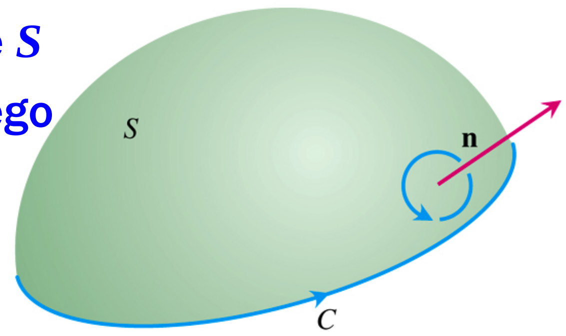
- Powierzchnia nachylona pod kątem θ do prędkości:

  Szybkosc przeplywu przez powierzchnie $\Delta S =$

  $= \rho v \cos\theta \Delta S = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \Delta S$

- Dowolna powierzchnia:

  Szybkosc przeplywu przez powierzchnie $S = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$



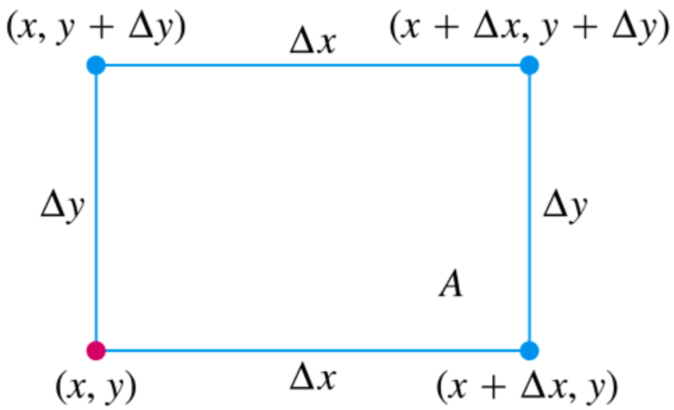
Definicja: Strumień pola wektorowego $\vec{A}$ przez powierzchnię S nazywamy całkę powierzchniową ze składowej normalnej tego pola do tej powierzchni:

$$\Psi = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Dywergencja - interpretacja

Rozważmy pole prędkości płynu na płaszczyźnie

$$\vec{F} = F_x(x,y)\,\hat{i} + F_y(x,y)\,\hat{j}$$



Obliczymy szybkość wypływu płynu z obszaru przedstawionego na rysunku:

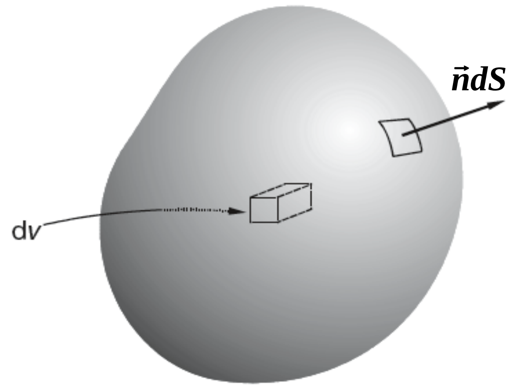
Góra: $\vec{F}(x, y+\Delta y)\cdot\hat{j}\,\Delta x = F_y(x, y+\Delta y)\,\Delta x$

Dól: $\vec{F}(x,y)\cdot(-\hat{j})\,\Delta x = -F_y(x,y)\,\Delta x$

Prawo: $\vec{F}(x+\Delta x, y)\cdot\hat{i}\,\Delta y = F_x(x+\Delta x, y)\,\Delta y$

Lewo: $\vec{F}(x,y)\cdot(-\hat{i})\,\Delta y = -F_x(x,y)\,\Delta y$

strumień przez caly prostokąt $\approx \left(\dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$



<u>Twierdzenie Gauss'a:</u> Strumień pola wektorowego przez zamkniętą powierzchnię S jest równy całce z dywergencji pola po objętości ograniczonej tą powierzchnią:

$$\oiint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV$$

Twierdzenie Gaussa - przykład

Przykład: Sprawdzenie twierdzenia Gauss'a dla $\vec{A} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\vec{k}$ i objętości ograniczonej powierzchnią cylindra $x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \le z \le 4.$

Całka objętościowa: $\iiint_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV = \left\| \nabla \cdot \vec{r} = 3 \right\| = 3\iiint_V dV = 48\pi$

Całka powierzchniowa:

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\text{góra}} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{\text{dól}} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{\text{bok}} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS =$$

$$= \iint_{\text{góra}} \left(x\hat{i} + y\hat{j} + 4\vec{k} \right) \cdot \vec{k}\, dS + \iint_{\text{dól}} \left(x\hat{i} + y\hat{j} + 0\vec{k} \right) \cdot \left(-\vec{k} \right)\, dS + \iint_{\text{bok}} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS$$

Ponieważ powierzchnia boczna walca opisana jest przez $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 = 4$

$$\vec{n} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} = \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{2}$$

$$\iint_{\text{bok}} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\text{bok}} \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\vec{k} \right) \cdot \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{2} dS = 2\iint_{\text{bok}} dS = 32\pi$$

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS = 16\pi + 0\pi + 32\pi = 48\pi$$

Rotacja

Definicja: Rotacją nazywamy działanie operatora ∇ na pole wektorowe $\vec{A}(x,y,z)$ poprzez iloczyn wektorowy:

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} \equiv \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Przykład:

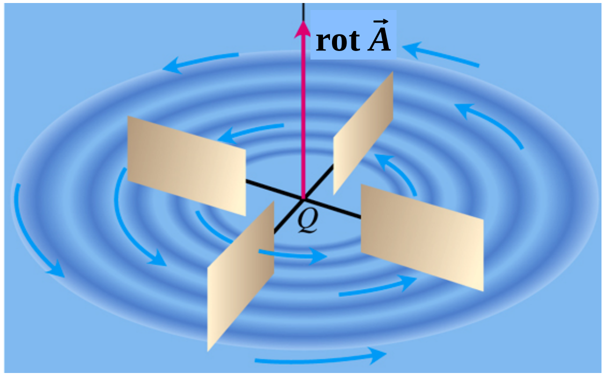
- $$\nabla\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$
- $$\nabla\times\vec{r}f(r) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix} = 0$$

Przykład: Znaleźć rotację i dywergencję pola wektorowego $\vec{A} = -y\hat{i} + x\hat{j}$

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{k}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(-y\hat{i} + x\hat{j} + 0\hat{k}\right) = 0$$

Math Player

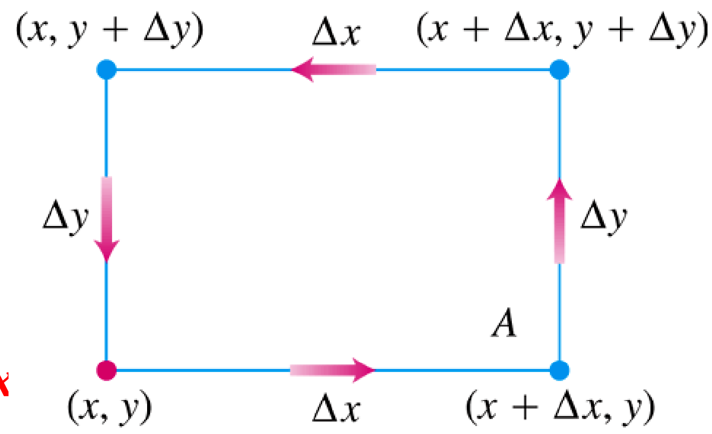


Rotacja - interpretacja

Rozważmy pole prędkości płynu na płaszczyźnie

$$\vec{F} = F_x(x,y)\,\hat{i} + F_y(x,y)\,\hat{j}$$

Obliczymy cyrkulację płynu wzdłuż brzegu obszaru przedstawionego na rysunku:



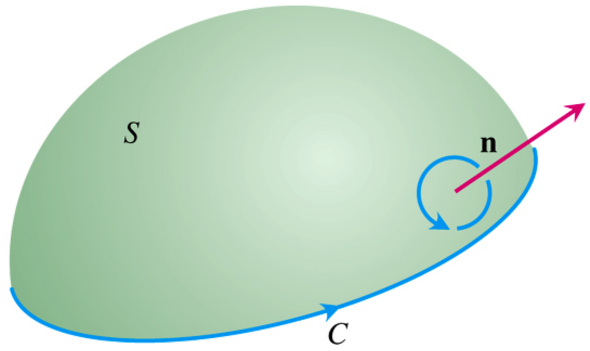
Góra: $\vec{F}(x, y+\Delta y)\cdot(-\hat{i})\,\Delta x = -F_x(x, y+\Delta y)\,\Delta x$

Dól: $\vec{F}(x,y)\cdot\hat{i}\,\Delta x = F_x(x,y)\,\Delta x$

Prawo: $\vec{F}(x+\Delta x, y)\cdot\hat{j}\,\Delta y = F_y(x+\Delta x, y)\,\Delta y$

Lewo: $\vec{F}(x,y)\cdot(-\hat{j})\,\Delta y = -F_y(x,y)\,\Delta y$

cyrkulacja wokól prostokąta $\approx \left(\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$



<u>Twierdzenie Stokes'a:</u> Całka liniowa z pola wektorowego po zamkniętej pętli jest równa całce powierzchniowej z rotacji tego pola po powierzchni ograniczonej tą petlą:

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{n}\; dS$$

Twierdzenie Stokes'a - przykład

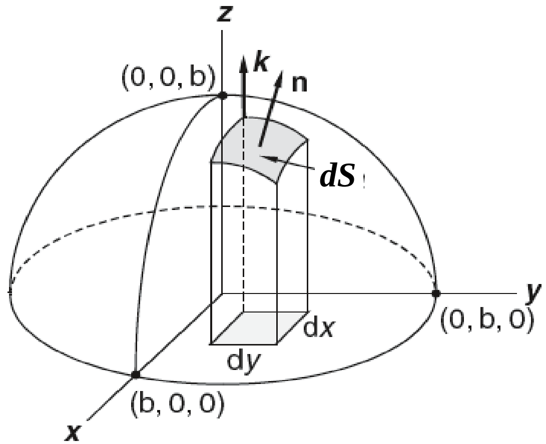
<u>Przykład:</u> Sprawdzenie twierdzenia Stokes'a dla $\vec{A} = 4y\hat{i} + x\hat{j} + 2z\vec{k}$ dla pętli danej przez $x^2 + y^2 = 4$ i powierzchni będącej hemisferą opisaną równaniem $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Obliczamy: $$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} = -3\hat{k}$$

Całka powierzchniowa:

$$\iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{n} dS = -3\iint_S \vec{k} \cdot \vec{n} dS = \left\| dxdy = \vec{k} \cdot \vec{n} dS \right\| =$$

$$= -3\iint_{x^2+y^2=4} \vec{k} \cdot \vec{n} \frac{1}{\vec{k} \cdot \vec{n}} dxdy = -3\iint_{x^2+y^2=4} dxdy = -12\pi$$



Całka liniowa po okręgu:

Równanie okręgu $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, $x = 2\cos\theta$ $y = 2\sin\theta$ $0 \le \theta \le 2\pi$

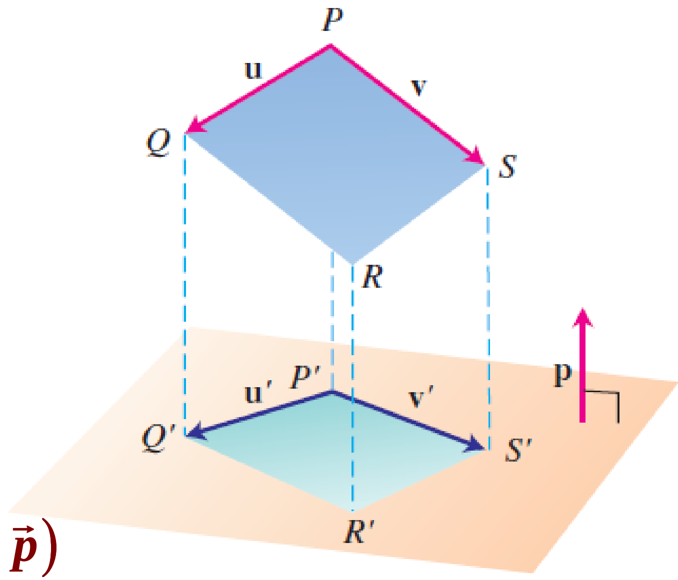
$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = -2\sin\theta\ \hat{i} + 2\cos\theta\ \hat{j} \qquad \vec{A} = 4y\hat{i} + x\hat{j} + 2z\vec{k} = 8\sin\theta\ \hat{i} + 2\cos\theta\ \hat{j} + 2z\vec{k}$$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{A} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-16\sin^2\theta + 4\cos^2\theta\right) d\theta = -12\pi$$

Rzut równoległoboku na płaszczyznę

Twierdzenie: Pole powierzchni ortogonalnego rzutu równoległoboku określonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ na płaszczyznę o jednostkowym wektorze normalnym $\vec{p}$ dane jest przez:

$$S_{\square} = \left|\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{p}\right|$$



Dowód:

$$\vec{u} = \overrightarrow{PP'} + \vec{u}' + \overrightarrow{Q'Q} = \vec{u}' + \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{QQ'} = \vec{u}' + s\vec{p}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PP'} + \vec{v}' + \overrightarrow{S'S} = \vec{v}' + \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{SS'} = \vec{v}' + t\vec{p}$$

gdzie s i t to pewne wartości skalarne.

Obliczamy iloczyn wektorowy

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left(\vec{u}' + s\vec{p}\right)\times\left(\vec{v}' + t\vec{p}\right) = \vec{u}'\times\vec{v}' + s\left(\vec{p}\times\vec{v}'\right) + t\left(\vec{u}'\times\vec{p}\right)$$

Korzystając z ortogonalności wektorów znajdujemy:

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{p} = \left(\vec{u}'\times\vec{v}'\right)\cdot\vec{p} \qquad \text{czyli} \qquad \left|\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{p}\right| = \left|\left(\vec{u}'\times\vec{v}'\right)\cdot\vec{p}\right|$$

Ponieważ $\vec{p}$ jest wektorem jednostkowym, więc prawa strona jest co do wartości równa szukanemu polu powierzchni $S_{\square}$

Ważne tożsamości

- $\nabla\times\nabla\varphi = 0$

D: $$\nabla\times\nabla\varphi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right) = 0$$

- $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A} = 0$

D: $$\nabla\cdot\nabla\times\vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

- $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}$

D: $$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} \;\Rightarrow\; \nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) - \left(\nabla\cdot\nabla\right)\vec{A}$$

- $\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \nabla\times\vec{A}\cdot\vec{B} - \nabla\times\vec{B}\cdot\vec{A}$
- $\nabla\cdot\left(\nabla\varphi\times\nabla\psi\right) = \nabla\times\nabla\varphi\cdot\nabla\psi - \nabla\times\nabla\psi\cdot\nabla\varphi = 0$