

Matematyczne Metody FIZYKI I

Wykład 1

Matematyczne Metody Fizyki I

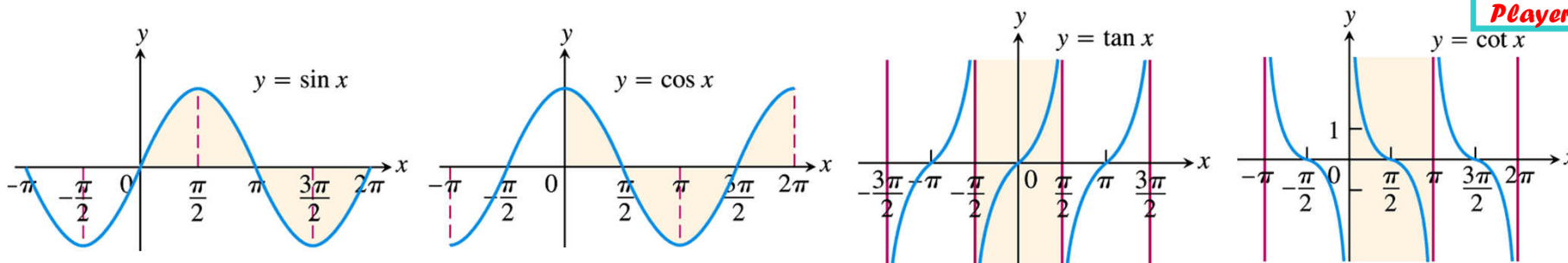
Dr hab. inż. Mariusz Przybycień

- *Matematyka dla przyrodników i inżynierów*, D.A. McQuarrie, PWN, Warszawa 2005.
- *Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki*, A. Lenda, B. Spisak, Wydawnictwo AGH, Kraków 2006.
- *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, F.W. Byron, R.W. Fuller, PWN, Warszawa 1974.
- *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence, Cambridge Univ. Press, 2006.
- *Algebra liniowa*, T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, GiS, Wrocław 2002.
- *Matematyka dla studiów inżynierskich*, S. Białas, A. Ćmiel, A. Fitzke, Wydawnictwo AGH, Kraków 1973.
- *Algebra i geometria analityczna w zadaniach*, H. Arodź, K. Rościszewski, ZNAK, Kraków 2005.
- *Zbiór zadań z algebry*, L. Jeśmianowicz, J. Łoś, PWN, Warszawa 1975.
- *Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach*, S. Przybyto, A. Szlachetowski, WNT, Warszawa 2005.
- <http://home.agh.edu.pl/~mariuszp>

Wiadomości wstępne

Funkcje trygonometryczne:

Math
Player



➤ wybrane wartości funkcji trygonometrycznych:

θ (stopnie)	-180	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radiany)	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan \theta$	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0

Math
Player

➤ tożsamości trygonometryczne dla pojedynczego kąta:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

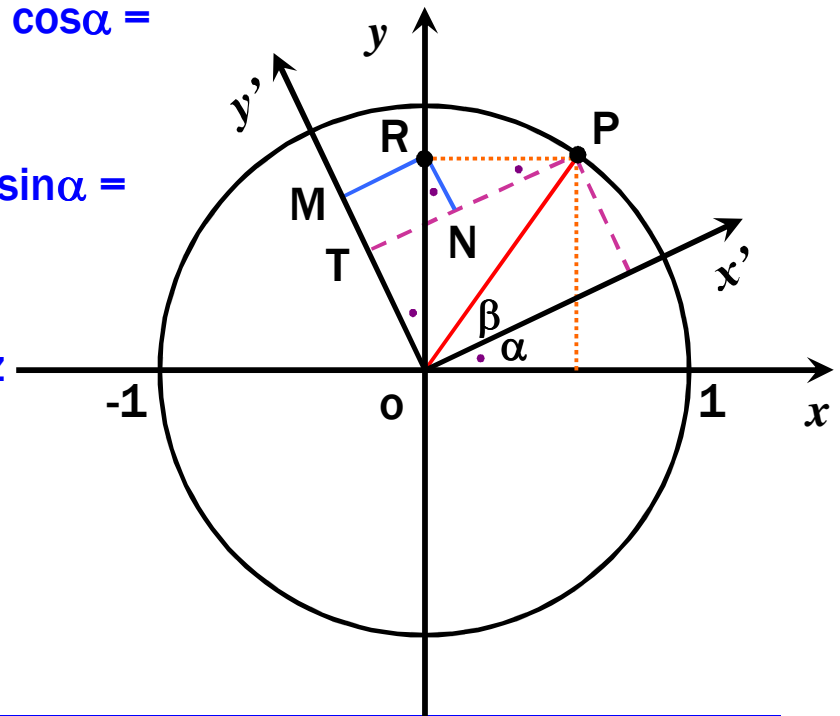
$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

Tożsamości trygonometryczne

Tożsamości trygonometryczne dla dwóch kątów:

- Wyprowadzenie wzorów na sinus i cosinus sumy kątów:
 - współrzędne punktu P: w Oxy: $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ oraz w Ox'y': $(\cos\beta, \sin\beta)$
 - współrzędne punktu R: w Oxy: $(0, \sin(\alpha+\beta))$
 - $\cos \beta = x' = TN+NP = MR+NP = OR \sin\alpha + RP \cos\alpha =$
 $= \sin(\alpha+\beta) \sin \alpha + \cos(\alpha+\beta) \cos \alpha$
 - $\sin \beta = y' = OM-TM = OM-NR = OR \cos\alpha + RP \sin\alpha =$
 $= \sin(\alpha+\beta) \cos \alpha - \cos(\alpha+\beta) \sin \alpha$
 - mnożąc pierwsze z powyższych równań przez $\sin\alpha$ a drugie przez $\cos\alpha$ otrzymujemy:
 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$
 - podobnie znajdujemy:
 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$



Tożsamości trygonometryczne

Podstawiając $-\beta$ zamiast β w powyższych wzorach, znajdujemy wyrażenia na sinus i cosinus różnicy kątów. W rezultacie mamy:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

Ważne przypadki szczególne:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \qquad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \qquad \tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

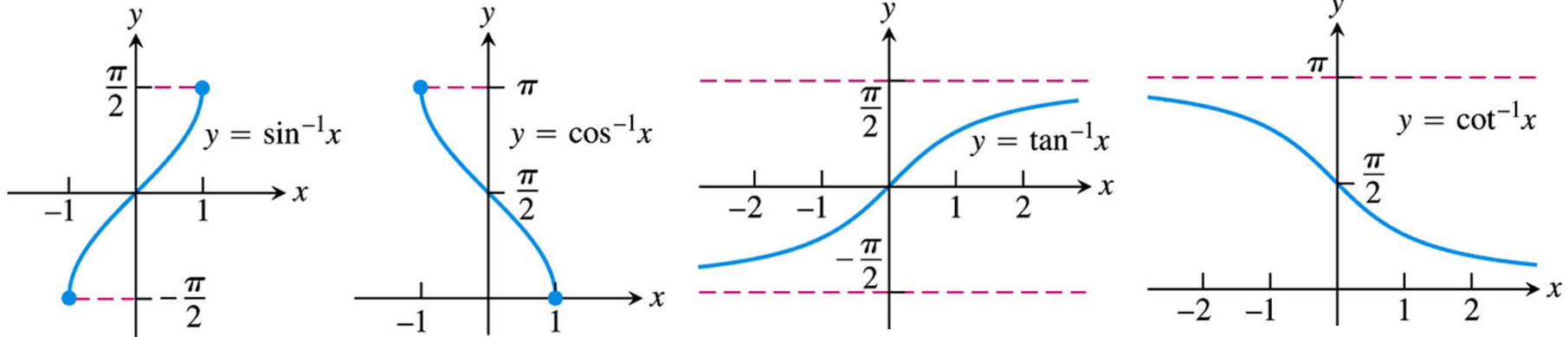
Dodając stronami wzory na $\sin(\alpha \pm \beta)$ a następnie stosując podstawienia $\alpha + \beta = \gamma$ oraz $\alpha - \beta = \delta$ znajdujemy wyrażenie na $\sin \gamma + \sin \delta$. Postępując analogicznie można znaleźć pozostałe z poniższych wzorów:

$$\sin \gamma + \sin \delta = 2 \sin \left(\frac{\gamma + \delta}{2} \right) \cos \left(\frac{\gamma - \delta}{2} \right) \qquad \cos \gamma + \cos \delta = 2 \cos \left(\frac{\gamma + \delta}{2} \right) \cos \left(\frac{\gamma - \delta}{2} \right)$$

$$\sin \gamma - \sin \delta = 2 \cos \left(\frac{\gamma + \delta}{2} \right) \sin \left(\frac{\gamma - \delta}{2} \right) \qquad \cos \gamma - \cos \delta = -2 \sin \left(\frac{\gamma + \delta}{2} \right) \sin \left(\frac{\gamma - \delta}{2} \right)$$

Funkcje hiperboliczne

Odwrotne funkcje trygonometryczne (funkcje arcus):



Definicja: Funkcje hiperboliczne zdefiniowane są w następujący sposób:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Własności:

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

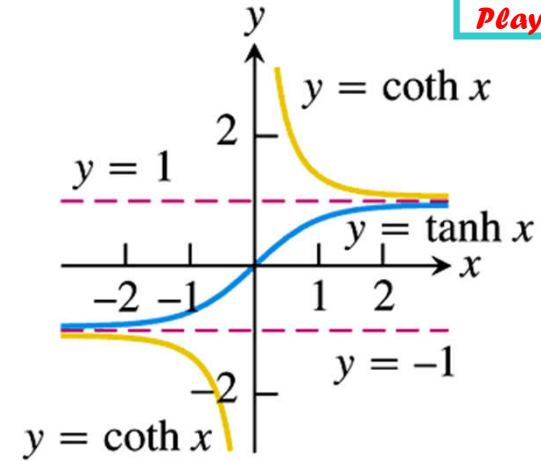
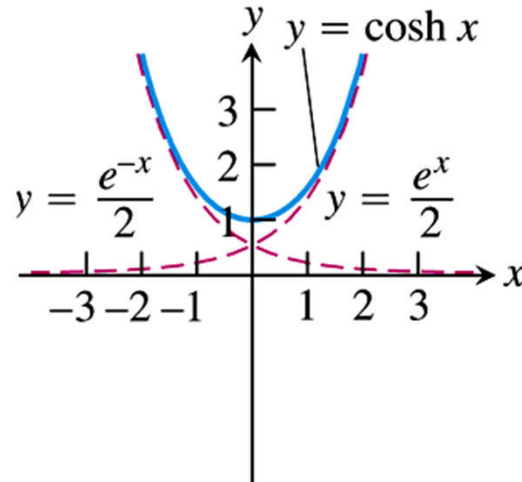
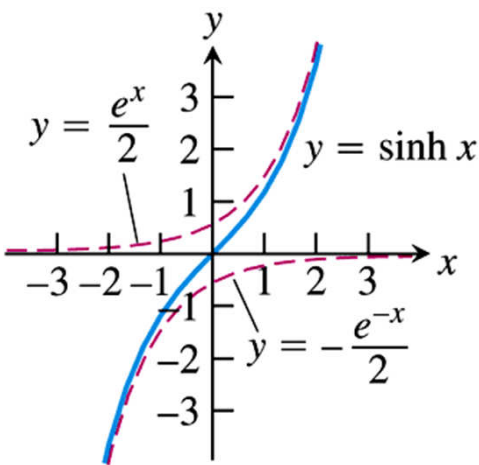
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \end{array} \right\} \Rightarrow \tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

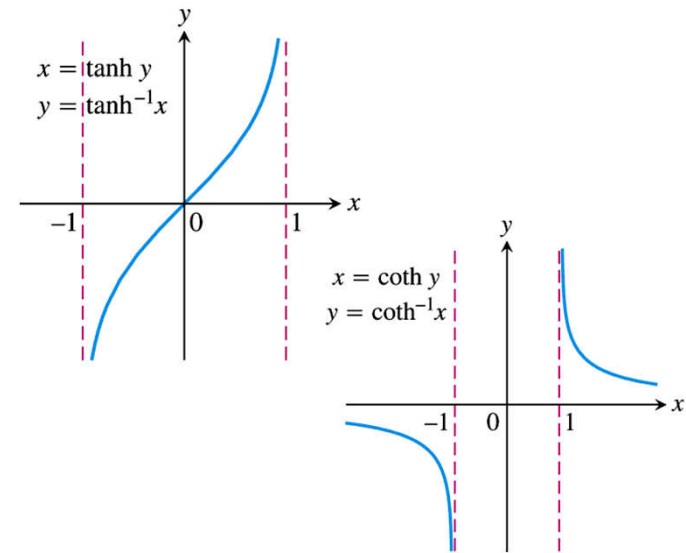
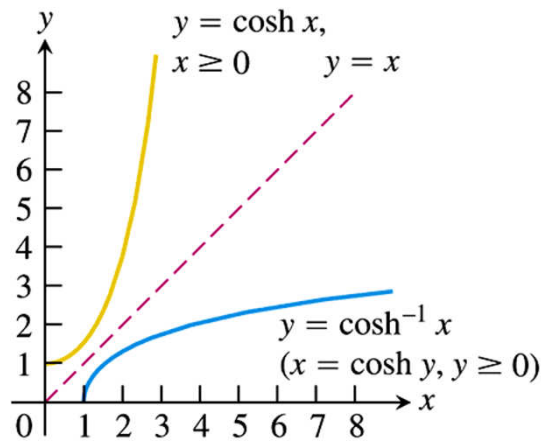
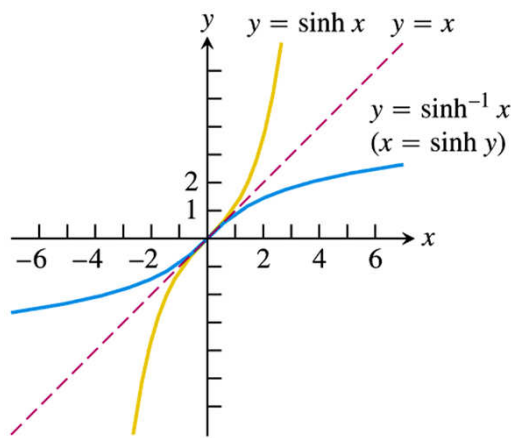
Wykresy funkcji hiperbolicznych

Funkcje hiperboliczne:

Math
Player



Odwrotne funkcje hiperboliczne (funkcje arcus):



Symbole sumy (Σ) i iloczynu (Π)

- sumę oraz iloczyn wyrazów ciągu liczb $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{n-1}, a_n$, gdzie $p < n$ zapisujemy w sposób skrótowy w następujący sposób:

$$\sum_{i=p}^n a_i = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n \qquad \prod_{i=p}^n a_i = a_p \cdot a_{p+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Przykład: Suma wyrazów ciągu arytmetycznego $a_0, a_0+d, a_0+2d, \dots, a_0+nd$ dana jest wzorem:

$$\sum_{k=0}^n (a_0 + kd) = \frac{1}{2}(n+1)(2a_0 + nd)$$

Przykład: Suma wyrazów ciągu geometrycznego $a_0, a_0q, a_0q^2, \dots, a_0q^n$, gdzie $q \neq 1$, dana jest wzorem:

$$\sum_{k=0}^n a_0q^k = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

- sumy mogą przebiegać po dowolnej liczbie wskaźników, np:

$$\sum_{i=p}^n \sum_{j=r}^m a_{ij} = a_{pr} + a_{p+1r} + \dots + a_{nr} + a_{pr+1} + \dots + a_{nr+1} + \dots + a_{pm} + \dots + a_{nm} = \sum_{j=r}^m \sum_{i=p}^n a_{ij}$$

- jeżeli zakres zmienności indeksów jest taki sam stosuje się zapis:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$$

Metody dowodzenia twierdzeń

Zasada indukcji matematycznej: Jeżeli twierdzenie w którym jest mowa o liczbach naturalnych (1) jest prawdziwe dla określonej liczby naturalnej n_0 , i (2) jeśli z prawdziwości tego twierdzenia dla liczby naturalnej n wynika jego prawdziwość dla liczby następnej $n+1$, to twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq n_0$.

Matk
Player

Przykład: Pokaż, że $Q(n) = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$ jest podzielne przez 6 dla wszystkich $n > 0$.

(1) sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla $n_0=1$: $Q(1)/6 = 6/6 = 1$

$$\begin{aligned} (2) \quad Q(n+1) &= (n+1)^4 + 2(n+1)^3 + 2(n+1)^2 + (n+1) = \\ &= (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2(n^2 + 2n + 1) + (n+1) = \\ &= (n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) + (4n^3 + 12n^2 + 14n + 6) \end{aligned}$$

Musimy teraz sprawdzić czy $4n^3 + 14n$ jest podzielne przez 6, czyli czy $R(n) = 2n^3 + 7n$ jest podzielne przez 3, przeprowadzając dodatkowy dowód przez indukcję:

(1) dla $n_0=1$: $R(1)/3 = 9/3 = 3$

$$(2) \quad R(n+1) = 2(n+1)^3 + 7(n+1) = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 7(n+1) = (2n^3 + 7n) + 3(2n^2 + 2n + 3)$$

$R(n)$ jest więc podzielne przez 3, co oznacza, że ostatecznie $Q(n)$ jest podzielne przez 6.

Metody dowodzenia twierdzeń

Dowód przez zaprzeczenie:

- zakładamy prawdziwość hipotezy oraz logicznego zaprzeczenia rezultatu który chcemy udowodnić (tzn. jeśli dowodzimy „jeśli P to Q” to zakładamy prawdziwość „P” i „nie Q”),
- stosując znane twierdzenia i własności dochodzimy do sprzeczności (tzn. konkluzji sprzecznej z naszymi założeniami lub jakiegoś w oczywisty sposób nieprawdziwego twierdzenia, np. $1 = 0$)

Przykład: Udowodnić, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

- załóżmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, tzn. że daje się zapisać w postaci $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ gdzie a i b nie mają wspólnych dzielników.
- $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = 2b^2$ co oznacza, że a^2 jest liczbą parzystą, a w konsekwencji samo a jest parzyste, ponieważ iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.
- a więc można napisać $a = 2c \Rightarrow 2c^2 = b^2 \Rightarrow b$ jest parzyste.
- oznacza to że a i b oba są parzyste, a więc mają wspólny dzielnik – **sprzeczność!**

Przykład: Tw: Jest nieskończenie wiele liczb pierwszych. (dowód $q = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$)

Dwumian Newtona

Symbol Newtona:

Math
Player

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{dla } 0 \leq k \leq n \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{dla } k < 0 \vee k > n$$

Własności: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ $\sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} = \binom{n+k}{k+1}$

Przykład: Dowód metodą indukcji matematycznej trzeciej z powyższych własności:

(1) sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla $n_0=1$: $L = \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = P$

(2) $\sum_{s=0}^n \binom{k+s}{k} = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} + \binom{k+n}{k} = \binom{n+k}{k+1} + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$

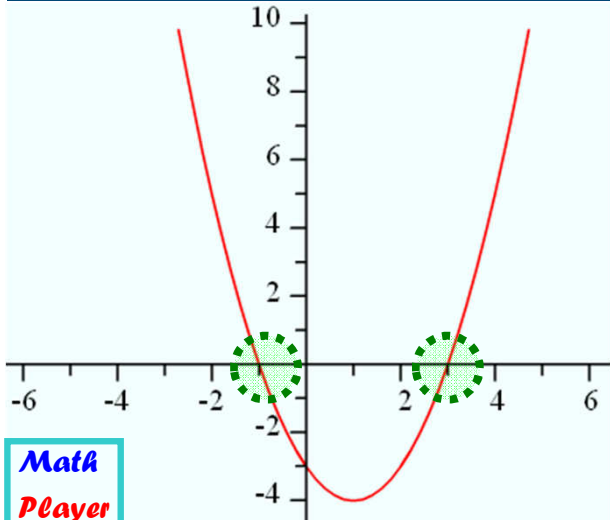
Dwumian Newtona (rozwińcie dwumianowe): $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Math
Player

Przykład: Wychodząc z $(x+y)^p(x+y)^q \equiv (x+y)^{p+q}$ oraz porównując wsp. przy $x^{p+q-r}y^r$ mamy:

$$\sum_{s=0}^p \binom{p}{s} x^s y^{p-s} \sum_{t=0}^q \binom{q}{t} x^t y^{q-t} \Rightarrow \|s+t=r\| \Rightarrow \sum_{t=0}^r \binom{p}{r-t} \binom{q}{t} = \binom{p+q}{r}$$

Pierwiastki równania kwadratowego



Math
Player

Math
Player

$$ax^2 + bx + c = 0$$

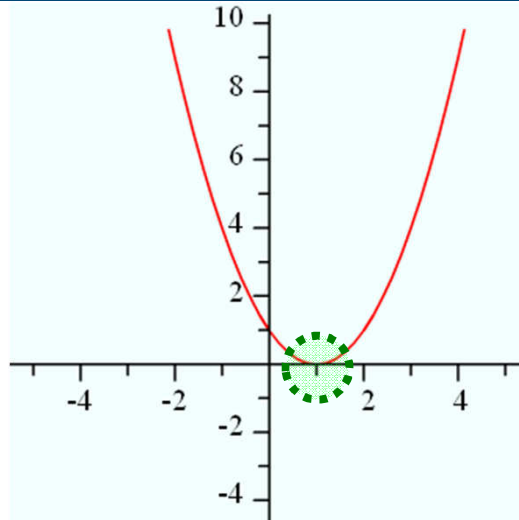
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(4+12)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

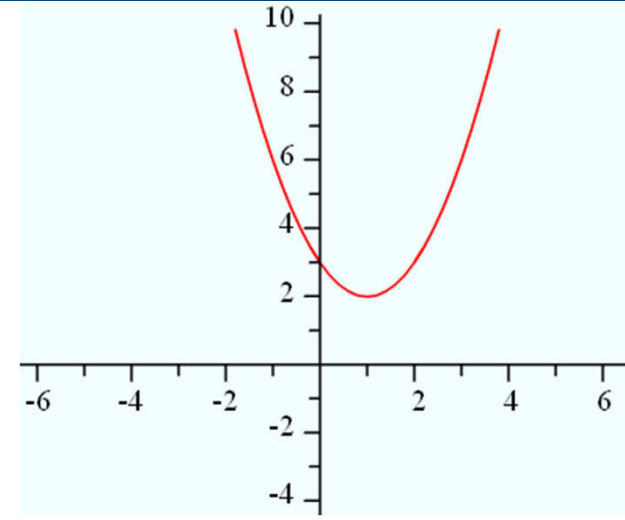


$$y = x^2 - 2x + 1$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(4-4)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x_{1,2} = 1$$



Math
Player

$$y = x^2 - 2x + 3$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(4-12)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm \sqrt{2}\sqrt{-1} \quad ?$$

Jednostka urojona: $i = \sqrt{-1}$

$$x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

Liczby zespolone

Liczby zespolone (\mathbb{C}) to liczby zawierające jednostkę urojoną i (L.Euler).

Postać algebraiczna liczb zespolonych to $z = a+bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

$a = \text{Re}(z)$ – część rzeczywista liczby z , $b = \text{Im}(z)$ – część urojona liczby z

Jeśli $b = 0$ oraz $a \neq 0$, mamy $a+0i$... lub a liczba rzeczywista.

Jeśli $b \neq 0$ oraz $a = 0$, mamy $0+bi$... lub ib ... liczba (czysto) urojona.

Fundamentalne twierdzenie algebry stwierdza, że jeśli $f(z)$ jest dowolnym wielomianem stopnia n , to równanie $f(z) = 0$ ma dokładnie n rozwiązań (w \mathbb{C}).

Liczby zespolone $z = a + bi$

Liczby urojone bi

$-4i$ πi
 $\pm i$ $i\sqrt{2}$

$-3 + 4i$

$\sqrt{2} + i\sqrt{3}$

$\pi - 24i$

Liczby rzeczywiste a
(wymierne i niewymierne)

$-23 + 0i$ $\sqrt{3}$ $-216.4e$
 6.25 $7/8$

$100 - (2/5)i$

Własności liczb zespolonych

- Dwie liczby zespolone są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy ich części rzeczywiste i urojone są niezależnie sobie równe:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\{z_1\} = \operatorname{Re}\{z_2\} \text{ i } \operatorname{Im}\{z_1\} = \operatorname{Im}\{z_2\}$$

- W zbiorze liczb zespolonych nie jest określona relacja uporządkowania (tzn., że nie ma sensu wyrażenie np. ~~$9+6i > 3+2i$~~)

Liczbą **sprzężoną** do liczby $z = a + bi$ nazywamy wielkość $z^* = a - bi$

- Liczba zespolona jest czysto rzeczywista wtedy i tylko wtedy gdy $z = z^*$
- Liczba zespolona jest czysto urojona wtedy i tylko wtedy gdy $z = -z^*$
- $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z^* = \frac{1}{2}(z + z^*)$ $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} z^* = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

Modułem liczby $z = a + bi$ nazywamy wielkość: $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Uwaga: zachodzą następujące relacje $|z| = |z^*|$ oraz $|z_1| + |z_2| \leq |z_1 + z_2|$

Przykład: Znajdź liczbę sprzężoną i moduł liczby zespolonej $z = a + 2i - 3bi$

$$z = a + (2 - 3b)i \Rightarrow z^* = a - (2 - 3b)i$$

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + (2 - 3b)^2}$$

Płaszczyzna zespolona i argument

Każdą liczbę zespoloną $z = a+ib$ można przedstawić jako punkt o współrzędnych kartezjańskich (a, b) na tzw. **płaszczyźnie zespolonej**:

- wektor wodzący tego punktu ma początek w punkcie $(0,0)$ i koniec w (a,b)
- jego długość jest równa modułowi liczby zespolonej
- kąt zawarty między osią $\text{Re}(z)$ i wektorem wodzącym punktu (a,b) nazywamy **fazą** lub **argumentem** liczby zespolonej i oznaczamy $\varphi = \arg(z)$. Liczba $z = 0$ może mieć dowolną fazę.

W pozostałych przypadkach faza dana jest przez:

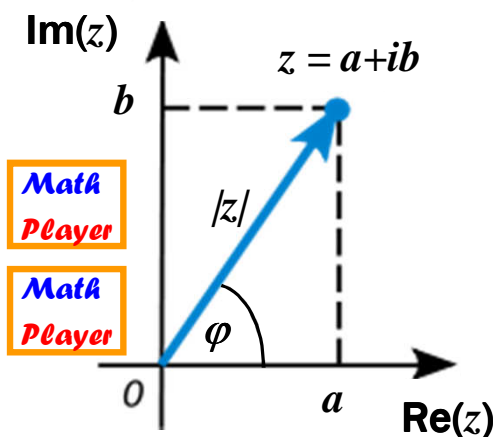
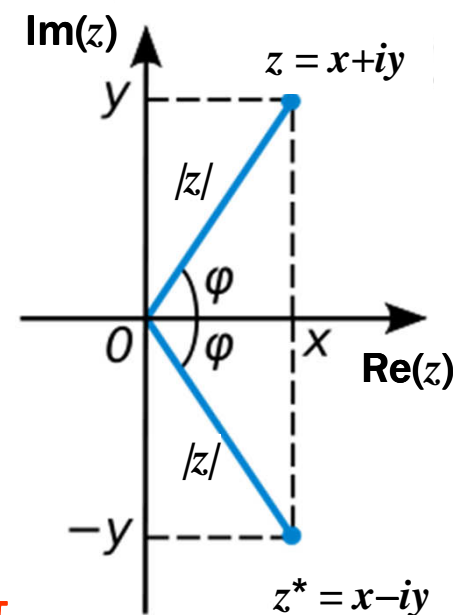


Diagram Arganda

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Danej liczbie zespolonej można przyporządkować nieskończenie wiele faz: $\varphi + 2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Argumentem głównym (ozn. $\text{Arg}(z)$) nazywamy fazę z przedziału $-\pi \leq \varphi < \pi$.



Dodawanie liczb zespolonych

- Dodawanie (odejmowanie) liczb zespolonych ($z_1 = a_1 + ib_1$ oraz $z_2 = a_2 + ib_2$):

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = \\ &= a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2 \end{cases}$$

Dodawanie l.z. jest przemienne i łączne:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

Sprzężenie zespolone sumy (różnicy) l.z.

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$

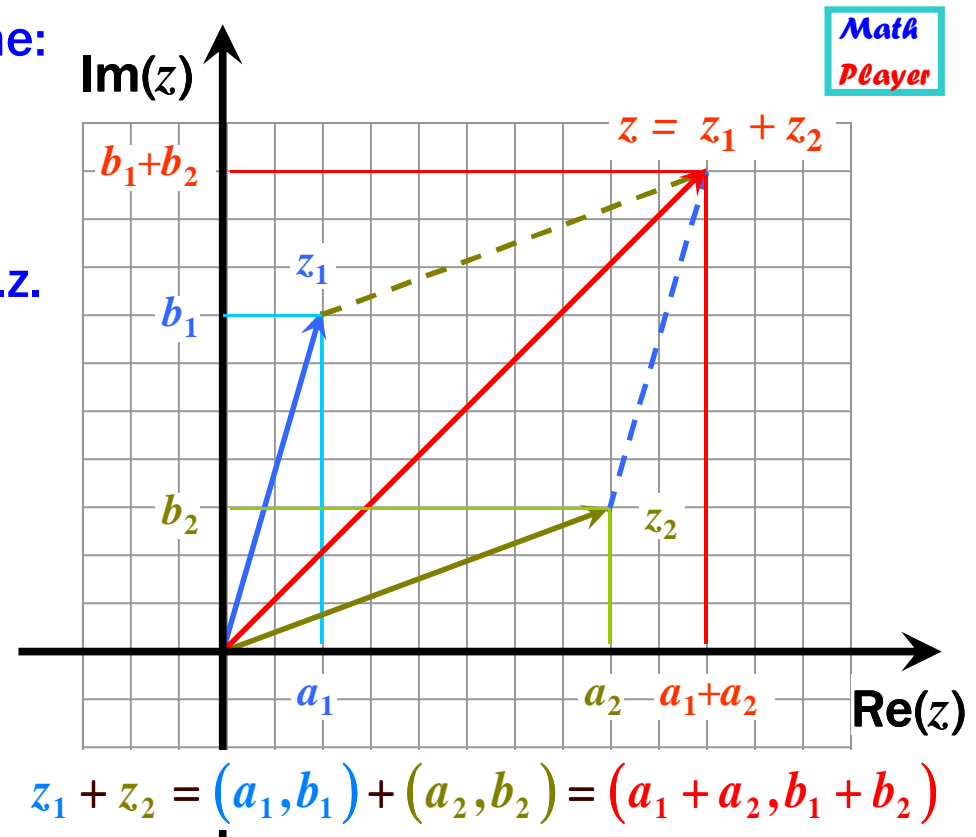
Przykład: Wykonaj działanie $z_1 + z_2 - z_3$

gdzie $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = -2 + i$

$$z_1 + z_2 - z_3 =$$

$$= (1 + 2i) + (3 - 4i) - (-2 + i) =$$

$$= (1 + 3 - (-2)) + i(2 - 4 - 1) = 6 - 3i$$



Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych

- Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych ($z_1 = a_1 + ib_1$ oraz $z_2 = a_2 + ib_2$):

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) \Rightarrow i^2 = -1 \text{ oraz } z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 - (ib_2)^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \Rightarrow \forall z \neq 0 \quad z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

Przykład: Wykonaj działania $z_1 z_2$ oraz z_1 / z_2 gdzie $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 - 4i$.

$$z_1 z_2 = (3 + 2i)(-1 - 4i) = -3 - 2i - 12i - 8i^2 = 5 - 14i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + 2i)(-1 + 4i)}{(-1 - 4i)(-1 + 4i)} = \frac{-11 + 10i}{17} = -\frac{11}{17} + \frac{10}{17}i$$

- Własności sprzężenia zespolonego i modułu:

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Math
Player

Zbiór liczb zespolonych

Przykład: Sprawdź czy w zbiorze liczb zespolonych zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania.

$$\begin{aligned}z(z_1 + z_2) &= (a, b) \left[(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \right] = (a, b) (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = \\ &= \left(a(a_1 + a_2) - b(b_1 + b_2), a(b_1 + b_2) + b(a_1 + a_2) \right) = \\ &= \left((aa_1 - bb_1) + (aa_2 - bb_2), (ab_1 + ba_1) + (ab_2 + ba_2) \right) = \\ &= (aa_1 - bb_1, ab_1 + ba_1) + (aa_2 - bb_2, ab_2 + ba_2) = \\ &= (a, b) (a_1, b_1) + (a, b) (a_2, b_2) = zz_1 + zz_2\end{aligned}$$

Przykład: Znajdź fazę i moduł liczby zespolonej $z = 2 - 3i$

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

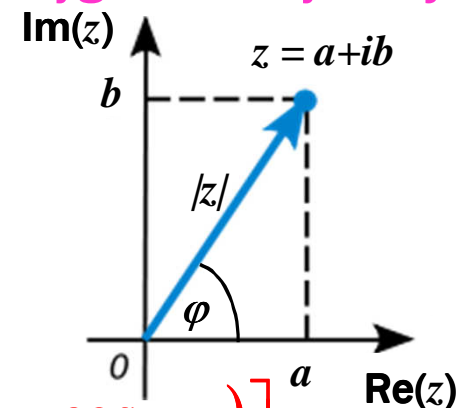
$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{-3}{2}\right) = -0.9828 \text{ rad}$$

Uwaga: przy wyborze kąta zawsze trzeba zwrócić uwagę w której ćwiartce znajduje się badana liczba zespolona.

Postać trygonometryczna liczb zespolonych

Każdą liczbę zespoloną $z=a+bi$ można przedstawić w postaci trygonometrycznej:

$$z = a + bi = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right) = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$



Mnożenie i dzielenie l.z. w postaci trygonometrycznej:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= |z_1| |z_2| \left[\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) \right] = \\ &= |z_1| |z_2| (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Math
Player

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{|z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2))$$

Wnioski:

➤ można tak dobrać wartości argumentów, aby były spełnione relacje:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad \text{oraz} \quad \arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

➤ Twierdzenie de Moivre'a: $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$

Zastosowanie twierdzenia de Moivre'a

Przykład: Wyraż $\cos 3\theta$ i $\sin 3\theta$ poprzez kombinacje potęg $\cos \theta$ i $\sin \theta$.

Math
Player

Stosujemy twierdzenie de Moivre'a:

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i (3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta)$$

Porównując, oddzielnie, części rzeczywiste i urojone, dostajemy:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

Przykład: Wyraż $\cos^4 \theta$ poprzez kombinacje cosinusów wielokrotności kąta.

$$\begin{aligned} z^n + z^{-n} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n + (\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = \\ &= \cos n\theta + i \sin n\theta + \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) = 2 \cos(n\theta) \end{aligned} \Rightarrow z + z^{-1} = 2 \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \frac{1}{2^4} \left(z + \frac{1}{z} \right)^4 = \frac{1}{16} \left(z^4 + 4z^2 + 6 + 4 \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right) = \\ &= \frac{1}{16} \left(z^4 + \frac{1}{z^4} \right) + \frac{1}{4} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Podobnie znajdujemy, że: $z^n - z^{-n} = 2i \sin(n\theta) \Rightarrow z - z^{-1} = 2i \sin \theta$

Postać biegunowa liczb zespolonych

Z analizy matematycznej wiemy, że:

$$e^x e^y = e^{x+y} \quad e^0 = 1 \quad \frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x} \quad e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

1) ponieważ $\frac{d}{d\varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

więc można napisać $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$

2) inaczej
$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right) = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Każdą liczbę zespoloną $z=a+bi$ można przedstawić w postaci biegunowej:

$$z = a + bi = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \exp(i\varphi)$$

Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci biegunowej:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\varphi_1}}{|z_2| e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$