

Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 14

Uogólnione wektory własne

Definicja: Wektor \vec{x}_m nazywamy uogólnionym wektorem własnym rzędu m macierzy A do wartości własnej λ jeśli $(A - \lambda I)^m \vec{x}_m = 0$ ale $(A - \lambda I)^{m-1} \vec{x}_m \neq 0$

Przykład: Znajdź uogólniony wektor własny rzędu 2 do wartości własnej $\lambda=4$ macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(4 - \lambda)^3 = 0$$
$$\lambda_1 = 3 \text{ oraz } \lambda_{2,3,4} \equiv \lambda = 4$$

Wektory własne do wartości własnej $\lambda=4$:

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \\ & \Rightarrow x_4 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{v} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wybieramy $\vec{v}_1 = (-1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ a drugi wektor znajdujemy jako ortogonalny do \vec{v}_1

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = (1 \ -2 \ 1 \ 0)^T$$

A więc do potrójnej wartości własnej $\lambda=4$ istnieją tylko dwa wektory własne.

Jest to przyczyna z powodu której nie potrafimy zdiagnozować macierzy A .

Uogólnione wektory własne

Znajdziemy teraz uogólniony wektor własny rzędu 2 do wartości własnej $\lambda=4$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \vec{x}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0} & \Rightarrow x_4 = 0 \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) \vec{x}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} & \Rightarrow x_1 \neq -x_2 - x_3 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \vec{x}_2 = \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) \vec{x}_2 \neq \mathbf{0} \end{aligned}} \right\} \text{np.} \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Natomiast nie istnieje uogólniony wektor własny rzędu 3 do wartości własnej $\lambda=4$, ponieważ musiałyby zachodzić jednocześnie warunki:

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

czyli składowa x_4 wektora musiałyby być jednocześnie równa zero i różna od zera, co jest niemożliwe.

Ciągi uogólnionych wektorów własnych

Definicja: Ciągiem generowanym przez uogólniony wektor własny \vec{x}_m rzędu m stowarzyszony z wartością własną λ nazywamy zbiór wektorów $\{\vec{x}_m, \vec{x}_{m-1}, \dots, \vec{x}_1\}$ określony przez:

$$\vec{x}_j = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{x}_{j+1} \quad \text{gdzie} \quad j = m-1, m-2, \dots, 1 \quad (*)$$

Przykład: Znajdź ciąg generowany przez uogólniony wektor własny rzędu 2 do wartości własnej $\lambda=4$ z poprzedniego przykładu.

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = (\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A więc generowany ciąg ma postać $\{\vec{x}_2, \vec{x}_1\} = \left\{ (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T, (0 \ 1 \ -1 \ 0)^T \right\}$

Twierdzenie: Jeśli \vec{x}_m jest uogólnionym wektorem własnym rzędu m macierzy \mathbf{A} do wartości własnej λ , wtedy \vec{x}_j określone relacją (*) jest uogólnionym wektorem własnym rzędu j do tej samej wartości własnej.

Dowód: Mamy $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^m \vec{x}_m = \mathbf{0}$ oraz $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{m-1} \vec{x}_m \neq \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \vec{x}_j = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{x}_{j+1} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{m-j} \vec{x}_m &\Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^j \vec{x}_j = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^m \vec{x}_m = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{j-1} \vec{x}_j = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{m-1} \vec{x}_m \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{x}_j - \text{u.w.w.} \\ \text{rzędu } j \end{array}$$

Ciągi uogólnionych wektorów własnych

Twierdzenie: Każdy ciąg uogólnionych wektorów własnych jest układem wektorów liniowo niezależnych.

Dowód (indukcyjny):

- Dla ciągu o długości 1 uogólniony wektor własny \vec{x}_1 jest po prostu wektorem własnym, a więc $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, dlatego

$$c_1 \vec{x}_1 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = 0$$

- Załóżmy, że wszystkie ciągi zawierające dokładnie $k-1$ wektorów są liniowo niezależne i rozważmy ciąg złożony z k wektorów. Chcemy pokazać, że

$$c_k \vec{x}_k + c_{k-1} \vec{x}_{k-1} + \dots + c_1 \vec{x}_1 = \vec{0} \Rightarrow c_k = c_{k-1} = \dots = c_1 = 0$$

Mnożymy od lewej strony przez $(A - \lambda I)^{k-1}$. Dla wszystkich $j < k$ zachodzi:

$$(A - \lambda I)^{k-1} c_j \vec{x}_j = c_j (A - \lambda I)^{k-j-1} (A - \lambda I)^j \vec{x}_j = c_j (A - \lambda I)^{k-j-1} \vec{0} = \vec{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stąd mamy } c_k (A - \lambda I)^{k-1} \vec{x}_k = \vec{0} \\ \text{ale } (A - \lambda I)^{k-1} \vec{x}_k \neq \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow c_k = 0$$

A więc zachodzi $c_{k-1} \vec{x}_{k-1} + \dots + c_1 \vec{x}_1 = \vec{0}$

Ale układ wektorów $\vec{x}_{k-1}, \dots, \vec{x}_1$ jest ciągiem o długości $k-1$, który z założenia jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych. A więc mamy $c_k = c_{k-1} = \dots = c_1 = 0$

Baza kanoniczna

Definicja: Bazą kanoniczną dla macierzy A stopnia n nazywamy układ n liniowo niezależnych uogólnionych wektorów własnych złożony całkowicie z ciągów (tzn. że jeśli uogólniony wektor rzędu m pojawia się w bazie to również w bazie występuje cały ciąg generowany przez ten wektor).

Uwaga: Najprostszą bazą kanoniczną (jeśli istnieje) jest baza złożona z liniowo niezależnych wektorów własnych (ciągów o długości 1). Taka baza istnieje zawsze kiedy wartości własne macierzy są różne.

Przykład: Znajdź bazę kanoniczną dla macierzy $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

Wartości własne i wektory własne dane są przez:

$$\lambda_1 = 1 : \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = -2 : \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A więc baza kanoniczna macierzy A to $\{(-5 \ 2)^T, (-1 \ 1)^T\}$

Baza kanoniczna

Znajdowanie ciągów generowanych przez uogólnione wektory własne do wielokrotnych wartości własnych macierzy kwadratowej A stopnia n :

- oznaczamy krotność wartości własnej λ przez m i znajdujemy najmniejszą całkowitą liczbę dodatnią p dla której rząd macierzy $(A - \lambda I)^p$ jest równy $n - m$,
- dla każdej wartości $1 \leq k \leq p$ znajdujemy liczbę uogólnionych wektorów własnych rzędu k określonych przez:

$$N_k = \text{rz}(A - \lambda I)^{k-1} - \text{rz}(A - \lambda I)^k$$

- znajdujemy uogólniony wektor własny rzędu p i konstruujemy ciąg generowany przez ten wektor (każdy z tych wektorów należy do bazy kanonicznej).
- zmniejszamy wartość każdej z liczb N_k o 1 – jeśli wszystkie N_k są równe zero, wtedy procedura znajdowania wektorów bazy kanonicznej jest zakończona, w przeciwnym wypadku przechodzimy do następnego kroku.
- znajdujemy uogólniony wektor własny rzędu k , liniowo niezależny od wszystkich wcześniej znalezionych uogólnionych wektorów własnych, do wartości własnej λ , gdzie k jest największą wartością dla której N_k nie jest równe zero. Wektor ten dołączamy do bazy i wracamy do punktu poprzedniego.

Znajdowanie bazy kanonicznej

Przykład: Znajdź bazę kanoniczną dla macierzy A .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Wartości własne macierzy A to $\lambda=4$ (o krotności 5) oraz pojedyncza wartość własna $\lambda=7$.

Dla wartości własnej $\lambda=4$ mamy: $n = 6$, $m = 5$ oraz $n-m = 1$

- szukamy najmniejszej liczby p takiej ze $\text{rz}(A-4I)^p = n-m$

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rz}(A-4I) = 4$$

$$(A - 4I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{rz}(A-4I)^2 = 2$$

$$(A - 4I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\text{rz}(A-4I)^3 = 1$$

- dla każdej liczby $1 \leq k \leq p = 3$ znajdujemy liczbę uogólnionych wektorów własnych rzędu k :

$$N_3 = \text{rz}(A - 4I)^2 - \text{rz}(A - 4I)^3 = 2 - 1 = 1$$

$$N_2 = \text{rz}(A - 4I)^1 - \text{rz}(A - 4I)^2 = 4 - 2 = 2$$

$$N_1 = \text{rz}(A - 4I)^0 - \text{rz}(A - 4I)^1 = 6 - 4 = 2$$

Znajdowanie bazy kanonicznej

- znajdujemy uogólniony wektor rzędu $p=3$. Niech $\vec{x}_3 = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6)^T$

$$\left. \begin{array}{l} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 \vec{x}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow x_6 = 0 \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \vec{x}_3 \neq \mathbf{0} \Rightarrow x_3 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{x}_3 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Wektor \vec{x}_3 generuje pozostałe wektory ciągu:

$$\vec{x}_2 = (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\vec{x}_3 = (1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad \vec{x}_1 = (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\vec{x}_2 = (-2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

- obniżamy wszystkie wartości N_k o 1 otrzymując: $N_3 = 0$, $N_2 = 1$ i $N_1 = 1$.
- znajdujemy uogólniony wektor własny rzędu 2. Niech $\vec{y}_2 = (y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6)^T$

$$\left. \begin{array}{l} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \vec{y}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow y_3 = y_6 = 0 \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\vec{y}_2 \neq \mathbf{0} \Rightarrow y_2 \neq 0 \text{ lub } y_5 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{y}_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$$

Wektor \vec{y}_2 generuje pozostałe wektory ciągu: $\vec{y}_1 = (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\vec{y}_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0)^T$

- obniżamy wszystkie wartości N_k o 1 otrzymując: $N_3 = 0$, $N_2 = 0$ i $N_1 = 0$, a więc zostały znalezione już wszystkie wektory bazy kanonicznej do wartości własnej $\lambda=4$.

Ostatnim wektorem bazy kanonicznej jest wektor do wartości własnej $\lambda=7$. Jest to wektor własny, który możemy wybrać jako $\vec{z}_1 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$

Pełna baza kanoniczna dla macierzy \mathbf{A} to zbiór wektorów $\{\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_1\}$

Macierz modalna

Definicja: **Macierzą modalną** M dla macierzy A nazywamy macierz tego samego stopnia co macierz A , której kolumnami są wektory bazy kanonicznej macierzy A .

Uwaga: Macierz modalna jest odwracalna (zbudowana z wektorów liniowo niezależnych).

Uwaga: Macierz modalna M nie jest jednoznaczna. Będziemy stosować konwencję, że:

- wszystkie ciągi o długości 1 poprzedzają dłuższe ciągi,
- wektory każdego z ciągów dłuższych niż 1 umieszczamy obok siebie, przy czym rząd wzrasta od lewej do prawej.

Przykład: Znajdź macierz modalną M dla macierzy A z poprzedniego przykładu.

Baza kanoniczna dla macierzy A składa się z jednego ciągu o długości 3:

$$\vec{x}_3 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad \vec{x}_2 = (1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad \vec{x}_1 = (-2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$\text{z jednego ciągu o długości 2: } \vec{y}_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T \quad \vec{y}_1 = (0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0)^T$$

$$\text{i z jednego ciągu o długości 1: } \vec{z}_1 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

Macierz modalna M ma więc postać:

$$M = (\vec{z}_1 \ \vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \vec{x}_3 \ \vec{y}_1 \ \vec{y}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Postać kanoniczna Jordana

Definicja: **Klatką Jordana** nazywamy macierz kwadratową której elementy diagonalne są takie same, elementy bezpośrednio nad diagonalą są równe 1, a wszystkie pozostałe elementy to 0:

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definicja: Mówimy, że macierz jest w **postaci kanonicznej Jordana** jeśli jest macierzą diagonalną lub ma jedną z następujących postaci blokowych (**D** – macierz diagonalna):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_k \end{pmatrix}$$

Uwaga: Elementy diagonalne macierzy **D** mogą być różne.

Uwaga: Choć każda klatka Jordana musi mieć jednakowe elementy na diagonalu, to różne klatki Jordana J_i ($i = 1, \dots, k$) mogą mieć różne elementy diagonalne.

Postać kanoniczna Jordana

Twierdzenie: Każda macierz kwadratowa A jest podobna do jakiejś macierzy J będącej w postaci kanonicznej Jordana, a transformacja podobieństwa określona jest przez macierz modalną M dla macierzy A :

$$A = MJM^{-1}$$

Dowód: (dla pojedynczego ciągu o długości r złożonego z wektorów $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r$)
 Każdy z wektorów \vec{x}_i ($i=1, 2, \dots, r$) jest uogólnionym wektorem własnym rzędu i macierzy A do tej samej wartości własnej λ .

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}_{r-1} &= (A - \lambda I) \vec{x}_r = A \vec{x}_r - \lambda \vec{x}_r \\ \vec{x}_{r-2} &= (A - \lambda I) \vec{x}_{r-1} = A \vec{x}_{r-1} - \lambda \vec{x}_{r-1} \\ &\dots = \dots \\ \vec{x}_2 &= (A - \lambda I) \vec{x}_3 = A \vec{x}_3 - \lambda \vec{x}_3 \\ \vec{x}_1 &= (A - \lambda I) \vec{x}_2 = A \vec{x}_2 - \lambda \vec{x}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A \vec{x}_2 &= \lambda \vec{x}_2 + \vec{x}_1 \\ A \vec{x}_3 &= \lambda \vec{x}_3 + \vec{x}_2 \\ &\dots = \dots \\ A \vec{x}_r &= \lambda \vec{x}_r + \vec{x}_{r-1} \end{aligned}$$

Ponieważ \vec{x}_1 jest wektorem własnym, więc dodatkowo mamy: $A \vec{x}_1 = \lambda \vec{x}_1$
 Korzystając z powyższych związków otrzymujemy:

$$\begin{aligned} AM &= A [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_r] = [A \vec{x}_1, A \vec{x}_2, A \vec{x}_3, \dots, A \vec{x}_r] = & \Rightarrow A = MJM^{-1} \\ &= [\lambda \vec{x}_1, \lambda \vec{x}_2 + \vec{x}_1, \lambda \vec{x}_3 + \vec{x}_2, \dots, \lambda \vec{x}_r + \vec{x}_{r-1}] = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_r] J = MJ \end{aligned}$$

Postać kanoniczna Jordana

Przykład: Znajdź macierz J w postaci kanonicznej Jordana, która jest podobna do macierzy A z poprzednich przykładów.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad M = (\vec{z}_1 \ \vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \vec{x}_3 \ \vec{y}_1 \ \vec{y}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierz w postaci kanonicznej Jordana znajdziemy stosując transformację podobieństwa:

$$J = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} [7] & & 0 \\ & J_1 & \\ 0 & & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Uogólniony wektor \vec{z}_1 odpowiadający wartości własnej 7 generuje macierz diagonalną [7]

Ciąg wektorów $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ o długości 3 odpowiadający wartości własnej 4 generuje klatkę Jordana J_1 , natomiast ciąg wektorów $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ odpowiadający tej samej wartości własnej 4 generuje klatkę Jordana J_2 .

Postać kanoniczna Jordana

Przykład: Znajdź postać kanoniczną Jordana dla macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

Macierz A ma dwie różne wartości własne:

$$\lambda_1 = 2 \text{ (krotność } m_1 = 4) \quad n - m_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \text{ (krotność } m_2 = 2) \quad n - m_2 = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rz}(A-2I) = 4 \\ \text{rz}(A-2I)^2 = 3 \\ \text{rz}(A-2I)^3 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} N_3(2) = \text{rz}(A-2I)^2 - \text{rz}(A-2I)^3 = 3 - 2 = 1 \quad \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \\ N_2(2) = \text{rz}(A-2I) - \text{rz}(A-2I)^2 = 4 - 3 = 1 \\ N_1(2) = \text{rz}(A-2I)^0 - \text{rz}(A-2I) = 6 - 4 = 2 \quad \{\vec{y}_1\} \end{array}$$

$$\text{rz}(A+1I) = 4 \quad \Rightarrow \quad N_1(-1) = \text{rz}(A+1I)^0 - \text{rz}(A+1I) = 6 - 4 = 2 \quad \{\vec{z}_1\} \quad \{\vec{t}_1\}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1(2) & & & & & \\ & J_2(2) & & & & \\ & & J_3(-1) & & & \\ & & & J_4(-1) & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Funkcje macierzy

W przypadku macierzy diagonalizowalnych określiliśmy funkcje macierzy przez:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{S}f(\mathbf{D})\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \text{diag}(f(\lambda_1)\mathbf{I}, \dots, f(\lambda_k)\mathbf{I})\mathbf{S}^{-1}$$

Do definicji funkcji macierzy dających się przedstawić w postaci kanonicznej Jordana można wykorzystać rozwinięcie funkcji w nieskończony szereg Taylor'a:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=\lambda} (z-\lambda)^n = f(\lambda) + f'(\lambda)(z-\lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(z-\lambda)^2 + \dots$$

Dla pojedynczej klatki Jordana definiujemy:

$$f(\mathbf{J}) = f(\lambda)\mathbf{I} + f'(\lambda)(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) + \frac{f''(\lambda)}{2!}(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^2 + \frac{f'''(\lambda)}{3!}(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^3 + \dots$$

Definiujemy macierz $\mathbf{N} = \mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}$, dla której mamy:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{N}^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Funkcje macierzy

A więc

$$f(\mathbf{J}) = f \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(\lambda)}{i!} \mathbf{N}^i = \begin{pmatrix} \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} & \dots & \frac{f^{(k-4)}(\lambda)}{(k-4)!} & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{f(\lambda)}{0!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{f(\lambda)}{0!} \end{pmatrix}$$

Dla dowolnej macierzy kwadratowej \mathbf{A} mamy

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{M}f(\mathbf{J})\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M} \text{diag}(f(\mathbf{J}_1)\mathbf{I}, \dots, f(\mathbf{J}_k)\mathbf{I})\mathbf{M}^{-1}$$

gdzie \mathbf{J}_i oznaczają różne klatki Jordana, natomiast \mathbf{M} to macierz modalna sprowadzająca przez transformację podobieństwa macierz \mathbf{A} do postaci kanonicznej Jordana.

Uwaga: Aby istniała funkcja $f(\mathbf{A})$ muszą istnieć wszystkie niezbędne pochodne

$$f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \dots, f^{(k_i-1)}(\lambda_i)$$

Funkcje macierzy

Przykład: Znajdź e^A gdzie macierz A dana jest przez:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Najpierw obliczymy e^J :

$$e^J = \begin{pmatrix} e^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & e^4 & e^4/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 & e^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^4 & e^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$$

Teraz możemy już znaleźć e^A :

$$e^A = M e^J M^{-1} = e^4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$