Matematyczne Metody Fizyki I

Wykład 1

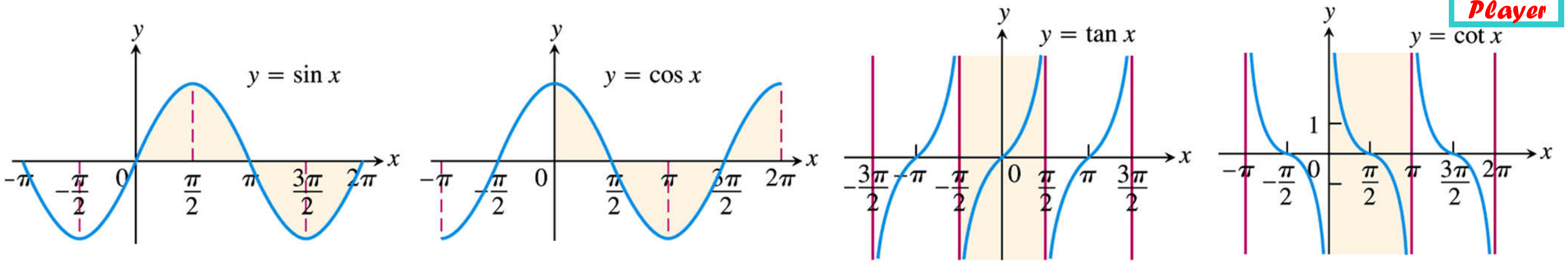
Matematyczne Metody Fizyki I
Dr hab. inż. Mariusz Przybycień

- Matematyka dla przyrodników i inżynierów,
  D.A. McQuarrie, PWN, Warszawa 2005.
- Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki,
  A. Lenda, B. Spisak, Wydawnictwo AGH, Kraków 2006.
- Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej,
  F.W. Byron, R.W. Fuller, PWN, Warszawa 1974.
- Mathematical Methods for Physics and Engineering,
  K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence, Cambridge Univ. Press, 2006.
- Algebra liniowa, T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, GiS, Wrocław 2002.
- Matematyka dla studiów inżynierskich,
  S. Białas, A. Ćmiel, A. Fitzke, Wydawnictwo AGH, Kraków 1973.
- Algebra i geometria analityczna w zadaniach,
  H. Arodź, K. Rościszewski, ZNAK, Kraków 2005.
- Zbiór zadań z algebry, L. Jeśmianowicz, J. Łoś, PWN,Warszawa 1975.
- Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach,
  S. Przybyło, A. Szlachtowski, WNT, Warszawa 2005.

- http://home.agh.edu.pl/~mariuszp

Wiadomości wstępne

Funkcje trygonometryczne:



- **wybrane wartości funkcji trygonometrycznych:**

θ (stopnie)	−180	−135	−90	−45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radiany)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\theta$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\theta$	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

- **tożsamości trygonometryczne dla pojedynczego kąta:**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

Tożsamości trygonometryczne

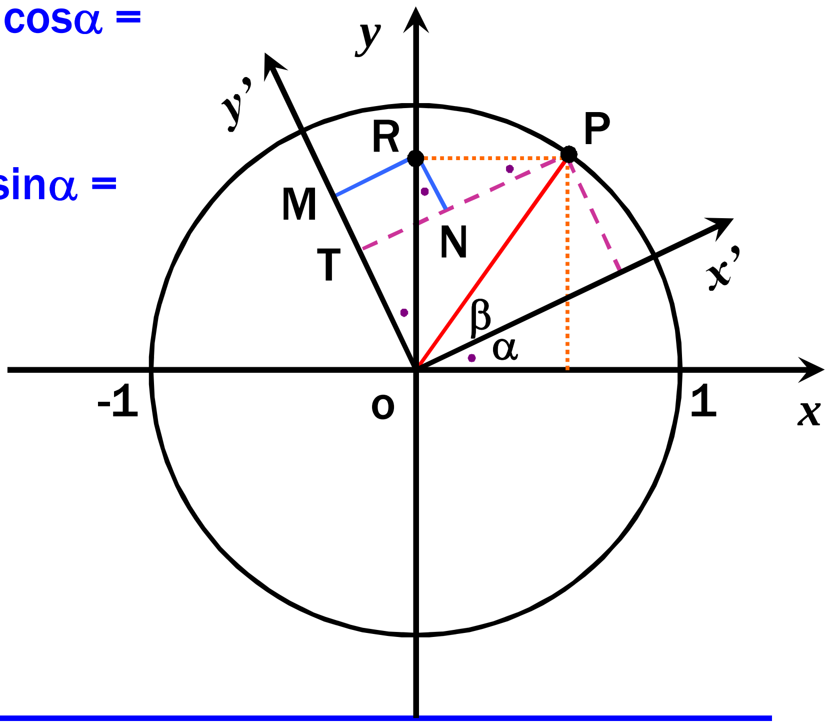
Tożsamości trygonometryczne dla dwóch kątów:

- **Wyprowadzenie wzorów na sinus i cosinus sumy kątów:**

  - współrzędne punktu P: w Oxy: $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ oraz w Ox'y': $(\cos\beta, \sin\beta)$
  - współrzędne punktu R: w Oxy: $(0, \sin(\alpha+\beta))$
  - $\cos\beta = x' = TN+NP = MR+NP = OR \sin\alpha + RP \cos\alpha =$
    $= \sin(\alpha+\beta) \sin\alpha + \cos(\alpha+\beta) \cos\alpha$
  - $\sin\beta = y' = OM-TM = OM-NR = OR \cos\alpha + RP \sin\alpha =$
    $= \sin(\alpha+\beta) \cos\alpha - \cos(\alpha+\beta) \sin\alpha$
  - mnożąc pierwsze z powyższych równań przez $\sin\alpha$ a drugie przez $\cos\alpha$ otrzymujemy:

    $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$
  - podobnie znajdujemy:

    $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$



Tożsamości trygonometryczne

Podstawiając $-\beta$ zamiast β w powyższych wzorach, znajdujemy wyrażenia na sinus i cosinus różnicy kątów. W rezultacie mamy:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

Ważne przypadki szczególne:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \tan\alpha\pm\tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

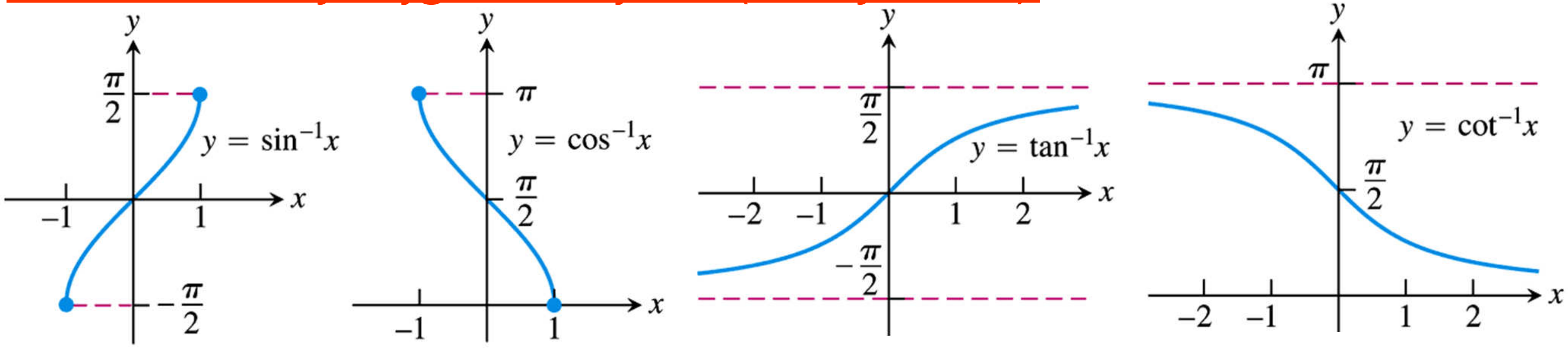
Dodając stronami wzory na $\sin(\alpha\pm\beta)$ a następnie stosując podstawienia $\alpha+\beta = \gamma$ oraz $\alpha-\beta = \delta$ znajdujemy wyrażenie na $\sin\gamma + \sin\delta$. Postępując analogicznie można znaleźć pozostałe z poniższych wzorów:

$$\sin\gamma+\sin\delta = 2\sin\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right) \qquad \cos\gamma+\cos\delta = 2\cos\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$

$$\sin\gamma-\sin\delta = 2\cos\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right) \qquad \cos\gamma-\cos\delta = -2\sin\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$$

Funkcje hiperboliczne

Odwrotne funkcje trygonometryczne (funkcje arcus):



Definicja: Funkcje hiperboliczne zdefiniowane są w następujący sposób:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

Własności:

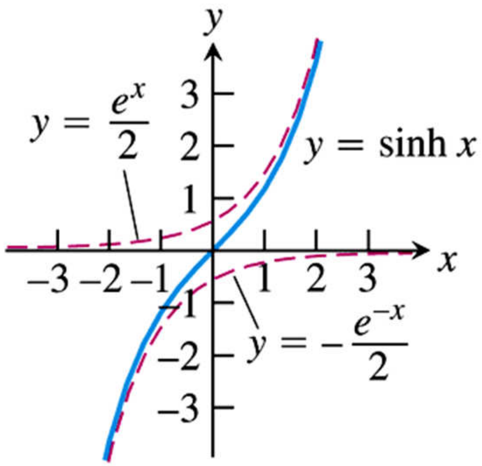
$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \cosh(-x) = \cosh x \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

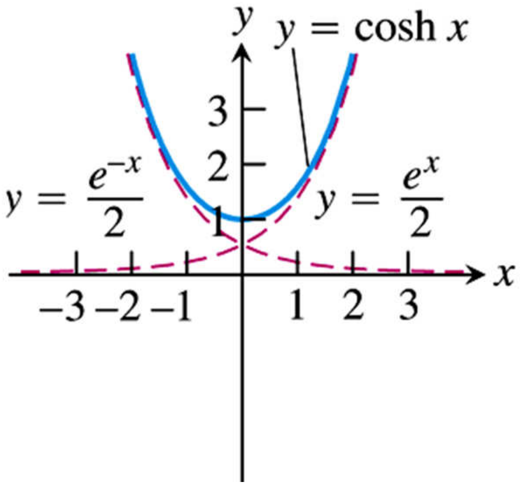
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \qquad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

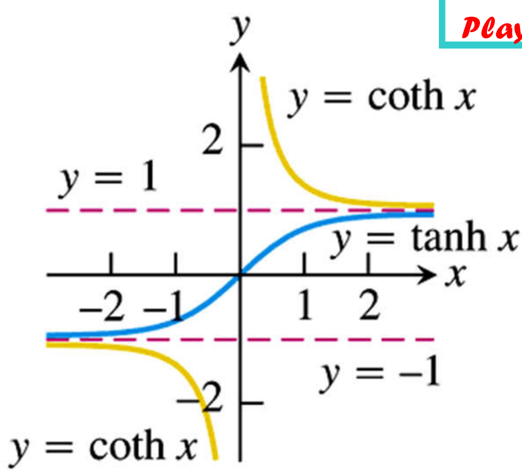
$$\left.\begin{aligned} \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(\alpha \pm \beta) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

Wykresy funkcji hiperbolicznych

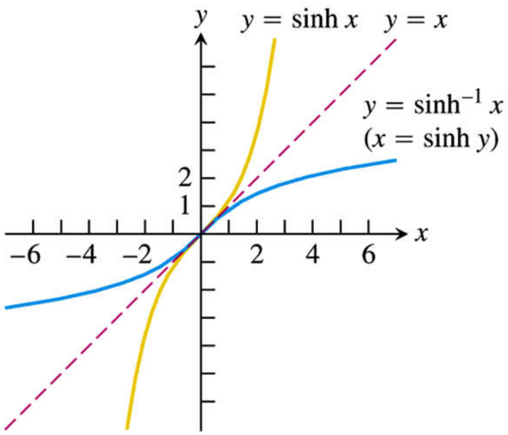
Funkcje hiperboliczne:

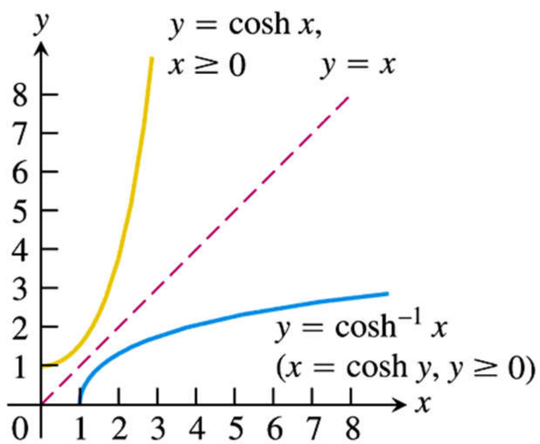


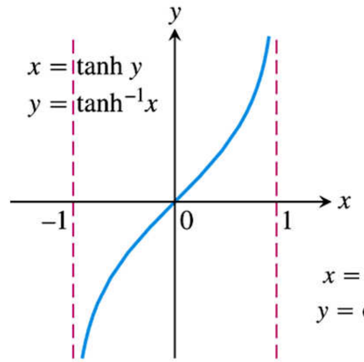


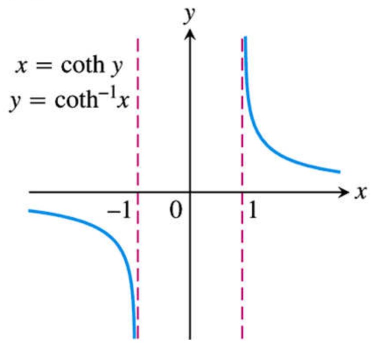


Odwrotne funkcje hiperboliczne (funkcje arcus):









Symbole sumy (Σ) i iloczynu (Π)

- **sumę oraz iloczyn wyrazów ciągu liczb a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_{n-1}, a_n, gdzie p<n zapisujemy w sposób skrócony w następujący sposób:**

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n \qquad \prod_{i=p}^{n} a_i = a_p \cdot a_{p+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

<u>Przykład:</u> Suma wyrazów ciągu arytmetycznego a_0, a_0+d, a_0+2d, ... a_0+nd dana jest wzorem:

$$\sum_{k=0}^{n} (a_0 + kd) = \frac{1}{2}(n+1)(2a_0 + nd)$$

<u>Przykład:</u> Suma wyrazów ciągu geometrycznego a_0, a_0q, a_0q^2, ... a_0q^n, gdzie $q \neq 1$, dana jest wzorem:

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

- **sumy mogą przebiegać po dowolnej liczbie wskaźników, np:**

$$\sum_{i=p}^{n} \sum_{j=r}^{m} a_{ij} = a_{pr} + a_{p+1\ r} + \ldots + a_{nr} + a_{p\ r+1} + \ldots + a_{n\ r+1} + \ldots + a_{pm} + \ldots a_{nm} = \sum_{j=r}^{m} \sum_{i=p}^{n} a_{ij}$$

- **jeżeli zakres zmienności indeksów jest taki sam stosuje się zapis:**

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$$

Metody dowodzenia twierdzeń

<u>Zasada indukcji matematycznej:</u> **Jeżeli twierdzenie w którym jest mowa o liczbach naturalnych (1) jest prawdziwe dla określonej liczby naturalnej n_0, i (2) jeśli z prawdziwości tego twierdzenia dla liczby naturalnej n wynika jego prawdziwość dla liczby następnej n+1, to twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$.**

<u>Przykład:</u> Pokaż, że $Q(n) = n^4+2n^3+2n^2+n$ jest podzielne przez 6 dla wszystkich n>0.

(1) sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla $n_0=1$: $Q(1)/6 = 6/6 = 1$

(2) $Q(n+1) = (n+1)^4 + 2(n+1)^3 + 2(n+1)^2 + (n+1) =$

$$= (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n +1) + 2(n^3 + 3n^2 + 3n +1) + 2(n^2 + 2n + 1) + (n+1) =$$

$$= (\underline{n^4 + 2n^3 + 2n^2 +n}) + (4n^3 + \underline{12n^2} + 14n +\underline{6})$$

Musimy teraz sprawdzić czy $4n^3+14n$ jest podzielne przez 6, czyli czy $R(n) = 2n^3+7n$ jest podzielne przez 3, przeprowadzając dodatkowy dowód przez indukcję:

(1) dla $n_0=1$: $R(1)/3 = 9/3 = 3$

(2) $R(n+1) = 2(n+1)^3 + 7(n+1) = 2(n^3+3n^2+3n+1) + 7(n+1) = (\underline{2n^3+7n}) + \underline{3(2n^2+2n+3)}$

R(n) jest więc podzielne przez 3, co oznacza, że ostatecznie Q(n) jest podzielne przez 6.

Metody dowodzenia twierdzeń

<u>Dowód przez zaprzeczenie:</u>

- zakładamy prawdziwość hipotezy oraz logicznego zaprzeczenia rezultatu który chcemy udowodnić (tzn. jeśli dowodzimy „jeśli P to Q” to zakładamy prawdziwość „P” i „nie Q”),
- stosując znane twierdzenia i własności dochodzimy do sprzeczności (tzn. konkluzji sprzecznej z naszymi założeniami lub jakiegoś w oczywisty sposób nieprawdziwego twierdzenia, np. 1 = 0)

<u>Przykład:</u> Udowodnić, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

- założmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, tzn. że daje się zapisać w postaci $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ gdzie a i b nie mają wspólnych dzielników.
- $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2b^2$ co oznacza, że a^2 jest liczbą parzystą, a w konsekwencji samo a jest parzyste, ponieważ iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.
- a więc można napisać $a = 2c \;\Rightarrow\; 2c^2 = b^2 \;\Rightarrow\; b$ jest parzyste.
- oznacza to że a i b oba są parzyste, a więc mają wspólny dzielnik – sprzeczność!

<u>Przykład:</u> Tw: Jest nieskończenie wiele liczb pierwszych. (dowód $q = p_1\, p_2\, p_3 \dots p_n + 1$)

Dwumian Newtona

Math Player

Symbol Newtona:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{dla} \quad 0 \le k \le n \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{dla} \quad k < 0 \vee k > n$$

Własności: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad \sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} = \binom{n+k}{k+1}$

Przykład: Dowód metodą indukcji matematycznej trzeciej z powyższych własności:

(1) sprawdzamy prawdziwość twierdzenia dla $n_0=1$: $L = \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = P$

(2) $\sum_{s=0}^{n} \binom{k+s}{k} = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} + \binom{k+n}{k} = \binom{n+k}{k+1} + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$

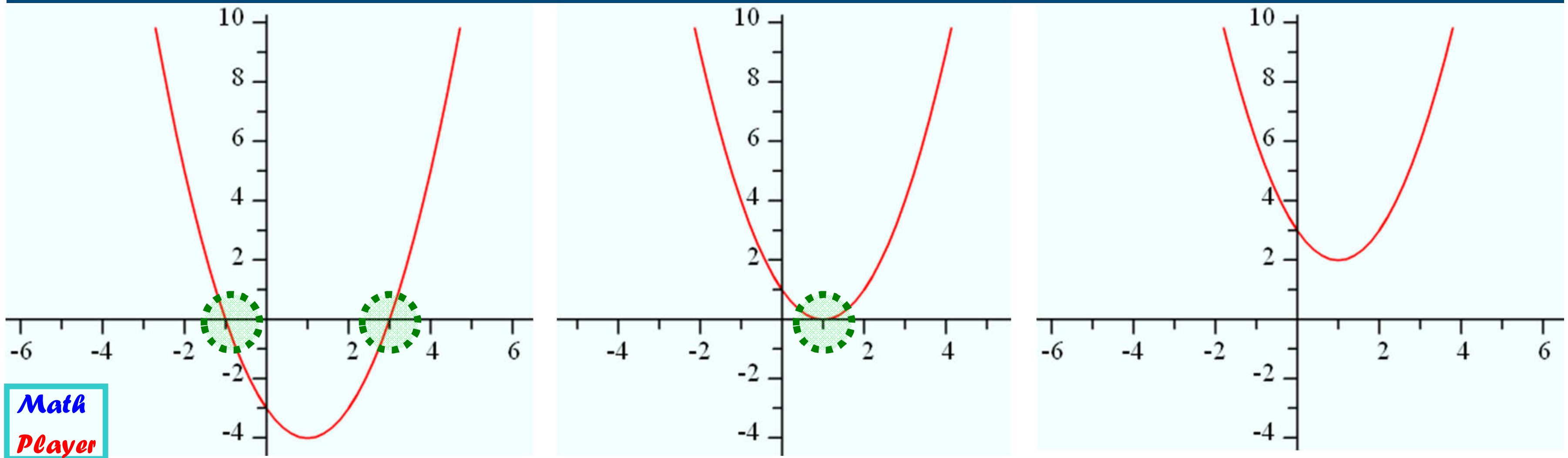
Dwumian Newtona (rozwinięcie dwumianowe): $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Math Player

Przykład: Wychodząc z $(x+y)^p(x+y)^q \equiv (x+y)^{p+q}$ oraz porównując wsp. przy $x^{p+q-r}y^r$ mamy:

$$\sum_{s=0}^{p} \binom{p}{s} x^s y^{p-s} \sum_{t=0}^{q} \binom{q}{t} x^t y^{q-t} \quad \Rightarrow \quad \|s+t=r\| \quad \Rightarrow \quad \sum_{t=0}^{r} \binom{p}{r-t}\binom{q}{t} = \binom{p+q}{r}$$

Pierwiastki równania kwadratowego



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(4+12)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$$

$$y = x^2 - 2x + 1$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(4-4)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x_{1,2} = 1$$

$$y = x^2 - 2x + 3$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(4-12)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{-2} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}\sqrt{-1} \quad ?$$

Jednostka urojona: $i = \sqrt{-1}$

$$x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

Liczby zespolone

Liczby zespolone ($\mathbb{C}$) to liczby zawierające jednostkę urojoną i (L.Euler).

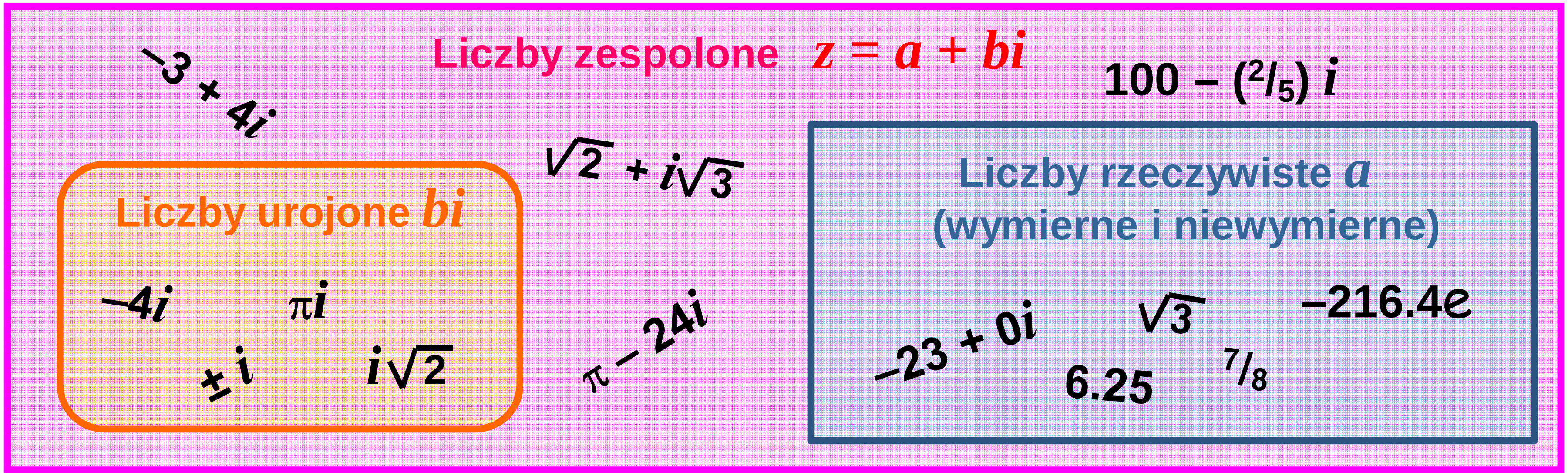
Postać algebraiczna liczb zespolonych to $z = a+bi$, gdzie a, $b \in \mathbb{R}$.

a = Re(z) – część rzeczywista liczby z, b = Im(z) – część urojona liczby z

Jeśli $b = 0$ oraz $a \neq 0$, mamy $a+0i$ ... lub a. ... liczba rzeczywista.

Jeśli $b \neq 0$ oraz $a = 0$, mamy $0+bi$ ... lub ib ... liczba (czysto) urojona.

Fundamentalne twierdzenie algebry stwierdza, że jeśli f(z) jest dowolnym wielomianem stopnia n, to równanie f(z) = 0 ma dokładnie n rozwiązań (w $\mathbb{C}$).



Własności liczb zespolonych

- Dwie liczby zespolone są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy ich części rzeczywiste i urojone są niezależnie sobie równe:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\{z_1\} = \mathrm{Re}\{z_2\} \text{ i } \mathrm{Im}\{z_1\} = \mathrm{Im}\{z_2\}$$

- W zbiorze liczb zespolonych nie jest określona relacja uporządkowania (tzn., że nie ma sensu wyrażenie np. $\cancel{9+6i > 3+2i}$)

Liczbą sprzężoną do liczby $z = a + bi$ nazywamy wielkość $z^* = a - bi$

- Liczba zespolona jest czysto rzeczywista wtedy i tylko wtedy gdy $z = z^*$
- Liczba zespolona jest czysto urojona wtedy i tylko wtedy gdy $z = -z^*$
- $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, z^* = \frac{1}{2}(z + z^*)$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\, z = -\mathrm{Im}\, z^* = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

Modułem liczby $z = a+bi$ nazywamy wielkość: $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Uwaga: zachodzą następujące relacje $|z| = |z^*|$ oraz $|z_1| + |z_2| \leqslant |z_1+z_2|$

Przykład: Znajdź liczbę sprzężoną i moduł liczby zespolonej $z = a + 2i - 3bi$

$$z = a + (2 - 3b)i \quad \Rightarrow \quad z^* = a - (2 - 3b)i$$

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + (2 - 3b)^2}$$

Płaszczyzna zespolona i argument

Każdą liczbę zespoloną $z = a+ib$ można przedstawić jako punkt o współrzęd-nych kartezjańskich (a, b) na tzw. płaszczyźnie zespolonej:

- wektor wodzący tego punktu ma początek w punkcie (0,0) i koniec w (a,b)
- jego długość jest równa modułowi liczby zespolonej
- kąt zawarty między osią Re(z) i wektorem wodzącym punktu (a,b) nazywa-my fazą lub argumentem liczby zespolonej i oznaczamy $\varphi = \arg(z)$.
  Liczba $z = 0$ może mieć dowolną fazę.
  W pozostałych przypadkach faza dana jest przez:

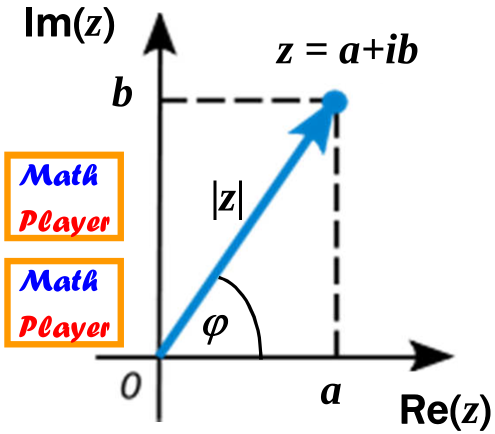
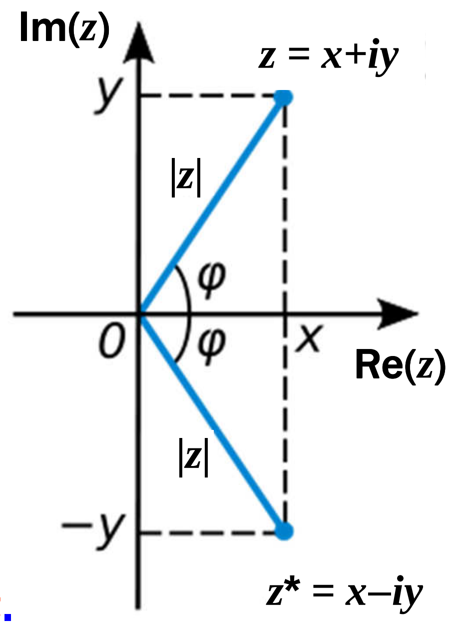


Diagram Arganda

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Danej liczbie zespolonej można przyporzą-dkować nieskończenie wiele faz: $\varphi + 2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Argumentem głównym (ozn. Arg(z)) nazywamy fazę z przedziału $-\pi \leqslant \varphi < \pi$.



Dodawanie liczb zespolonych

- Dodawanie (odejmowanie) liczb zespolonych ($z_1 = a_1+ib_1$ oraz $z_2 = a_2+ib_2$):

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = \\ = a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1 \pm z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 \pm \mathrm{Re}\, z_2 \\ \mathrm{Im}(z_1 \pm z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 \pm \mathrm{Im}\, z_2 \end{cases}$$

Dodawanie l.z. jest przemienne i łączne:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_2$$

Sprzężenie zespolone sumy (różnicy) l.z.

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$

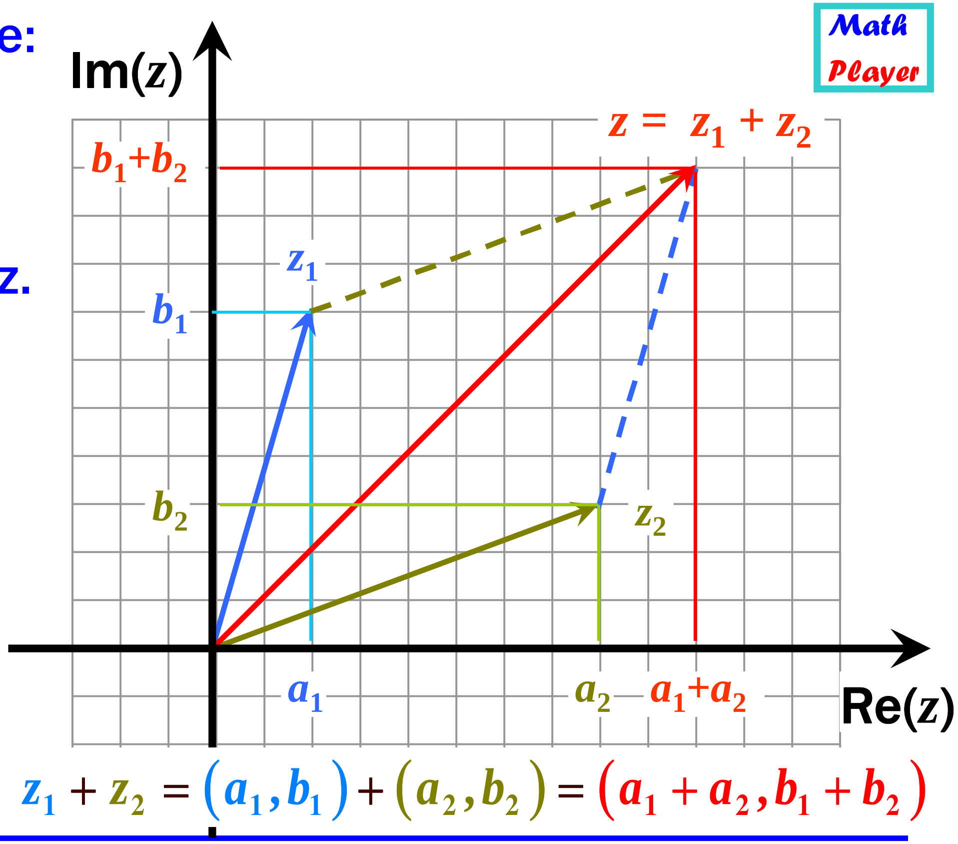
Przykład: Wykonaj działanie $z_1+z_2-z_3$

gdzie $z_1=1+2i$, $z_2=3-4i$, $z_3=-2+i$

$$z_1 + z_2 - z_3 =$$

$$= (1 + 2i) + (3 - 4i) - (-2 + i) =$$

$$= (1 + 3 - (-2)) + i(2 - 4 - 1) = 6 - 3i$$



$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych

- **Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych** ($z_1 = a_1+ib_1$ oraz $z_2 = a_2+ib_2$):

$$z_1z_2 = (a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = \\ = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2+b_1a_2) \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1 \quad \text{oraz} \quad \begin{array}{l} z_1z_2 = z_2z_1 \\ (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \end{array}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}\cdot\frac{a_2-ib_2}{a_2-ib_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2+i(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2-(ib_2)^2} =$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\,\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} \quad \Rightarrow \quad \forall z \neq 0 \qquad z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

Przykład: Wykonaj działania z_1z_2 oraz z_1/z_2 gdzie $z_1=3+2i$, $z_2=-1-4i$.

Math Player

$$z_1z_2 = (3+2i)(-1-4i) = -3-2i-12i-8i^2 = 5-14i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+2i)(-1+4i)}{(-1-4i)(-1+4i)} = \frac{-11+10i}{17} = -\frac{11}{17}+\frac{10}{17}i$$

- **Własności sprzężenia zespolonego i modułu:**

$$(z_1z_2)^* = z_1^*z_2^* \qquad |z_1z_2| = |z_1||z_2| \qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Zbiór liczb zespolonych

Przykład: Sprawdź czy w zbiorze liczb zespolonych zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania.

$$z(z_1+z_2)=(a,b)\left[(a_1,b_1)+(a_2,b_2)\right]=(a,b)(a_1+a_2,b_1+b_2)=$$

$$=\left(a(a_1+a_2)-b(b_1+b_2),a(b_1+b_2)+b(a_1+a_2)\right)=$$

$$=\left((aa_1-bb_1)+(aa_2-bb_2),(ab_1+ba_1)+(ab_2+ba_2)\right)=$$

$$=(aa_1-bb_1,ab_1+ba_1)+(aa_2-bb_2,ab_2+ba_2)=$$

$$=(a,b)(a_1,b_1)+(a,b)(a_2,b_2)=zz_1+zz_2$$

Przykład: Znajdź fazę i moduł liczby zespolonej $z = 2-3i$

$$|z|=\sqrt{zz^*}=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$$

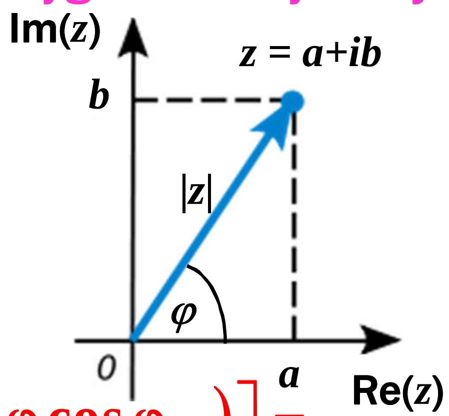
$$\arg(z)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\arctan\left(\frac{-3}{2}\right)=-0.9828\ \text{rad}$$

Uwaga: przy wyborze kąta zawsze trzeba zwrócić uwagę w której ćwiartce znajduje się badana liczba zespolona.

Postać trygonometryczna liczb zespolonych

Każdą liczbę zespolona $z=a+bi$ można przedstawić w postaci trygonometrycznej:

$$z = a + bi = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



Mnożenie i dzielenie l.z. w postaci trygonometycznej:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1||z_2|\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi\cos\varphi_{12})\right] =$$

$$= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Math Player

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Wnioski:

- **można tak dobrać wartości argumentów, aby były spełnione relacje:**

  $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ **oraz** $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

- **Twierdzenie de Moivre'a:** $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

Zastosowanie twierdzenia de Moivre'a

Math Player

Przykład: Wyraź cos3θ i sin3θ poprzez kombinacje potęg cosθ i sinθ.

Stosujemy twierdzenie de Moivre'a:

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\right)$$

Porównując, oddzielnie, części rzeczywiste i urojone, dostajemy:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

Przykład: Wyraź $\cos^4\theta$ poprzez kombinacje cosinusów wielokrotności kąta.

$$z^n + z^{-n} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} =$$
$$= \cos n\theta + i\sin n\theta + \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = 2\cos(n\theta) \quad \Rightarrow \quad z + z^{-1} = 2\cos\theta$$

$$\cos^4\theta = \frac{1}{2^4}\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(z^4 + 4z^2 + 6 + 4\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + \frac{1}{4}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

Podobnie znajdujemy, że: $z^n - z^{-n} = 2i\sin(n\theta) \quad \Rightarrow \quad z - z^{-1} = 2i\sin\theta$

Postać biegunowa liczb zespolonych

Z analizy matematycznej wiemy, że:

$$e^x e^y = e^{x+y} \qquad e^0 = 1 \qquad \frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x} \qquad e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

1) ponieważ $\frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = -\sin\varphi + i\cos\varphi = i(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

więc można napisać $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

2) inaczej $e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \dots =$

$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots\right) = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Każdą liczbę zespoloną $z=a+bi$ można przedstawić w postaci biegunowej:

$$z = a + bi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\exp(i\varphi)$$

Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci biegunowej:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1||z_1| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\varphi_1}}{|z_2| e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_1|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$